

УДК 539.3

Я.В. Максимович

Луцький Інститут розвитку людини університету "Україна"

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ У СМУЗІ З СИСТЕМОЮ ТРІЩИН НА ОСНОВІ МЕТОДУ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Запропоновано методику розрахунку напружень біля тріщин у смугах, яка базується на методі інтегральних рівнянь. Рівняння побудовано на основі розв'язку типу Гріна, за якого умови на межі смуги задовольняються тотожно. Досліджено напруження в смугі із системою тріщин однакової і різної довжини.

Ключові слова: *смуга, напруження, тріщини, метод інтегральних рівнянь, розв'язок типу Гріна.*

Для дослідження напруженого стану пластинок із тріщинами широко використовується метод граничних інтегральних рівнянь. Найбільш ефективне застосування цього методу досягається у випадку, коли рівняння побудоване на розв'язках типу Гріна, оскільки при цьому умови на межі пластинки задовольняються тотожно [3]. У даній роботі за допомогою такого підходу побудовано інтегральні рівняння для смуги із тріщинами та проведено дослідження напружень біля системи тріщин.

Постановка задачі. Розглядається смуга $-h < y < 0$, яка послаблена системою тріщин, що розміщені вздовж кривих L_j ($j=1, \dots, J$). Прийmemo, що межі смуги вільні від навантаження, смуга рівномірно навантажена на нескінченності, перебуває під дією зосереджених сил (X_j, Y_j) , які прикладені у точках (a_j, b_j) ($j=1, \dots, J$) та зусиль q_T . Тут позначено $q_T = N_q + iT_q$, де N_q і T_q – проекції прикладених до берегів тріщини вектора сил на зовнішню нормаль та дотичну до неї, які далі приймаються однаковими на протилежних берегах.

Загальний розв'язок поставленої задачі для нескінченної пластинки записують через комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi(z), \Psi(z)$ у вигляді [3]

$$\Phi(z) = \int_L \frac{Q(t)ds}{t-z} + \Phi_c(z), \quad \Psi(z) = \int_L \left[\frac{\bar{Q}}{t-z} - \frac{iQ}{(t-z)^2} \right] ds + \Psi_c(z), \quad (1)$$

де $\Phi_c(z) = \Phi_p(z) + \Phi_\infty(z)$, $\Psi_c(z) = \Psi_p(z) + \Psi_\infty(z)$; $\Phi_\infty(z), \Psi_\infty(z)$ і $\Phi_p(z), \Psi_p(z)$ – відповідно комплексні потенціали для суцільної смуги, що відповідають прикладеному на нескінченності навантаженню та дії зосереджених сил. Тут $L = L_1 + L_2 + \dots + L_J$; невідома функція Q визначається через стрибки вектора переміщень на контурі L

$$Q = -\frac{Gi}{\pi(\chi+1)} \frac{d}{ds} ([u] + i[v]), \quad (2)$$

де G – модуль зсуву, $\chi = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, ν – коефіцієнт Пуассона.

Вектор зусиль q на довільній площинці, що визначається диференціалом dz знаходиться через комплексні потенціали за формулою [2, 3]

$$q(z) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + dz / dz [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}]. \quad (3)$$

Інтегральні рівняння для знаходження функції $Q(t)$ отримуємо після підстановки формули (1) в умову (3) та спрямування $z \rightarrow L$. Використавши формули Племеля-Сохоцького, отримуємо рівняння вигляду [3]

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + dz / dz \overline{F(z, \bar{z})} = q_T(z), \quad z \in L, \quad (4)$$

де $F(z, \bar{z}) = z\overline{\Phi'(z)} + \Psi(z)$. Рівняння (4) містить інтеграли типу Коші, що розглядаються в сенсі головного значення за Коші та регулярні інтеграли.

