

УДК 393.3

В.С. Попович, В.В. Янішевський

КВАЗИСТАТИЧНІ ТЕРМОНАПРУЖЕННЯ В ТОНКОМУ ТЕРМОЧУТЛИВОМУ ДИСКУ

На прикладі визначення температурного поля в тонкому термочутливому диску, через поверхні якого здійснюється конвективний теплообмін з середовищами сталої температури апробовано метод лінеаризувальних параметрів знаходження температурних полів у тонкостінних термочутливих елементах конструкцій. Визначено компоненти напружено-деформованого стану, спричиненого знайденим розподілом температури. Досліджено вплив термочутливості матеріалу на температурне поле та напруження.

Ключові слова: термочутливе тіло, тонкий диск, температурне поле, термонапружений стан, проста теплова нелінійність.

Форм. 57. Рис. 4. Літ. 14.

В.С. Попович, В.В. Янішевський

КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТОНКОМ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОМ ДИСКЕ

На примере определения температурного поля тонкого термочувствительного диска, через поверхности которого осуществляется конвективный теплообмен со средами постоянной температуры, апробирован метод линеаризующих параметров нахождения температурных полей в тонкостенных термочувствительных элементах конструкций. Определены компоненты напряженно-деформированного состояния, вызванного найденным распределением температуры. Исследовано влияние термочувствительности на температурное поле и напряжения.

Ключевые слова: термочувствительное тело, тонкий диск, температурное поле, термонапряженное состояние, простая тепловая нелинейность.

V. Popovych, V. Yanishevsky

QUASISTRATIC THERMAL STRESSES IN A THIN THERMOSENSITIVE DISC

By the example of determining a temperature field in a thin thermosensitive disk, with convective heat exchange condition at its surfaces with environments of constant temperature, the method of linearized parameters developed for determining the temperature field in thermosensitive thin-walled structure elements was tested. Also the stressed-strained state caused by the found temperature distribution was determined. An influence of thermosensitivity of material of the disc on temperature field and stresses was analyzed.

Keywords: thermosensitive body, thin disc, temperature field, thermostressed state, plain thermal non-linearity.

Вступ. При дослідженні термонапруженого стану елементів конструкцій, що піддаються впливу довколишніх середовищ зі змінними у широкому діапазоні температурами, у відповідних математичних моделях враховують залежність характеристик матеріалу від температури. Використання моделей термочутливого тіла за складного теплообміну (конвективного, променевого чи конвективно-променевого) істотно ускладнює знаходження як температурного розподілу так і термонапруженого стану тіла. У такому випадку задача термонапруженості є крайовою задачею для системи рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами і для знаходження її розв'язку використовують різні варіанти методу збурень чи зводять до розв'язання певних інтегральних рівнянь. Задача ж теплопровідності є нелінійною крайовою задачею. Її точний розв'язок можна знайти, коли на поверхні тіла задати температуру або тепловий потік за умови, що матеріал володіє т. зв. простою тепловою нелінійністю (коефіцієнт теплопровідності (КТ) λ_t і об'ємна теплоємність c_v залежать від температури, а їх відношення – коефіцієнт температуропровідності $a = \lambda_t / c_v$ неістотно і його можна вважати сталою величиною [5]). Для цього достатньо скористатись перетворенням Кірхгофа. У результаті отримуємо відповідну лінійну крайову задачу на змінну Кірхгофа, розв'язок якої можна знайти класичними методами (розділення змінних, інтегральних перетворень тощо). Однак, у випадку складного теплообміну перетворення Кірхгофа лінеаризує задачу теплопровідності лише частково. Для повної лінеаризації задачі пропонується ввести певні лінеаризувальні параметри (ЛП). Відтак отриману лінійну крайову задачу можна розв'язати, наприклад, операційним методом.

В даній праці, на прикладі задачі термонапруженості для тонкого кругового диска з конвективним теплообміном на його циліндричній та бокових поверхнях з середовищами сталих температур апробується один із варіантів методу ЛП визначення температурного поля термочутливого тіла, знаходиться і досліджується відповідний термонапружений стан.

