

УДК 539.3

В.В. Кот

Рівненський державний гуманітарний університет

ПЕРЕДАЧА ЗОСЕРЕДЖЕНИХ МОМЕНТІВ ДО КОНТУРУ ЕЛІПТИЧНОГО ОТВОРУ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ СИСТЕМОЮ РОЗІМКНЕНИХ ПРУЖНИХ РЕБЕР

Побудовано математичну модель задачі про передачу зосередженого моментного навантаження від системи двох розіМКнених пружних ребер до контуру еліптичного отвору нескінченної ортотропної пластинки. Наближений розв'язок системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь задачі здійснено методом механічних квадратур і колокації. Розглянуто числовий приклад.

Ключові слова: пружне ребро, нескінченна пластинка, моментне навантаження, напружено-деформований стан.

Вступ. В сучасному судно-авіабудуванні та будівництві широко використовуються пластинчасті деталі, послаблені конструктивними чи технологічними отворами. При згині таких деталей на контурі отвору виникають зони з небезпечно високою концентрацією напружень. Для її зменшення контури отворів підсилюють тонкими пружними ребрами змінного або сталого поперечного перерізу. Численні дослідження засвідчують, що найбільш вигідним з точки зору зменшення матеріаломісткості деталі є використання часткового підсилення [1-4].

Підсилювальні ребра, будучи розсіювачами концентрації напружень на контурі отвору, дозволяють передавати до нього зосереджене моментне навантаження. Такі задачі для несиметричних відносно середньої площини пластинки ребер при відсутності у них жорсткості на кручення розглянуті в [5-6].

Проблема передачі зосередженого моментного навантаження до контуру криволінійного отвору нескінченної ізотропної пластинки через одне розіМКнене пружне ребро змінної жорсткості на згин та кручення досліджується в [7]. Для ортотропної пластинки з еліптичним отвором такі задачі не розглядалися.

Постановка задачі. Розглянемо нескінченну ортотропну пластину товщиною $2h$ з еліптичним отвором, контур якого L на проміжках $L_1 = [\alpha_0^*, \beta_0^*]$ і $L_2 = [\alpha_1^* + \pi, \beta_1^* + \pi]$ підсилено тонкими пружними ребрами, що чинять опір згину та крученню. Систему прямокутних (x, y) і полярних (r, δ) координат в середній площині пластинки з полюсом у центрі отвору оберемо так, щоб вісь Ox і полярна вісь співпадали між собою та віссю еліпса. Вважатимемо, що головні напрямки ортотропії матеріалу пластинки мають напрямки координатних осей. До торців підсилень, які визначаються полярними кутами $\alpha_0^*, \pi + \alpha_1^*$, прикладені зосереджені пари сил з компонентами $(L_\rho^0, L_\lambda^0), (\tilde{L}_\rho^0, \tilde{L}_\lambda^0)$ відповідно. Тут $L_\rho^0, \tilde{L}_\rho^0$ - згинальні і $L_\lambda^0, \tilde{L}_\lambda^0$ - крутні моменти. Зовнішнє навантаження на пластинку відсутнє.

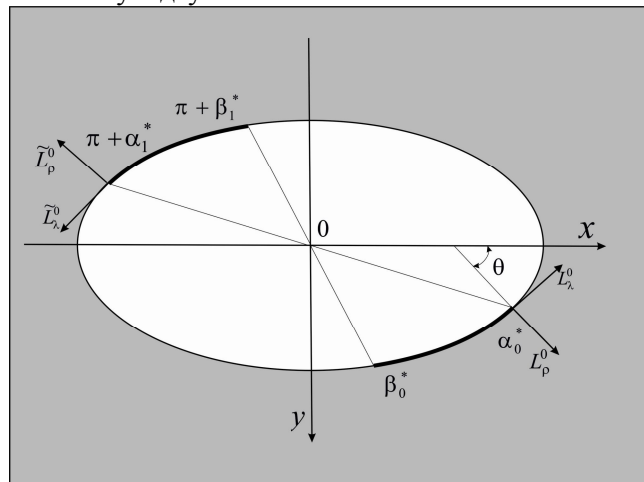


Рис. 1. Розрахункова схема пластинки

Розв'язок задачі полягає у визначенні контактних моментів M_ρ , P в зонах підсилення та кільцевих M_λ і крутних $H_{\rho\lambda}$ моментів на контурі отвору, а також моментних напружень в підсиленнях.

Основні рівняння задачі. Нехай функція

$$z = \omega(\xi) = x + iy = \frac{a+b}{2}\xi + \frac{a-b}{2\xi}, \quad (1)$$

(a, b - півосі еліпса) здійснює конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола γ у площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка.

