УДК 539.3

В.М. Трач, М.М. Хоружий
Національний університет водного господарства та природокористування

ДО ПИТАННЯ ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК СЕРЕДНЬОГО ЗГИНУ

В роботі представлено підхід стосовно отримання геометрично нелінійних неоднорідних диференціальних рівнянь про напружено-деформований стан анізотропних оболонок, що ґрунтується на теорії типу Тимошенко.

Ключові слова: *анізотропна оболонка, напружено-деформований стан, теорія типу Тимошенко.*

Питання про напружено-деформований стан (НДС) тонких анізотропних оболонок представлено в незначній кількості робіт [7, 3, 6, 9, 11, 12, 13, 14, 15]. Найбільш ґрунтовно воно висвітлене в монографії [3]. В практиці розрахунків також користуються поняттям оболонок середньої товщини. Відомо, що для їх розрахунку слід використовувати уточнені теорії. Найбільш широкого вжитку серед яких набула теорія типу Тимошенко [12, 15]. Тому, в даній роботі представлений підхід стосовно отримання нелінійних рівнянь теорії типу Тимошенко про НДС анізотропних оболонок.

Розподіл переміщень u, v, w за товщиною оболонки згідно з гіпотезами Тимошенко такий:

$$u = u + z\theta_1, \; v = v + z\theta_2, \; w = w + z\chi, \tag{1}$$

де u, v, w в правій частині виразів – відповідні переміщення серединної поверхні оболонки, z – координата за якою змінюється товщина оболонки.

В [10] на цій основі представлено вираз для потенціальної енергії анізотропних оболонок середньої товщини

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2}\iint \Big[& C_{11}^*\varepsilon_{11}^2 + 2C_{12}^*\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + C_{22}^*\varepsilon_{22}^2 + 2C_{16}^*\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} + 2C_{26}^*\varepsilon_{22}\varepsilon_{12} + \\ & + C_{16}^*\varepsilon_{11}^2 + 2B_{11}^*\varepsilon_{11}\kappa_1 + 2B_{12}(\varepsilon_{11}\kappa_2 + \varepsilon_{22}\kappa_1) + 2B_{22}^*\varepsilon_{22}\kappa_2 + 4B_{16}^*\varepsilon_{11}\tau + \\ & + 4B_{26}^*\varepsilon_{22}\tau + 2B_{16}'\varepsilon_{12}\kappa_1 + 2B_{16}'\varepsilon_{12}\kappa_2 + 4B_{66}^*\varepsilon_{12}\tau + D_{11}\kappa_1^2 + 2D_{12}\kappa_1\kappa_2 + \\ & + 4D_{16}\kappa_1\tau + 4D_{16}\kappa_2\tau + D_{22}\kappa_2^2 + 4D_{66}\tau^2 + C_{44}^*\varepsilon_{23}^2 + C_{45}^*\varepsilon_{23}\varepsilon_{13} + C_{55}^*\varepsilon_{13}^2 \Big] A_1A_2\,d\alpha_1 d\alpha_2 . \end{aligned} \tag{2}$$

В (2) жорсткості C_{ij}, B_{ij}, D_{ij} визначаються загальноприйнятими формулами [7]. Для присутніх жорсткостей C_{ij}^*, B_{ij}^*, B_{ij}' маємо такі вирази:

$$C_{11}^* = C_{11} - HB_{11} + 2\sqrt{E}\,\frac{1}{R_1}D_{11}, \quad C_{22}^* = C_{22} - HB_{22} + 2\sqrt{E}\,\frac{1}{R_2}D_{22},$$

$$C_{12}^* = C_{12} - 2HB_{12}, \quad C_{66}^* = C_{66} - 2HB_{66} + (4E + \kappa)D_{66},$$

$$C_{16}^* = C_{16} - HB_{16} + 2\sqrt{E}\,\frac{1}{R_1}D_{11}, \quad C_{26}^* = C_{26} - HB_{26} + 2\sqrt{E}\,\frac{1}{R_2}D_{22},$$

$$B_{11}^* = B_{11} + 2\sqrt{E}D_{11}, \quad B_{12}^* = B_{12}, \quad B_{22}^* = B_{22} - 2\sqrt{E}D_{22},$$

$$B_{16}^* = B_{16} + \sqrt{E}D_{16}, \quad B_{26}^* = B_{26} - \sqrt{E}D_{26}, \quad B_{16}' = B_{16} + \frac{1}{R_1}D_{16},$$

$$B_{26}' = B_{26} + \frac{1}{R_2}D_{26}, \quad B_{66}^* = B_{26} + HD_{26}. \tag{3}$$

У них використані відомі з диференціальної геометрії позначення:

$H=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)$ – середня кривина, $k=\dfrac{1}{R_1R_2}$ – гаус сова кривина, $E=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)^2$ – ейлерова різниця поверхні.