Інтегральні рівняння для смуги з тріщинами. Для запису інтегрального представлення для смуги з тріщинами з огляду на вигляд підінтегральних функцій у зображенні (1) знайдемо спочатку комплексні потенціали $\Phi_G(z), \Psi_G(z)$, які мають особливості вигляду

$$\Phi_G(z) \sim \Phi_0(z), \quad \Psi_G(z) \sim \Psi_0(z), \quad (5) \quad \text{за}$$

умови, що відповідні їм напруження на границі смуги рівні нулю. Тут

$$\Phi_0(z) = \frac{C}{z_0 - z}, \quad \Psi_0(z) = \frac{\bar{C}}{z_0 - z} - \frac{\bar{z}_0 C}{(z_0 - z)^2};$$

де C, z_0 – довільні комплексні сталі, причому $z_0 \in D$; D – область, яку займає смуга. Запишемо цей розв'язок у вигляді

$$\Phi_G(z, z_0) = C F_0(z, z_0) + \bar{C} F_1(z, z_0), \quad \Psi_G(z, z_0) = C P_0(z, z_0) + \bar{C} P_1(z, z_0), \quad (6)$$

де F_j, P_j – відомі функції.

Тоді інтегральне зображення для смуги з тріщинами запишеться у вигляді

$$\Phi(z) = \Phi_D(z) + \int_L [Q(t) F_0(z, t) + \overline{Q(t)} F_1(z, t)] ds, \quad \Psi(z) = \Psi_D(z) + \int_L [Q(t) P_0(z, t) + \overline{Q(t)} P_1(z, t)] ds, \quad (7)$$

де $\Phi_D(z), \Psi_D(z)$ – комплексні потенціали для смуги, які відповідають прикладеному зовнішньому навантаженню (без врахування зусиль, що діють на берегах тріщини). За побудовою в представленні (7) підінтегральні функції мають такі ж особливості, як і в (1). Тому представлення (1) і (7) визначають однакові стрибки переміщень на контурі L . Очевидно, що потенціали (7) автоматично задовольняють умовам відсутності напружень на границі смуги.

Для забезпечення умови однозначності переміщень для тріщин необхідно, щоби

$$\int_{L_j} Q ds = 0. \quad (8)$$

Перепишемо зображення (7) у вигляді

$$\Phi(z) = \Phi_D(z) + \int_L [Q_R(t) \Phi_R(z, t) + Q_I(t) \Phi_I(z, t)] ds, \quad (9)$$

$$\Psi(z) = \Psi_D(z) + \int_L [Q_R(t) \Psi_R(z, t) + Q_I(t) \Psi_I(z, t)] ds,$$

де Q_R, Q_I – дійсна та уявна частина функції Q ,

$$\Phi_R(z, t) = \Phi_G(z, t)|_{A=1}, \quad \Psi_R(z, t) = \Psi_G(z, t)|_{A=1}, \quad (10)$$

$$\Phi_I(z, t) = \Phi_G(z, t)|_{A=i}, \quad \Psi_I(z, t) = \Psi_G(z, t)|_{A=i}.$$

Підставивши потенціали (9) у формулу для визначення вектора напружень на контурі L , отримуємо інтегральне рівняння для знаходження невідомих дійсних функцій Q_R, Q_I у вигляді

$$\int_L [Q_R(t) q_R(z, t) + Q_I(t) q_I(z, t)] ds = q_T(z) - q_D(z), \quad (11)$$

де $q_R(z, t), q_I(z, t), q_D(t)$ – вектори напружень в точці z кривої L , які визначаються за формулою (1.3) через відповідно комплексні потенціали $(\Phi_R, \Psi_R), (\Phi_I, \Psi_I), (\Phi_D, \Psi_D)$.

Застосуємо до розв'язування рівнянь (11) метод механічних квадратур. У результаті отримуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{n=1}^N (a_{vn} R_n + b_{vn} I_n) = d_v, \quad v = 1, \dots, N-1, \quad (12)$$

де $a_{vn} = C_n q_R(z_v, t_n), b_{vn} = C_n q_I(z_v, t_n), d_v = q_T(z_v) - q_D(z_v), C_n, z_v, t_n$ – визначаються за наведеними в [1] формулами. Тут використано зображення

$$Q_R(g(\xi)) = R(\xi) / \sqrt{1 - \xi^2}, \quad Q_I(g(\xi)) = I(\xi) / \sqrt{1 - \xi^2}.$$

З умов однозначності переміщень отримуємо ще два рівняння

$$\sum_{n=1}^N A_n R_n = 0, \quad \sum_{n=1}^N A_n I_n = 0. \quad (13)$$

КІН через знайдені коефіцієнти визначаються за формулою

$$K_I^+ - iK_{II}^+ = -2\pi\sqrt{\pi}|g'(1)|(R_N + iI_N).$$

Знаходження комплексного розв'язку типу Гріна. Побудуємо розв'язок типу Гріна для смуги $-H < y < 0$ з вільною від навантаження межею. При його знаходженні зручніше замість функції Ψ використати $\Omega(z) = \Phi(z) + z\Phi'(z) + \Psi(z)$.