Моделюючи підсилення тонкими пружними лініями, наділеними жорсткостями на згин $g_1(s)$ та кручення $g_2(s)$, граничні умови задачі на підставі [4] для кожної з ділянок підсилення запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1^0} \left\{ (f_2^0(t) + M_y)[R_2^2(t) + \frac{g_1^0}{g_2^0} R_1^2(t)] + \right. \\ &\quad \left. + (f_1^0(t) + M_x)R_1(t)R_2(t) \left(1 - \frac{g_1}{g_2}\right) \right\} dt + c_1; \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ (f_2(t) + M_y)R_1(t)R_2(t) \left(\frac{g_1}{g_2} - 1\right) - \right. \\ &\quad \left. - (f_1(t) + M_x)[R_1^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_2^2(t)] \right\} dt + c_2, \\ &\quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \cup [\pi + \alpha_1; \pi + \beta_1], \end{aligned} \quad (2)$$

де $f_1 + if_2 = i \int_{\alpha_0}^{\lambda} \{M_\rho^* + iP^*\} e^{it} dt = \begin{cases} f_1^0 + if_2^0, \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \\ \tilde{f}_1 + i\tilde{f}_2, \lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi] \end{cases}$; c_1, c_2 - дійсні сталі;

$$M_x + iM_y = \begin{cases} M_x^* + iM_y^*, \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \\ \tilde{M}_x + i\tilde{M}_y, \lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi] \end{cases} = \begin{cases} (L_\rho^0 - iL_\lambda^0)e^{i\theta_0}, \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \\ (\tilde{L}_\rho^0 - i\tilde{L}_\lambda^0)e^{i\theta_1}, \lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi] \end{cases}; \quad R_1 + iR_2 = e^{i\theta};$$

$$g_1 + ig_2 = \begin{cases} g_1^0 + ig_2^0, \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \\ \tilde{g}_1 + i\tilde{g}_2, \lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi] \end{cases}; \quad M_\rho^* + iP^* = (M_\rho + iP)\omega'(\sigma); \quad [\alpha_0; \beta_0] \cup [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi] -$$

образ ділянки $[\alpha_0^*; \beta_0^*] \cup [\alpha_1^* + \pi; \beta_1^* + \pi]$ при відображенні (1); θ - кут між нормаллю до L і додатнім напрямом осі Ox . Решту позначень наведено в [8].

Компоненти кута повороту нормалі до середньої площини пластинки в контурних точках мають вигляд [8] і після певних перетворень запишуться так

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{k}{\Delta} \left\{ (\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x)f_1(\lambda) - \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2^0(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt - \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x}{2\pi} \hat{M}_x \lambda - \tilde{C}_1 (a(\beta_{11} + \beta_{22}) + b(\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x)) \sin \lambda + \hat{C}_1 \right\}; \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{k}{\Delta} \left\{ (\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x)f_2(\lambda) - \frac{(\beta_{11} + \beta_{22})}{\pi} \beta_{11}\beta_{22} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^0(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt + \frac{\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x}{2\pi} \hat{M}_y \lambda + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{\pi} \beta_{11}\beta_{22} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} + \tilde{C}_1 (a(\beta_{11}\beta_{22} + \nu_x) + b\beta_{11}\beta_{22}(\beta_{11} + \beta_{22})) \cos \lambda + \hat{C}_2 \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \tilde{C}_1$ - дійсні сталі; $\hat{M}_x = M_x^* + \tilde{M}_x$; $\hat{M}_y = M_y^* + \tilde{M}_y$; $\tilde{t} = t - \pi$; $\tilde{\Delta} = \beta_{11}\beta_{22}(\beta_{11} + \beta_{22})^2 - (\beta_{11}\beta_{22} + v_x)$; $\tilde{\Delta}_1 = (\beta_{11} + \beta_{22})(\beta_{11}\beta_{22} - v_x)(\beta_{11}\beta_{22} + v_x)$; $\tilde{\Delta}_2 = (\beta_{11}^2 - v_x)(\beta_{22}^2 - v_x)$; $k = \frac{\beta_{11}\beta_{22}}{D_{11}}$; $D_{11} = \frac{2E_x h^3}{3(1 - \nu_x \nu_y)}$ - циліндрична жорсткість пластини в напрямку ос Ox ; β_{11}, β_{22} - корені характеристичного рівняння [9]; E_x, E_y, ν_x, ν_y - модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона матеріалу пластинки в напрямках осей Ox та Oy .