Співвідношення закону Гука для анізотропного матеріалу з однією площиною симетрії мають вигляд [5]:

$$\sigma_{11}=a_{11}\varepsilon_{11}+a_{12}\varepsilon_{22}+a_{13}\varepsilon_{33}+a_{16}\varepsilon_{12}, \qquad \sigma_{22}=a_{12}\varepsilon_{11}+a_{22}\varepsilon_{22}+a_{23}\varepsilon_{33}+a_{26}\varepsilon_{12},$$
$$\sigma_{33}=a_{13}\varepsilon_{11}+a_{23}\varepsilon_{22}+a_{33}\varepsilon_{33}+a_{36}\varepsilon_{12}, \qquad \sigma_{23}=a_{44}\varepsilon_{23}+a_{45}\varepsilon_{13},$$
$$\sigma_{13}=a_{45}\varepsilon_{23}+a_{55}\varepsilon_{13}, \qquad \sigma_{12}=a_{16}\varepsilon_{11}+a_{26}\varepsilon_{22}+a_{36}\varepsilon_{33}+a_{66}\varepsilon_{12}. \tag{4}$$

Для деформацій з точністю до квадратичних членів в [4] отримано:

$$\varepsilon_{11}=\widehat{\varepsilon}_{11}+z\kappa_{11}+z^2\nu_{11},\ \varepsilon_{22}=\widehat{\varepsilon}_{22}+z\kappa_{22}+z^2\nu_{22},\ \varepsilon_{12}=\widehat{\varepsilon}_{12}+z\kappa_{12}+z^2\nu_{12}, \tag{5}$$

де

$$\widehat{\varepsilon}_{11}=\varepsilon_1+\frac{1}{2}\theta_1^2,\quad \widehat{\varepsilon}_{22}=\varepsilon_2+\frac{1}{2}\theta_2^2,\quad \widehat{\varepsilon}_{12}=\theta_1\theta_2,$$
$$\kappa_{11}=\chi_1+\varepsilon_1\chi_1+\theta_1\chi_{13},\quad \kappa_{22}=\chi_2+\varepsilon_2\chi_2+\theta_2\chi_{23},\quad \kappa_{12}=\tau_1^*+\tau_2^*, \tag{6}$$
$$\nu_{11}=\frac{1}{R_1}\kappa_{11}+\frac{1}{2}\left(\chi_1^2+\tau_1^2+\chi_{13}^2\right),\ \nu_{22}=\frac{1}{R_2}\kappa_{22}+\frac{1}{2}\left(\chi_2^2+\tau_2^2+\chi_{23}^2\right),$$
$$\nu_{12}=\frac{1}{R_1}\tau_1^*+\frac{1}{R_1}\tau_2^*+\chi_1\tau_2+\chi_{13}\chi_{23},$$

$$\chi_1=\kappa_1+\frac{\varepsilon_1}{R_1},\quad \chi_2=\kappa_2+\frac{\varepsilon_2}{R_2},\quad \tau_1=t_1,\quad \tau_2=t_2,\quad \tau_1^*=\tau_1+\varepsilon_2\tau_1+\theta_2\chi_{13},$$
$$\tau_2^*=\tau_2+\varepsilon_1\tau_2+\theta_1\chi_{23},\quad \chi_{13}=\kappa_{13}+\frac{1}{R_1}\theta_1',\quad \chi_{23}=\kappa_{23}+\frac{1}{R_2}\theta_2'. \tag{7}$$

Деформації та прирости кривин і кручення такі:

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_1=\frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+a_1v-\frac{w}{R_1},\quad \varepsilon_{22}=\varepsilon_2=\frac{1}{A_2}\frac{\partial v}{\partial\alpha_2}+a_2v-\frac{w}{R_2},\quad \varepsilon_{12}=\theta_1'+\theta_2',$$

$$\kappa_{11}=\kappa_1+\frac{\varepsilon_1}{R_1},\quad \kappa_1=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\theta_1'}{\partial\alpha_1}+a_1\theta_1'-\frac{\theta_2'}{R_1},\quad \kappa_{22}=\kappa_2+\frac{\varepsilon_2}{R_2},\quad \kappa_2=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\theta_1'}{\partial\alpha_2}+a_2\theta-\frac{\theta_2'}{R_2},$$

$$\kappa_{12}=t_1+t_2,\quad t_1=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha_1}-a_1\theta_1,\quad t_2=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha_2}-a_2\theta_2,$$

$$\nu_{11}=\frac{1}{R_1}\kappa_{11},\quad \nu_{22}=\frac{1}{R_2}\kappa_{22},\quad \nu_{12}=\frac{1}{R_1}\tau_1+\frac{1}{R_2}\tau_2. \tag{8}$$

В (8) використані позначення: $a_1=\dfrac{1}{A_1A_2}\dfrac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}$, $a_2=\dfrac{1}{A_1A_2}\dfrac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}$.

Кути повороту та залежності для кривин і кручення κ_{ij} мають вид:

$$\theta_1'=\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+\frac{u}{R_1},\quad \theta_2'=\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}+\frac{u}{R_2}. \tag{9}$$

$$\kappa_{11}=\kappa_1+\frac{1}{R_1}\varepsilon_{11},\quad \kappa_{22}=\kappa_2+\frac{1}{R_2}\varepsilon_{22},\quad \kappa_{12}=2\tau+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\varepsilon_{12}. \tag{10}$$

У виразі кручення κ_{12} маємо нову функцію τ, а також ν_{ij}

$$t_1=t_2=\tau,\quad \nu_{11}=\frac{1}{R_1}\kappa_{11},\quad \nu_{22}=\frac{1}{R_2}\kappa_{22},\quad \nu_{12}=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\tau. \tag{11}$$

Згідно [1, 2] потенціалу у вигляді (2) достатньо для побудови канонічної системи рівнянь нелінійної теорії оболонок при використанні перетворень Лагранжа та побудови варіаційного принципу типу Рейсснера, що буде розглянуто нижче.

За використанням виразу потенціальної енергії (2) виконаємо перетворення Лежандра згідно загальної схеми. Введемо нові змінні:

$$T_{11}=\frac{\partial V'}{\partial \varepsilon_{11}}=C_{11}^{*}\varepsilon_{11}+C_{12}^{*}\varepsilon_{22}+C_{16}^{*}\varepsilon_{12}+B_{11}^{*}\kappa_{11}+B_{12}\kappa_{22}+B_{16}^{*}\kappa_{12},$$

$$T_{22}=\frac{\partial V'}{\partial \varepsilon_{22}}=C_{12}^{*}\varepsilon_{11}+C_{22}^{*}\varepsilon_{22}+C_{26}^{*}\varepsilon_{12}+B_{12}\kappa_{11}+B_{22}^{*}\kappa_{22}+B_{26}^{*}\kappa_{12},$$

$$T_{12}=\frac{\partial V'}{\partial \varepsilon_{12}}=C_{16}^{*}\varepsilon_{11}+C_{26}^{*}\varepsilon_{22}+C_{66}^{*}\varepsilon_{12}+B_{16}''\kappa_{11}+B_{26}'\kappa_{22}+B_{66}^{*}\kappa_{12},$$

$$M_{11}=\frac{\partial V'}{\partial \kappa_{1}}=B_{11}^{*}\varepsilon_{11}+B_{12}\varepsilon_{22}+B_{16}'\varepsilon_{12}+D_{11}\kappa_{11}+D_{12}\kappa_{22}+D_{16}\kappa_{12},$$

$$M_{22}=\frac{\partial V'}{\partial \kappa_{2}}=B_{12}\varepsilon_{11}+B_{22}^{*}\varepsilon_{22}+B_{26}'\varepsilon_{12}+D_{12}\kappa_{11}+D_{22}\kappa_{22}+D_{26}\kappa_{12},$$

$$M_{12}=\frac{\partial V'}{\partial \kappa_{12}}=B_{16}^{*}\varepsilon_{11}+B_{26}^{*}\varepsilon_{22}+B_{66}^{*}\varepsilon_{12}+D_{16}\kappa_{11}+D_{26}\kappa_{22}+D_{66}\kappa_{12},$$

$$Q_{13}=\frac{\partial V'}{\partial \varepsilon_{13}}=C_{45}^{*}\varepsilon_{23}+2C_{55}^{*}\varepsilon_{13},\quad Q_{23}=\frac{\partial V'}{\partial \varepsilon_{23}}=2C_{44}^{*}\varepsilon_{23}+C_{45}^{*}\varepsilon_{13}, \tag{12}$$

Тут T_{ij}, Q_{ij}, M_{ij} – зусилля та моменти, що діють в перерізах оболонки.