Аналітико-числовий розв'язок задачі теплопровідності. Розглянемо віднесену до циліндричної системи координат \overline{rOz} термочутливу кругову пластину радіусу r_1 , товщина 2δ

якої мала порівняно з її іншим розміром (тонкий диск). Починаючи з часу $\tau = 0$ пластина, через поверхню $\bar{r} = r_1$ конвективно нагрівається (охолоджується) середовищем сталої температури t_1 . Через бокові поверхні $\bar{z} = \pm\delta$ — за законом Ньютона взаємодіє з середовищем сталої температури, значення якої дорівнює значенню початкової температури диска — t_p .

Математична модель для визначення нестационарного температурного поля такого диска має вигляд[5]:

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial \bar{z}} \right) = c_v(t) \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (1)$$

$$\left[\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial \bar{r}} + \alpha_1 (t - t_1) \right]_{\bar{r}=r_1} = 0, \quad (2)$$

$$\left[\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial \bar{r}} \right]_{\bar{r}=0} = 0, \quad (3)$$

$$\left[\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial \bar{z}} \pm \alpha_z (t - t_p) \right]_{\bar{z}=\pm\delta} = 0, \quad (4)$$

$$t|_{\tau=0} = t_p. \quad (5)$$

Тут $\lambda_t(t)$, $c_v(t)$ — залежні від температури КТ та об'ємна теплоємність матеріалу диска, які подамо у вигляді $\lambda_t(t) = \lambda_{t0} \lambda_t^*(T)$, $c_v(t) = c_{v0} c_v^*(T)$, де λ_{t0} і c_{v0} — опорні значення КТ та об'ємної теплоємності відповідно, $\lambda_t^*(T_p)$, $c_v^*(T_p)$ — функції, що описують залежність цих характеристик від безрозмірної температури $T = t / t_0$, причому $\lambda_t^*(T_p) = c_v^*(T_p) = 1$, t_0 — вибрана нами відлікова температура.

Оберемо за t_0 , більшу з температур t_p та t_1 , а за характерний розмір півтовщину пластини δ та введемо безрозмірні температури $(T_p, T_1) = (t_p, t_1) / t_0$ і координати $(r, z) = (\bar{r}, \bar{z}) / \delta$. У введених величинах задача (1)–(5) набуває вигляду:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\delta^2}{a_0} c_v^*(T) \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (6)$$

$$\left[\lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial r} + Bi_1 (T - T_1) \right]_{r=R_1} = 0, \quad (7)$$

$$\left[\lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r=0} = 0, \quad (8)$$

$$\left[\lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial z} \pm Bi_z (T - T_p) \right]_{z=\pm 1} = 0, \quad (9)$$

$$T|_{\tau=0} = T_p, \quad (10)$$

де $R_1 = r_1 / \delta$, a_0 — опорний коефіцієнт температуропровідності, а $Bi_1 = \alpha_1 \delta / \lambda_{t0}$ та $Bi_z = \alpha_z \delta / \lambda_{t0}$ — опорні критерії Біо.

Якщо ввести змінну Кірхгофа [5, 6, 10, 11]

$$\theta = \int_{T_p}^T \lambda_t^*(T') dT', \quad (11)$$

час Фур'є $Fo = a_0 \tau / \delta^2$ і вважати, що матеріал диска володіє простою тепловою нелінійністю, тобто $\lambda_t(T) / c_v(T) = (\lambda_{t0} / c_{v0}) [\lambda_t^*(T) / c_v^*(T)] \approx a_0$, то з задачі (6)–(10) отримаємо таку крайову задачу на змінну Кірхгофа θ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial Fo}, \quad (12)$$

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial r} + Bi_1 (T(\theta) - T_1) \right]_{r=R_1} = 0, \quad (13)$$

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial r} \right]_{r=0} = 0, \quad (14)$$

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial z} \pm Bi_z (T(\theta) - T_p) \right]_{z=\pm 1} = 0, \quad (15)$$

$$\theta|_{Fo=0} = 0. \quad (16)$$

Тут $T(\theta)$ — вираз температури через змінну Кірхгофа θ , який отримуємо внаслідок розв'язання рівняння (12) при конкретно заданій залежності $\lambda_t^*(T)$.