Підставивши (3) у граничні умови (2), отримуємо систему інтегро-диференціальних рівнянь для визначення шуканих функцій $f_1^0, f_2^0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2$.

$$\begin{aligned}
 & (\beta_{11}\beta_{22} + v_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1^0(t) dt - \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2^0(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt - \\
 & - \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} + \frac{\beta_{11}\beta_{22} + v_x}{2\pi} \hat{M}_x \lambda - \tilde{C}_1 (a(\beta_{11} + \beta_{22}) + b(\beta_{11}\beta_{22} + v_x)) \sin \lambda + \tilde{C}_1 = \\
 & = \int_{\beta_0}^{\lambda} N(t) \left\{ (f_2^0(t) + M_y^*) [R_2^2(t) + \frac{g_1^0}{g_2^0} R_1^2(t)] + (f_1^0(t) + M_x^*) R_1(t) R_2(t) \left(1 - \frac{g_1^0}{g_1^0} \right) \right\} dt; \\
 & (\beta_{11}\beta_{22} + v_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2^0(t) dt + \frac{(\beta_{11} + \beta_{22})}{\pi} \beta_{11}\beta_{22} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^0(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt + \\
 & + \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{\pi} \beta_{11}\beta_{22} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} + \frac{\beta_{11}\beta_{22} + v_x}{2\pi} \hat{M}_y \lambda + \tilde{C}_1 (a(\beta_{11}\beta_{22} + v_x) + \\
 & + b\beta_{11}\beta_{22}(\beta_{11} + \beta_{22})) \cos \lambda + \tilde{C}_2 = \int_{\beta_0}^{\lambda} N(t) \left\{ (f_2^0(t) + \right. \\
 & \left. + M_y^*) R_1(t) R_2(t) \left(\frac{g_1^0}{g_2^0} - 1 \right) - (f_1^0(t) + M_x^*) [R_1^2(t) + \frac{g_1^0}{g_1^0} R_2^2(t)] \right\} dt; \\
 & \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]; \\
 & (\beta_{11}\beta_{22} + v_x) \int_{\alpha_1}^{\tilde{\lambda}} \tilde{f}_1(\tilde{t}) d\tilde{t} - \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2^0(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda} - t}{2} dt - \\
 & - \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} + \frac{\beta_{11}\beta_{22} + v_x}{2\pi} \hat{M}_x \lambda - \tilde{C}_1 (a(\beta_{11} + \beta_{22}) + \\
 & + b(\beta_{11}\beta_{22} + v_x)) \sin \lambda + \tilde{C}_3 = \int_{\beta_1}^{\tilde{\lambda}} N(\tilde{t} + \pi) \left\{ (\tilde{f}_2(\tilde{t}) + \tilde{M}_y) R_1(\tilde{t} + \pi) R_2(\tilde{t} + \pi) \times \right. \\
 & \left. \times \left(\frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} - 1 \right) - (\tilde{f}_1(\tilde{t}) + \tilde{M}_x) [R_2^2(\tilde{t} + \pi) + \frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} R_1^2(\tilde{t} + \pi)] \right\} d\tilde{t}; \\
 & (\beta_{11}\beta_{22} + v_x) \int_{\alpha_1}^{\tilde{\lambda}} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) d\tilde{t} + \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{\pi} \beta_{11}\beta_{22} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^0(t) \ln \cos \frac{\tilde{\lambda} - t}{2} dt + \\
 & + \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{\pi} \beta_{11}\beta_{22} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} d\tilde{t} + \frac{\beta_{11}\beta_{22} + v_x}{2\pi} \hat{M}_y \lambda + \tilde{C}_1 (a(\beta_{11}\beta_{22} + v_x) + \\
 & + b\beta_{11}\beta_{22}(\beta_{11} + \beta_{22})) \cos \lambda + \tilde{C}_4 = \int_{\beta_1}^{\tilde{\lambda}} N(\tilde{t} + \pi) \left\{ (\tilde{f}_2(\tilde{t}) + \tilde{M}_y) \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\times R_1(\tilde{t} + \pi)R_2(\tilde{t} + \pi) \left(\frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} - 1 \right) - (\tilde{f}_1(\tilde{t}) + \tilde{M}_x) [R_1^2(\tilde{t} + \pi) + \frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} R_2^2(\tilde{t} + \pi)] \Big\} d\tilde{t};$$

$$\lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi], \tilde{\lambda} \in [\alpha_1; \beta_1],$$

де $\check{C}_1 = \hat{C}_1 - c_1, \quad \check{C}_2 = \hat{C}_2 - c_2, \quad \check{C}_3 = \hat{C}_1 - c_1 + (\beta_1\beta_2 + \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^{0'}(t) dt;$

$$\check{C}_4 = \hat{C}_2 - c_2 + (\beta_1\beta_2 + \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2^{0'}(t) dt; \quad N(t) = \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)} \tilde{\Delta}}{g_1 k}.$$

Систему (4) доповнюємо умовами рівноваги підсилень [7]

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^{0'}(t) dt = -M_x^*, \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2^{0'}(t) dt = -M_y^*, \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1'(t) dt = -\tilde{M}_x, \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2'(t) dt = -\tilde{M}_y, \quad (5)$$