Введемо нову гамільтонову функцію

$$H_q=T_{11}\varepsilon_{11}+T_{22}\varepsilon_{22}+T_{12}\varepsilon_{12}+M_{11}\kappa_{11}+M_{22}\kappa_{22}+M_{12}\kappa_{12}+Q_{23}\varepsilon_{23}+Q_{13}\varepsilon_{13}-V. \tag{13}$$

Вираз потенціальної енергії (2) в згорнутій матричній формі такий

$$V(\varepsilon,\chi)=\iint V'(\varepsilon,\chi)A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2, \tag{14}$$

де $V'(\varepsilon,\chi)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{T}C\varepsilon+2\varepsilon^{T}B\chi+\chi^{T}D\chi\right)$.

За використанням (13), (14) отримаємо інтеграл дії, що являє собою функціонал Рейсснера

$$\Pi_R=\iint\left[T^{T}\varepsilon(u)+M^{T}\chi(u)+T_{13}\theta_1(u)+T_{23}\theta_2(u)-H_q\right]A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2-A. \tag{15}$$

Інтеграл у виразі (15) хоча є іншою формою запису функціоналу потенціальної енергії, але він має екстремальні властивості. Різниця в тому, що в ньому незалежно варіюються як переміщення, так і зусилля. Принцип Рейсснера у вигляді (15) дозволяє отримати канонічну систему рівнянь, яка складена із рівнянь рівноваги, стану та відповідним їм граничних умов.

Розв'язок задачі НДС анізотропних оболонок додатної та відємної гауссових кривин проведемо за використанням методу дискретної ортогоналізації [13]. Для отримання відповідних розв'язувальних рівнянь теорії анізотропних оболонок скористаємось частинним варіаційним принципом. Виконаємо перетворення Лежандра, ввівши нові змінні:

$$T_{11}=\frac{\partial V'}{\partial \varepsilon_{11}},\quad T_{12}=\frac{\partial V'}{\partial \varepsilon_{12}},\quad M_{11}=\frac{\partial V'}{\partial \kappa_{11}},\quad Q_{13}=\frac{\partial V'}{\partial \varepsilon_{13}}. \tag{16}$$

Функцію $V'(\varepsilon,\chi)$ запишемо за допомогою матриць. Маємо

$$V'(\varepsilon,\chi)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{12}^{T} & H_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left[\varepsilon_1^{T}H_{11}\varepsilon_1+2\varepsilon_1^{T}H_{12}\varepsilon_2+\varepsilon_2^{T}H_{22}\varepsilon_2\right]. \tag{17}$$

В (17) введені наступні матричні позначення:

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ k_{11} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{22} \\ k_{22} \\ k_{12} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix},$$

$$H_{11} = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{16}^* & B_{11}^* & 0 \\ C_{16}^* & C_{66}^* & B_{16}^{'} & 0 \\ B_{11}^* & B_{16}^{'} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{55}^* \end{bmatrix}, \; H_{12} = \begin{bmatrix} C_{12}^* & B_{12} & B_{16}^* & 0 \\ C_{26}^* & B_{26}^{'} & B_{66}^* & 0 \\ B_{12} & D_{12} & D_{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45}^* \end{bmatrix}, \; H_{22} = \begin{bmatrix} C_{12}^* & B_{22}^* & B_{26}^* & 0 \\ B_{12}^* & D_{22} & D_{26} & 0 \\ B_{26}^* & D_{26} & D_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{44}^* \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Із співвідношення

$$T_1 = H_{11}\varepsilon_1 + H_{12}\varepsilon_2 \quad (19)$$

знаходимо

$$\varepsilon_1 = H_{11}^{-1}T_1 - H_{11}^{-1}H_{12}\varepsilon_2. \quad (20)$$

Підставивши значення для ε_1 в (17) отримаємо

$$V'(\varepsilon,\chi) = \frac{1}{2}\left[T_1^T H_{11}^{-1} T_1 + \varepsilon_2^T (H_{22} - H_{12}^T H_{11}^{-1} H_{12})\varepsilon_2\right]. \quad (21)$$