Враховуючи тонкість диска усереднимо розподіл змінної Кірхгофа по його товщині $\theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \theta dz$ (тут для усередненої змінної Кірхгофа збережено позначення θ), як це зроблено в праці [6] для змінної Кірхгофа, а у [7] для температури. Врахувавши симетричність задачі по координаті \bar{z} , матимемо:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - Bi_z \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 T(\theta) dz - T_p \right) = \frac{\partial \theta}{\partial Fo}, \quad (17)$$

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial r} \right]_{r=0} = 0, \quad (18)$$

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial r} + Bi_1 \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 T(\theta) dz - T_1 \right) \right]_{r=R_1} = 0, \quad (19)$$

$$\theta|_{Fo=0} = 0. \quad (20)$$

Відповідно до методу ЛП [5] подамо нелінійні вирази $T(\theta)$ у вигляді $T(\theta) = (1 + \kappa)\theta + T_p$. В результаті матимемо:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - Bi_z (1 + \kappa_z) \theta = \frac{\partial \theta}{\partial Fo}, \quad (21)$$

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial r} + Bi_1 \left((1 + \kappa_1) \theta - (T_1 - T_p) \right) \right]_{r=R_1} = 0, \quad (22)$$

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial r} \right]_{r=0} = 0, \quad (23)$$

$$\theta|_{Fo=0} = 0, \quad (24)$$

де κ_1, κ_z — введені невідомі ЛП.

Для побудови розв'язку лінійної крайової задачі (21)–(24) скористаємось перетворенням Лапласа [13] по часу Fo . У результаті отримаємо крайову задачу на трансформанту Лапласа змінної Кірхгофа

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\hat{\theta}}{dr} \right) - (Bi_z^* + s) \hat{\theta} = 0, \quad (25)$$

$$\left[\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} + Bi_1 \left((1 + \kappa_1) \hat{\theta} - (T_1 - T_p) / s \right) \right]_{r=R_1} = 0, \quad (26)$$

$$\left[\frac{d\hat{\theta}}{dr} \right]_{r=0} = 0, \quad (27)$$

де $Bi_z^* = Bi_z (1 + \kappa_z)$, $\hat{\theta} = \int_0^\infty \theta e^{-sFo} dFo$, s — параметр перетворення Лапласа.

Загальний розв'язок рівняння (25) має вигляд:

$$\hat{\theta} = A I_0 \left(r \sqrt{s + B i_z^*} \right) + B K_0 \left(r \sqrt{s + B i_z^*} \right), \quad (28)$$

де $I_0(\cdot), K_0(\cdot)$ — модифіковані функції Бесселя нульового порядку [3].

Умова (27) виконуватиметься, коли стала інтегрування $B = 0$. З умови (26) отримаємо рівняння для визначення сталої інтегрування A , з якого знаходимо, що

$$A = B i_1 (T_1 - T_p) \psi(s)^{-1},$$

де $\psi(s) = s \varphi(s)$, $\varphi(s) = \sqrt{s^*} I_1(R_1 \sqrt{s^*}) + B i_1^* I_0(R_1 \sqrt{s^*})$, $B i_1^* = B i_1 (1 + \kappa_1)$, $s^* = s + B i_z^*$.

В результаті вираз для зображення Лапласа змінної Кірхгофа набуває вигляду

$$\hat{\theta} = B i_1 (T_1 - T_p) I_0(r \sqrt{s^*}) \psi(s)^{-1}. \quad (29)$$

Згідно з формулою оберненого перетворення Лапласа [14]

$$\theta = \frac{B i_1 (T_1 - T_p)}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{I_0(r \sqrt{s^*})}{\psi(s)} e^{s F_0} ds. \quad (30)$$

Перейдемо в інтегралі формули (30) до змінної інтегрування $s^* = s + B i_z^*$. Тоді $s = s^* - B i_z^*$, $ds^* = ds$, а межі інтегрування не зміняться. В результаті

$$\theta = \frac{B i_1 (T_1 - T_p)}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} R(s^*) e^{(s^* - B i_z^*) F_0} ds^* = B i_1 (T_1 - T_p) e^{-B i_z^* F_0} \zeta(r, F_0),$$

де $\zeta(r, F_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} R(s) e^{s F_0} ds$ (тут змінна інтегрування s^* позначена s), $R(s) = \frac{\Phi(s, r)}{\psi(s)}$,

$\Phi(s, r) = I_0(r \sqrt{s})$, $\psi(s) = (s - B i_z^*) \varphi(s)$, $\varphi(s) = \sqrt{s} I_1(R_1 \sqrt{s}) + B i_1^* I_0(R_1 \sqrt{s})$.