Ця функція має особливість вигляду

$$\Phi_0(z) = \frac{C}{c-z}, \quad \Omega_0 = \gamma \frac{\bar{C}}{z_0-z} + \frac{C(z_0-\bar{z}_0)}{(z_0-z)^2}. \quad (14)$$

Зобразимо розв'язок у вигляді [5]

$$\Phi(z) = \Phi_p(z) + \Phi_\Delta(z), \quad \Psi(z) = \Psi_p(z) + \Psi_\Delta(z), \quad (15)$$

де

$$\Phi_p(z) = -\frac{C}{z-z_0} + \frac{\gamma C}{z-z_0} + \frac{\bar{C}(z_0-\bar{z}_0)}{(z-z_0)^2}, \quad \Omega_p(z) = -\frac{\gamma \bar{C}}{z-z_0} + \frac{\bar{C}}{z-z_0} + \frac{C(z_0-\bar{z}_0)}{(z-z_0)^2}, \quad \Phi_\Delta(z) \text{ і } \Omega_\Delta(z) -$$

корегувальний розв'язок, який визначається із розв'язку задачі теорії пружності для смуги, що задовольняє граничні умови

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = 0 \text{ для } y=0 \text{ і } \sigma_y - i\tau_{xy} = -q \text{ для } y=-h, \text{ де} \quad (16)$$

$$q = \Phi_p(x-ih) - 2ih\overline{\Phi_p'(x-ih)} + \overline{\Omega_p(x-ih)} \quad (17)$$

Зазначимо, що потенціали $\Phi_p(z)$ і $\Omega_p(z)$ є розв'язком відповідної задачі для півплощини $y < 0$ з вільною від навантаження межею $y=0$, що має особливості (14).

Використовуючи відомі результати [2], отримаємо

$$\Phi_\Delta(z) = \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left[Q(\xi/h) sh\xi \exp(-i\xi z/h) - \overline{Q(\xi/h)} \xi e^{-\xi} \exp(i\xi z/h) \right] d\xi, \quad (18)$$

$$\Omega_\Delta(z) = \overline{\Phi_\Delta(z)}, \quad \Delta = sh^2\xi - \xi^2, \quad Q(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x)e^{i\lambda x} dx.$$

На підставі співвідношень (16) – (18) маємо

$$Q(\lambda) = A(\lambda)e^{-\lambda h} \text{ для } \lambda \geq 0 \text{ і } Q(\lambda) = [\overline{B(-\lambda)} - 2\lambda \overline{A(-\lambda)}]e^{\lambda h} \text{ для } \lambda < 0; \quad (19)$$

$$A(\lambda) = B(\lambda) = 0 \text{ для } \lambda < 0;$$

$$A(\lambda) = \sum_{k=0}^1 \left[a_k \lambda^k \exp(i\lambda z_0) + b_k \lambda^k \exp(i\lambda \bar{z}_0) \right];$$

$$B(\lambda) = \sum_{k=0}^1 \left[c_k \lambda^k \exp(i\lambda z_0) + d_k \lambda^k \exp(i\lambda \bar{z}_0) \right] \text{ для } \lambda < 0,$$

де $a_0 = -iC$, $b_0 = iC$, $b_1 = -\bar{C}(z_0 - \bar{z}_0)$, $c_0 = \bar{b}_0$, $c_1 = -\bar{b}_1$, $d_0 = \bar{a}_0$, $a_1 = d_1 = 0$.