Утворимо нову функцію

$$H_q = T_1^T \varepsilon_1 - V'(\varepsilon,\chi). \quad (22)$$

При урахуванні ε_1 одержимо функцію Гамільтона

$$H_q = \frac{1}{2}\left[T_1^T H_{11}^{-1} T_1 - 2T_1^T H_{11}^{-1} H_{12}\varepsilon_2 - \varepsilon_2^T \left(H_{22} - H_{12}^T H_{11}^{-1} H_{12}\right)\varepsilon_2\right]. \quad (23)$$

У відповідності до методу Гамільтона створимо інтеграл дії

$$A_R = \iint\left[T_{11}\varepsilon_{11}(u) + T_{12}\varepsilon_{12}(u) + M_{11}\kappa_{11}(u) + T_{13}\theta_1(u) - H_q\right]A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - A. \quad (24)$$

де $\varepsilon_{ij}(u)$ – вирази відповідних деформацій (5), що записані через переміщення, T_{13} – множник Лагранжа, A – робота зовнішніх навантажень.

Знайдемо варіацію функціонала A_R

$$\begin{aligned} \delta A_R = \iint\Big[&\delta T_1^T \varepsilon_1(u) + T_1^T \delta\varepsilon_1(u) + \delta T_{13}\theta_1(u) + \delta T_{12}\varepsilon_{12}(u) + T_{12}\delta\varepsilon_{12}(u) + \\ &+ \delta M_{11}\kappa_{11}(u) + M_{11}\delta\kappa_{11}(u) + T_{13}\delta\theta_1(u) - \delta T_1^T (H_{11}^{-1}T_1 + H_{11}^{-1}H_{12}\varepsilon_2) - \\ &- \left(T_1^T H_{11}^{-1} H_{12} + \varepsilon_2^T\left(H_{22} - H_{21}H_{11}^{-1}H_{12}\right)\right)\delta\varepsilon_2\Big]A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \delta A. \end{aligned} \quad (25)$$

Варіацію роботи зовнішніх сил подамо у такому вигляді

$$\begin{aligned} \delta A = &\iint\left(q_1\delta u + q_2\delta v + q_3\delta w\right)A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \int_{\alpha_{2,0}}^{\alpha_{2,\kappa}}\left[T_{11}^0\delta u + \left(T_{12}^0 - \frac{M_{12}^0}{R_2}\right)\delta v + \right. \\ &\left. + \left(T_{13}^0 + \frac{\partial M_{12}^0}{\partial\alpha_2}\right)\delta w + M_{11}^0\delta\theta + Q_{13}\delta\theta_1\right]\Bigg|_{\alpha_{1,1}}^{\alpha_{1,\kappa}} A_2 d\alpha_2 + \int_{\alpha_{1,0}}^{\alpha_{1,\kappa}}\left[\left(T_{12}^0 - \frac{M_{12}^0}{R_1}\right)\delta u + \right. \\ &\left. + T_{22}^0\delta v + \left(T_{23}^0 + \frac{\partial M_{12}^0}{\partial\alpha_2}\right)\delta w - M_{22}^0\delta\theta_2(u) + Q_{23}\delta\theta_2\right]\Bigg|_{\alpha_{2,1}}^{\alpha_{2,\kappa}} A_1 d\alpha_1. \end{aligned} \quad (26)$$

Враховуючи, що сума робіт зовнішніх сил дорівнює нулю, а варіації зусиль, моментів і переміщень є довільними величинами, можна прирівняти до нуля варіації при них. Отримаємо 10 диференціальних рівнянь ІІ порядку, що описують геометрично-нелінійний НДС оболонок типу

Тимошенко, разом з відповідними їм граничними умовами. 5 рівнянь описують рівноважний стан, а інші 5 є рівняннями стану