Інтеграл $\zeta(r, F_0)$ є оберненим перетворенням Лапласа функції $R(s)$, яка є відношенням узагальнених поліномів, та задовольняє умови теореми розкладу Ващенко–Захарченко. Поліном знаменника містить лише прості корені. Для їх знаходження прівіряємо $\psi(s)$ до нуля. В результаті отримаємо корінь $s = B i_z^*$ та безліч коренів $s_n = -\mu_n^2$ виразу $\varphi(s) = 0$, де корені $\mu_n = i \sqrt{s_n}$ визначаємо з рівняння:

$$\varphi(\mu_n) = \mu_n I_1(-R_1 i \mu_n) + i B i_1^* I_0(-R_1 i \mu_n) = \mu_n J_1(R_1 \mu_n) + B i_1^* J_0(R_1 \mu_n) = 0.$$

Таким чином, відповідно до згаданої теореми розкладу інтеграл $\zeta(r, F_0)$ обчислюється за формулою:

$$\zeta(r, F_0) = \frac{\Phi(B i_z^*, r)}{\varphi(B i_z^*)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(\mu_n, r)}{\psi'(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 F_0}, \quad (31)$$

де штрихом позначена похідна по s .

Корені трансцендентного рівняння $\varphi(\mu_n) = 0$ знаходимо методом Ньютона.

Встановимо формули для обчислення значень виразів, що входять в формулу (31). Похідна характеристичного многочлена $\psi'(s) = \varphi(s) + (s - B i_z^*) \varphi'(s)$, де $\varphi'(s) = \frac{I_1(R_1 \sqrt{s})}{2\sqrt{s}} + \frac{R_1}{2} I_1'(R_1 \sqrt{s}) + \frac{B i_1^* R_1}{2\sqrt{s}} I_1(R_1 \sqrt{s}) = \left(\frac{B i_1^* R_1 + 1}{2\sqrt{s}} \right) I_1(R_1 \sqrt{s}) + \frac{R_1}{2} I_1'(R_1 \sqrt{s})$. Звідси бачимо, що при $s = B i_z^*$ похідна $\psi'(B i_z^*) = \varphi(B i_z^*)$, а при $s_n = -\mu_n^2$, вона обчислюється за формулою $\psi'(s_n) = \psi'(-\mu_n^2) = -(\mu_n^2 + B i_z^*) \varphi'(-\mu_n^2)$.

Для кореня $s = Bi_z^*$ отримаємо, що $\Phi(Bi_z^*, r) = I_0(r\sqrt{Bi_z^*})$, $\Psi'(Bi_z^*) = \varphi(Bi_z^*) = \sqrt{Bi_z^*} I_1(R_1\sqrt{Bi_z^*}) + Bi_z^* I_0(R_1\sqrt{Bi_z^*})$, а для коренів $s_n = -\mu_n^2$ значення $\Phi(\mu_n, r) = J_0(r\mu_n)$, а $\Psi'(\mu_n) = -(\mu_n^2 + Bi_z^*) \left[\frac{Bi_z^* R_1 + 1}{2\mu_n} J_1(R_1\mu_n) + \frac{R_1}{2} J_1'(R_1\mu_n) \right]$.