Зазначимо, що $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ – трансформанти Фур'є функцій $\Phi_p(z)$ і $\Omega_p(z)$ для $Im(z) < -h$, причому тут

$$\Phi_p(z) = \int_0^{\infty} A(\lambda)e^{-i\lambda z} d\lambda, \quad \Omega_p(z) = \int_0^{\infty} B(\lambda)e^{-i\lambda z} d\lambda. \quad (20)$$

Формулу (3.11) перепишемо у вигляді

$$\Phi_\Delta(z) = \int_0^{\infty} \left\{ [\varphi_1(h\lambda)A(\lambda) + \varphi_2(h\lambda)B(\lambda)] \exp(-i\lambda z) - \right. \quad (21)$$

$$\left. - [\varphi_2(h\lambda)\overline{A(\lambda)} + \varphi_3(h\lambda)\overline{B(\lambda)}] \exp(i\lambda z) \right\} d\lambda, \quad \Omega_\Delta(z) = \overline{\Phi_\Delta(z)},$$

$$\varphi_2(\xi) = 0,5\xi / \Delta(\xi), \quad \varphi_3(\xi) = 0,25[1 - \exp(-2\xi)] / \Delta(\xi), \quad \varphi_1(\xi) = \varphi_3(\xi) + 2\xi\varphi_2(\xi).$$

Покажемо, що функції $\Phi_{\Delta}(z)$ і $\Omega_{\Delta}(z)$ визначаються через збіжні інтеграли. В околі точки $\lambda = 0$ отримуємо розвинення

$$A(\lambda) = 2R + \lambda^2 + \alpha + \dots, \quad B(\lambda) = -\lambda\bar{R} + \lambda^2\bar{\alpha} + \dots,$$

$$\text{де } R = (C - \bar{C})(z_0 - \bar{z}_0), \quad \alpha = i \left[C(z_0^2 - \bar{z}_0^2) - \bar{C}z_0(z_0 - \bar{z}_0) \right].$$

Оскільки величина R є дійсною сталою, то підінтегральні функції для потенціалів $\Phi_{\Delta}(z)$ і $\Omega_{\Delta}(z)$ в околі точки $\lambda = 0$ є обмежені за величиною. Враховуючи також експоненціальне загасання підінтегральних функцій на нескінченності, приходимо до висновку, що інтеграл (21) є збіжним.

Безпосереднє обчислення інтегралів (21) є складною задачею, так як підінтегральні функції в них мають особливості в околі точки $\lambda = 0$ (полнос третього порядку) та ці функції повільно загасають для $\lambda \Rightarrow \infty$ у випадку, коли $I_m(z) \cong -h$ та сили прикладені біля краю смуги $y = -h$. Покращимо збіжність даних інтегралів, виділивши із підінтегральних функцій складові, що мають особливості в околі точки $\lambda = 0$ та повільно загасають на нескінченності.

Для великих значень x справедливі зображення

$$\varphi_1(x) = (1 + 4x^2)e^{-2x} + 0(e^{-4x}), \quad \varphi_2(x) = 2xe^{-2x} + 0(e^{-4x}), \quad \varphi_3(x) = e^{-2x} + 0(e^{-4x}).$$

Використовуючи ці зображення, запишемо

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= (1 + 4x^2)e^{-2x} + P_1(x)e^{-3x}, & \varphi_2(x) &= 2xe^{-2x} + P_2(x)e^{-3x}, \\ \varphi_3(x) &= e^{-2x} + P_3(x)e^{-3x}, \end{aligned} \quad (22)$$

де функції

$$\begin{aligned} P_1(x) &= [\varphi_1(x) - (1 + 4x^2)e^{-2x}]e^{3x}, & P_2(x) &= [\varphi_2(x) - 2xe^{-2x}]e^{3x}, \\ P_3(x) &= [\varphi_3(x) - e^{-2x}]e^{3x}, \end{aligned}$$

мають порядок $0(e^{-x})$ для $x \Rightarrow \infty$.

Враховуючи порядок особливості функцій $j_j(x)$ в околі точки $x = 0$, введені функції розвинемо в ряди Лорана. Перші вісім членів даних рядів мають вигляд

$$P_1(x) \approx \sum_{n=0}^7 a_n x^{n-3}, \quad P_2(x) \approx \sum_{n=0}^7 b_n x^{n-3}, \quad P_3(x) \approx \sum_{n=0}^7 c_n x^{n-3}, \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{3}{2}, \quad b_1 = \frac{9}{2}, \quad b_2 = \frac{13}{20}, \quad b_3 = \frac{123}{20}, \quad b_4 = \frac{18269}{8400}, \quad b_5 = \frac{489}{2800}, \quad b_6 = -\frac{8413}{84000}, \quad b_7 = -\frac{369}{12000}, \\ c_0 &= \frac{3}{2}, \quad c_1 = 3, \quad c_2 = \frac{61}{20}, \quad c_3 = \frac{11}{10}, \quad c_4 = \frac{769}{8400}, \quad c_5 = -\frac{211}{4200}, \quad c_6 = -\frac{4181}{252000}, \quad c_7 = 0, \quad a_0 = \frac{3}{2}, \\ a_n &= c_n + 2b_{n-1}, \quad n = 1, 7 \end{aligned}$$