$$\varepsilon_{11}(u) = h_{11}T_{11} + h_{12}T_{12} + h_{13}M_{11} + q_{11}\varepsilon_{22} + q_{12}\kappa_{22} + q_{13}\kappa_{12},$$
$$\varepsilon_{12}(u) = h_{21}T_{11} + h_{22}T_{12} + h_{23}M_{11} + q_{21}\varepsilon_{22} + q_{22}\kappa_{22} + q_{23}\kappa_{12},$$
$$\kappa_{11}(u) = h_{31}T_{11} + h_{32}T_{12} + h_{33}M_{11} + q_{31}\varepsilon_{22} + q_{32}\kappa_{22} + q_{33}\kappa_{12},$$
$$\varepsilon_{13}(u) = b_{44}Q_{13},\ \varepsilon_{23}(u) = \frac{1}{d_{44}}Q_{23},$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{11}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{22}^*}{\partial \alpha_2} + a_1\left(T_{12}^* + T_{21}^*\right) + a_2\left(T_{11}^* - T_{22}^*\right) - \frac{1}{R_1}T_{13}^* + q_1 = 0,$$
$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{12}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{22}^*}{\partial \alpha_2} + a_2\left(T_{12}^* + T_{21}^*\right) - a_1\left(T_{11}^* - T_{22}^*\right) - \frac{1}{R_2}T_{23}^* + q_2 = 0,$$
$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{13}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{23}^*}{\partial \alpha_2} + a_2T_{13}^* + a_1T_{23}^* + \frac{T_{11}^*}{R_1} + \frac{T_{22}^*}{R_2} + q_3 = 0,$$
$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2} + 2a_1M_{12} + a_2\left(M_{11} - M_{12}\right) - T_{13} = 0,$$
$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}M_{11} + Q_{23} = 0. \qquad (27)$$

Граничні умови формуються відносно однієї з величин з кожної пари

$$\left(T_{11}^*, u\right),\ \left(T_{12}^*, v\right),\ \left(T_{13}^*, w\right),\ \left(M_{11}, \theta_1\right),\ \left(Q_{13},\ \theta_1\right) \text{ при } \alpha_1 = const.$$

Отримана система рівнянь (27) є нелінійною. Вона разом з граничними умовами дозволяє отримувати параметри НДС анізотропних оболонок обертання середньої товщини. Подібна система рівнянь отримана в [3] для тонких оболонок. Їх відмінність – в двох рівняннях стану та наявності п’ятого рівняння рівноваги. Зазначені геометрично нелінійні неоднорідні диференціальні рівняння дозволяють враховувати в напруженому стані вплив поперечного зсуву за товщиною оболонки.

1. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек / Кильчевский Н.А. // – Киев: Изд-во АН УССР. – 1963. – С. 354.
2. Кильчевский Н.А. Аналитическая механика континуальних систем / Кильчевский Н.А., Кильчевская Г.А., Ткаченко Н.Е. // – К.: Наук. Думка, 1979. – С. 188.
3. Баженов В.А. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок / Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. // – К.: Каравела, 2010. – С. 352.
4. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости // Новожилов В.В. // – М.Л. ОГИЗ, 1948. – С. 211.
5. Лехницкий А.К. Теория упругости анизотропного тела // Лехницкий А.К. // – М.: Наука, 1977. – С. 416.
6. Ванин Г.А. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами / Ванин Г.А., Семенюк Н.П. // – К.: Наук. думка, 1987.—200 с.
7. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / Амбарцумян С.А. // – М.: Наука, 1974. – С. 448.
8. Семенюк Н.П. Уточненный вариант нелинейной теории оболочек типа Тимошенко и его приложение к расчету начального закритического поведений длинных цилиндрических оболочек / Семенюк Н.П. // Прикл. механика. – 1990. – 26, № 8. – С. 47-53.
9. Алфутов Н.А. Моделирование процессов деформирования волокнистых металлокомпозитов / Алфутов Н.А., Дымников И. А. // Композиционные материалы: Справочник // В.В.Васильев, В.Д.Протасов, В.В.Болотин и др.; Под общ. ред. В.В.Васильева, Ю.М.Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – С. 512.

10. Трач В.М. Потенціальна енергія пружних анізотропних нетонких оболонок // Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М. // Збірник "Наукові нотатки". – ЛНТУ, Луцьк. – 2011. – С. 272-276.
11. Кармишин А.В. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. // – М.: Машиностроение, 1975. – С. 376.
12. Григоренко Я.М. Численное решение задач осесимметричной деформации слоистых анизотропных оболочек вращения / Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Крюков Н.Н. // Механика композитных материалов. – 1983. – №6. – С. 1023-1028.
13. Григоренко Я.М. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами / Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. – К., Наук. думка, 1988. – С. 264.
14. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс / Королев В.И. // – М.: Машгиз, 1965. – С. 272.
15. Григолюк Э.И. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин / Григолюк Э.И., Куликов Г.М. // М.: Машиностроение, 1988. – С. 288.