умовою однозначності прогину пластинки [8]

$$-b_1 \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} [-f_1'(t) \cos t + f_2'(t) \sin t] dt - b_2 \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} [f_1'(t) \cos t + f_2'(t) \sin t] dt + (\varepsilon b_1 + b_2) \check{C}_1 = 0 \quad (6)$$

$$b_1 = (\beta_1 + \beta_2)(1 - \beta_1\beta_2) + \varepsilon[(\beta_1 + \beta_2)(1 - \beta_1\beta_2) - 2(\beta_1\beta_2 + \nu_x)];$$

$$b_2 = (\beta_1 + \beta_2)(1 - \beta_1\beta_2)\varepsilon + (\beta_1 + \beta_2)(1 - \beta_1\beta_2) + 2(\beta_1\beta_2 + \nu_x),$$

та умовами зв'язку між функціями f_1^0, f_2^0 і $\tilde{f}_1', \tilde{f}_2'$

$$f_1^0(\lambda) - \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1^{0'}(t) dt = 0, \quad f_2^0(\lambda) - \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2^{0'}(t) dt = 0, \quad (7)$$

$$\tilde{f}_1(\lambda) - \int_{\alpha_0}^{\lambda} \tilde{f}_1'(t) dt = 0, \quad \tilde{f}_2(\lambda) - \int_{\alpha_0}^{\lambda} \tilde{f}_2'(t) dt = 0.$$

Контактні напруження на ділянках підсилення з функціями f_1^0, f_2^0 і $\tilde{f}_1', \tilde{f}_2'$ зв'язані співвідношеннями

$$M_{\rho}^0 + iP^0 = \frac{(f_2^0 - if_1^0)\alpha + (f_1^0 - if_2^0)\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-i\lambda}, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]; \quad (8)$$

$$\tilde{M}_{\rho} + i\tilde{P} = \frac{(\tilde{f}_2' - i\tilde{f}_1')\alpha + (\tilde{f}_1' - i\tilde{f}_2')\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-i\lambda}, \quad \lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi].$$

Кільцеві і крутні моменти на контурі L визначаються за формулами [2].

Внутрішні згинальні L_{ρ} і крутні L_{λ} моменти у підсиленнях знаходимо за формулами [8]

$$L_{\rho} = \frac{g_1}{D(1-\nu^2)} (M_{\lambda} - \nu M_{\rho}); \quad L_{\lambda} = \frac{g_2}{D(1-\nu)} H_{\rho\lambda}. \quad (9)$$

Якщо в (4)-(7) покласти $\beta_{11} = \beta_{22} = 1$, то одержимо систему рівнянь для нескінченної ізотропної пластинки з частково підкріпленим еліптичним контуром.

Наближений розв'язок задачі. Система (4)-(7) має таку ж структуру, що й відповідна система для ізотропної пластинки [7]. Виходячи з цього її розв'язання буде здійснюватися за

1. Сяський, А. Основні інтегральні співвідношення в технічній теорії згину пластин з отворами [Текст]/ А. Сяський, С. Гаврюсов // Вісник Тернопільського державного технічного університету. 2006. Т. 11, №1. – С. 12-17.
2. Сяський, А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием [Текст] / Сяський А.А. // Прикл. математика и механика. – 1986. Т. 50, №2. – С. 247-254.
3. Сяський, А.А. Изгиб анизотропных пластин с криволинейными ребрами жесткости / А. А. Сяський – Ровно, 1988. – 14с. – Деп. в УкрНИИТИ 19.01.1989, №352-Ук 89.
4. Сяський, А. Напружений стан пластинки з частково підсиленим криволінійним контуром при її циліндричному згині /А. Сяський, В. Кот // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2011. – Т.16, №2. – С. 30-36.
5. Сяський, А.О. Передача сил до масивних циліндричних тіл через несиметричні розімкнені ребра змінної жорсткості / А. О. Сяський, Н. В. Шевцова // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник за напрямком «Інженерна механіка». – Луцьк, 2008. – Випуск 23. С. 345 -351.
6. Шевцова, Н. Передача сил і пар сил до циліндричних тіл через систему несиметричних тонкостінних елементів змінної жорсткості / Н. Шевцова, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2008. – Т. 13, №3. – С. 15-20.
7. Сяський, А. О. Про передачу моментного навантаження до пластинки з криволінійним отвором пружним ребром / А. Сяський, В. Кот, К. Музичук // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Т. 19. №5. Механіка. – 2011. – Вип. 15. Т. 2. С. 234 – 239.
8. Сяський, А. Розрахунок згинальних напружень в ортотропній пластинці з частково підсиленим еліптичним контуром /А. Сяський, В. Кот, К. Музичук // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2011. – Т.16, №3. – С. 26-32.
9. Лехницький, С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницький. – М.: Гостехиздат, 1957. – 64 с.