Ряди Лорана для функцій $P_j(x)$ ($j = 1, 2, 3$) збігаються тільки для $|x| < R$ де $R = |x_1|$, x_1 – найменший за модулем корінь рівняння $D(x) = 0$. Враховуючи, що [6] $x_1 = 2, 251 + i4, 213$, отримуємо $R \approx 4, 7925$.

Використовуючи рівності (22), запишемо

$$\varphi_j(x) = \omega_j(x) + r_j(x) + s_j(x), \quad (24)$$

де $\omega_1(x) = (1 + 4x^2)e^{-2x} + \sum_{n=-1}^4 a'_n x^n e^{-3x}$, $r_1(x) = \sum_{n=-3}^{-2} a'_n x^n e^{-3x}$, $\omega_2(x) = 2xe^{-2x} + \sum_{n=-1}^4 b'_n x^n e^{-3x}$,
 $r_2(x) = \sum_{n=-3}^{-2} b'_n x^n e^{-3x}$, $\omega_3(x) = e^{-2x} + \sum_{n=-1}^4 c'_n x^n e^{-3x}$, $r_3(x) = \sum_{n=-3}^{-2} c'_n x^n e^{-3x}$, $a_{\check{r}} = a_{n+3}$,
 $b_{\check{r}} = b_{n+3}$, $c_{\check{r}} = c_{n+3}$, $s_j(x) = \varphi_j(x) - \omega_j(x) - r_j(x)$, ($j = 1, 2, 3$).

Відповідно з формулами (24) функції $F_D(z)$ і $W_D(z)$ зобразимо у вигляді

$$F_D(z) = F_w(z) + F_r(z) + F_s(z), \quad \Omega_\Delta(z) = \Omega_\omega(z) + \Omega_r(z) + \Omega_s(z), \quad (25)$$

де функції з індексами ω, r, s визначаються за формулами (24) для відповідно

$$\varphi_j = \omega_j, \quad \varphi_j = r_j, \quad \varphi_j = s_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

Функції з індексом ω безпосередньо знаходяться через комплексні потенціали $F_p(z)$, $\Omega_p(z)$. Дійсно, для $k \geq 2$, $n \geq 0$ справедливі формули

$$\int_0^\infty \eta^n e^{-k\eta} A_j(\lambda) \exp(-i\lambda z) d\lambda = (ih)^n D^n \Phi_{pj}(z^{-ikh}),$$

$$\int_0^\infty \eta^n e^{-k\eta} B_j(\lambda) \exp(-i\lambda z) d\lambda = (ih)^n D^n \Omega_{pj}(z^{-ikh}),$$

де $D = \frac{d}{dz}$ - диференціальний оператор. Тому отримаємо

$$\begin{aligned} \Omega_\omega(z) &= \overline{\Phi}_\omega(z), \quad \Phi_\omega(z) = F_\omega(z) - \overline{Q}_\omega(z), \\ F_\omega(z) &= (1 - 4h^2 D^2) \Phi_p(z - 2ih) + \sum_{n=0}^4 a'_n (ih)^n D^n \Phi_p(z') + \\ &+ 2ih D \Omega_p(z - 2ih) + \sum_{n=0}^4 b'_n (ih)^n D^n \Omega_p(z'), \\ Q_\omega(z) &= 2ih D \Phi_p(z - 2ih) + \sum_{n=0}^4 b'_n (ih)^n D^n \Phi_p(z') + \\ &+ \Omega_p(z - 2ih) + \sum_{n=0}^4 c'_n (ih)^n D^n \Omega_p(z'), \quad z' = z - 3ih. \end{aligned} \quad (26)$$

Функції з індексом r визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \Omega_r(z) &= \overline{\Phi}_r(z), \\ \Phi_r(z) &= -1,5h^{-3} [(a_o + \overline{b}_o) S_3(z') + (\overline{a}_o + b_o) S_3(z'')] + \\ &+ h^{-2} [(6a_o + 4,5\overline{b}_o) E_2(-z') - (3a_o + 4,5\overline{b}_o) E_2(z') + \\ &+ (6b_o + 4,5\overline{a}_o) E_2(-z'') - (3b_o + 4,5\overline{a}_o) E_2(z'')] + \\ &+ 1,5h^{-3} [-\overline{b}_1 (E_2(-z') + E_2(z')) + b_1 (E_2(-z'') + E_2(z''))] + \\ &+ h^{-1} [-4,5\overline{b}_1 (E_1(-z') + E_1(z')) + 3b_1 (2E_1(-z'') + E_1(z''))], \\ &+ \frac{1}{20h} [61a_1 E_o(-z') - 61a_1 E_o(z') + 131\overline{a}_1 E_o(-z'') - 131\overline{a}_1 E_o(z'')], \end{aligned}$$

$$E_0(z) = \frac{1}{3h - iz}, \quad E_1(z) = -\ln \frac{z + 3ih}{3ih}, \quad E_2(z) = (z + 3ih)E_1(z) + iz,$$

$$E_3 = -0,5(z + 3ih)^2 E_1(z) + 0,5(-z + 3ih)^2 E_1(-z) - 3ihz,$$

де $z\check{y} = z - z_0$, $z\check{y}\check{y} = z - \bar{z}_0$.

При записі даних формул враховано умови рівноваги прикладених до смуги сил та зафіксовано уявну сталу, яка на напружений стан не впливає.

Функції з індексом s визначаються через інтеграли (21) при заміні функцій $j_j(x)$ на $s_j(x)$ ($j = 1, 2, 3$). Функції $s_j(x)$ мають порядок $O(x^4)$ для малих значень аргументу та $O(e^{-3x})$ для $x \Rightarrow \infty$. Тому інтеграли, що містять дані функції, можуть бути ефективно обчислені з використанням відомих квадратурних формул. Крім цього, як показали розрахунки, функції $s_j(x)$ є малими за величиною для $0 < x < \Gamma$. Так, максимальне значення величин $a_j = S_j / j_j$, буде: $a_1 @ 0,0007$ (досягається для $x @ 3$); $a_2 @ 0,004$ (досягається для $x @ 4$). Тобто зображення (24) при $s_j = 0$ можна розглядати також і як апроксимації для підінтегральних функцій. Зазначимо, що їх точність значно вища, ніж запропонована в [4] апроксимація для випадку, коли прикладене до смуги навантаження є симетричним відносно серединної лінії смуги.

Таким чином, отримані співвідношення визначають розв'язок типу Гріна для смуги, причому в практичних розрахунках може бути використаний наближений замкнений розв'язок, що отримується при $\Phi_s(z) = \Omega_s(z) = 0$.

Результати розрахунків. Розглянуто смугу із системою паралельних до висоти, симетрично розміщених тріщин, відстань між якими d . Зазначимо, що в літературі найбільше вивчено коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для однієї чи двох тріщин у смугі. При розгляді системи тріщин, як правило обмежуються розглядом періодичної системи [4]. Розрахунки виконано для випадку семи однакових тріщин півдовжиною a за поздовжнього розтягу смуги зусиллями p . Розраховані відносні КІН $F_I = K_I / (p\sqrt{\pi a})$ при $a/h=0,5$ та різних відстанях між тріщинами зображено на рис. 1а зірочками для кожної із тріщин (зірочки з'єднані прямими, які не мають фізичного сенсу). Біля наведених величин вказано значення відносної відстані $d/2a = 2; 1,0,5; 0,25; 0,125; 0,0625$.

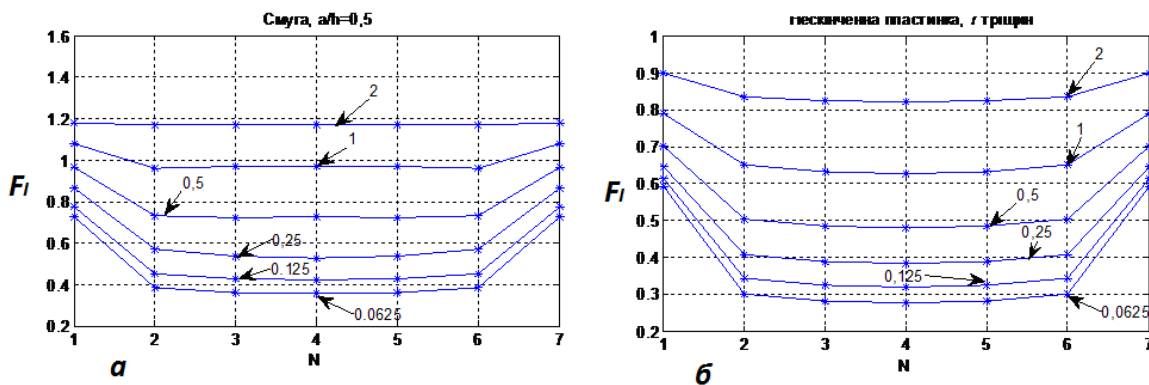


Рис. 1. Відносні КІН для смуги (а) і нескінченної пластинки (б) із системою однакових тріщин.

Із рисунка видно, що при відстанях між тріщинами, більшими за дві довжини тріщин взаємовплив тріщин практично відсутній. При цьому відносний КІН $F_I \approx 1,1867$, який наведено в [4, 6]. Максимальні значення КІН досягаються на крайніх тріщинах, а на внутрішніх тріщинах КІН практично сталі.

Для порівняння на рис.1.б зображено відносні КІН для нескінченної пластинки із тріщинами (смуги, для якої $h \rightarrow \infty$). Видно, що в смугі КІН значно більші за величиною, ніж для нескінченної пластинки.

Розраховане значення відносного КІН для центральної тріщини при $d/2a=1$ дорівнює 0,9712, що узгоджується із відповідним значенням для її періодичної системи $F_I = 0,970$.

Розглянуто випадок, коли центральна тріщина має більшу довжину – для неї $a/h=0,625$, а для решти тріщин $a/h=0,5$. Розраховані відносні КІН для смуги зображені на рис.2 кривими '2', а для нескінченної пластинки – кривими '1'. Тут відносні КІН для кожної із тріщин розраховані відносно своєї довжини.

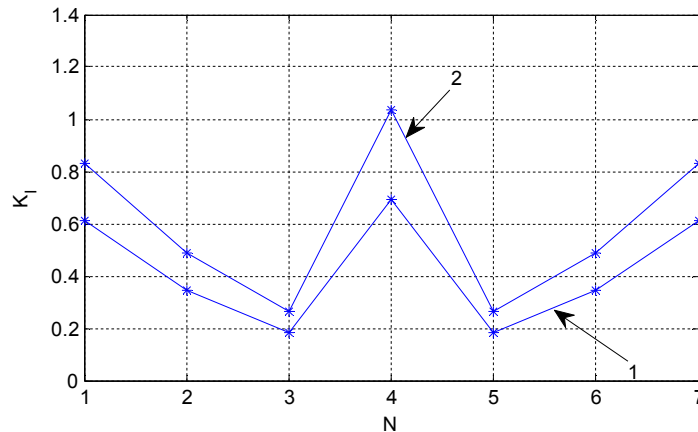


Рис. 2. Розподіл відносних КІН для системи тріщин різної довжини

Із рисунка видно, що на центральних тріщинах (збільшеної довжини) КІН істотно збільшилися. Порівнявши дані рис.1 і 2, бачимо, що КІН на сусідніх до центральної тріщини зменшилися. Звідси випливає, що у випадку росту однієї із внутрішніх тріщин її швидкість збільшується, в зв'язку із чим вона перетворюватиметься в магістральну.

Висновки. Запропоновано методику розрахунку КІН для смуг із тріщинами за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь. Досліджено КІН в смугі із системою тріщин однакової і різної довжини. Результати розрахунків зіставлено із даними, отриманими в літературі іншими методами.

1. Божидарнік В.В., Максимович О.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами.– Луцьк, 2003.– С. 226.
2. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. –М.: Наука, 1966. – С. 708.
3. Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук И.В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук.думка, 1989. – С. 248.
4. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук.думка, 1988. – С. 618.
5. Саврук М.П., Максимович Я.В. Побудова розв'язку типу Гріна задачі теорії пружності для смуги // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – 35, № 6. – С. 17-21.
6. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х томах / Под ред. Ю. Мураками. –М.: Мир, 1990. – т. 1. – С. 448.