Якщо, наприклад, $\lambda_t^*(T) = 1 + k(T - T_p)$, то з виразу для змінної Кірхгофа матимемо, що температура T через змінну Кірхгофа θ виражається таким чином

$$T \equiv T(Fo, r, \kappa_1, \kappa_z) = k^{-1} \left(\sqrt{1 + 2k\theta(Fo, r, \kappa_1, \kappa_z)} - 1 \right) + T_p. \quad (32)$$

Параметри κ_1, κ_z підбираємо так, щоб з заданою точністю вираз змінної Кірхгофа (32) задовольняв рівняння (17) та умову (19). В результаті для їх визначення отримаємо таку систему трансцендентних рівнянь ($\theta \equiv \theta(Fo, r, \kappa_1, \kappa_z)$)

$$\begin{cases} k^{-1} \left(\sqrt{1 + 2k\theta} - 1 \right) = (1 + \kappa_z) \theta, \\ k^{-1} \left(\sqrt{1 + 2k\theta} - 1 \right) \Big|_{r=R_1} = (1 + \kappa_1) \theta \Big|_{r=R_1}. \end{cases} \quad (33)$$

Розв'язок даної системи рівнянь для кожного конкретного значення часу Fo та координати r знаходимо, використовуючи метод Ньютона, взявши за початкове наближення $\kappa_1 = \kappa_z = 0$.

Числовий розв'язок задачі теплопровідності. Для перевірки отриманого методом ЛП розв'язку крайової задачі (17)-(20) знайдемо її розв'язок повздовжнім варіантом методу прямих. Розіб'ємо відрізок $[0, R_1]$ на N частин з кроком h . Запишемо різницевий аналог другої похідної рівняння (17):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) &= \frac{1}{r_i} \frac{1}{h} \left(r_{i+1} \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{i+1} - r_i \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_i \right) = \frac{1}{r_i} \frac{1}{h} \left(r_{i+1} \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{h} - r_i \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{h} \right) = \\ &= \frac{1}{r_i h^2} (r_{i+1} \theta_{i+1} - (r_{i+1} + r_i) \theta_i + r_i \theta_{i-1}). \end{aligned}$$

При $r = 0$ вираз другої похідної по r має особливість, тому знайдемо її границю в цій точці.

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{(\partial \theta / \partial r)'}{(r)'} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \Big|_{r \rightarrow 0} = \\ &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \Big|_{r \rightarrow 0} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \Big|_{r \rightarrow 0} = 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \Big|_{r \rightarrow 0}. \end{aligned} \quad (34)$$

Тоді для виразу (34) матимемо таку різницеву схему :

$$2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \Big| = \frac{2}{h} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{i+1} - \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_i \right) = \frac{2}{h} \left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{h} - \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{h} \right) = \frac{2}{h^2} (\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}).$$

Для граничних умов (18) та (19) використовуємо центральну різницеву похідну $\frac{\partial \theta}{\partial r} \approx \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2h}$. Таким чином маємо таку різницеву задачу:

$$\frac{2}{h^2} (\theta_1 - 2\theta_0 + \theta_{-1}) - Bi_z (T(\theta_0) - T_p) = \dot{\theta}_0, \quad (35)$$

$$\frac{1}{r_i h^2} (r_{i+1} \theta_{i+1} - (r_{i+1} + r_i) \theta_i + r_i \theta_{i-1}) - Bi_z (T(\theta_i) - T_p) = \dot{\theta}_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (36)$$

$$\frac{1}{2h} (\theta_1 - \theta_{-1}) = 0, \quad \text{або } \theta_1 = \theta_{-1}, \quad (37)$$

$$\frac{1}{2h}(\theta_{N+1} - \theta_{N-1}) + Bi_1(T(\theta_N) - T_1) = 0, \quad (38)$$

$$\theta_i|_{Fo=0} = 0, \quad i = \overline{0, N}, \quad (39)$$

де $\theta_i \equiv \theta_i(Fo)$, а $\dot{\theta}_i$ — похідна за часом Fo .

Визначивши зі співвідношень (37), (38) θ_{-1} та θ_{N+1} і підставивши їх у рівняння (35) та в (36) при $i = N$, отримали, що:

$$\frac{4}{h^2}(\theta_1 - \theta_0) - Bi_z T(\theta_0) + Bi_z T_p = \dot{\theta}_0, \quad (40)$$

$$\frac{1}{r_i h^2}(r_{i+1}\theta_{i+1} - (r_{i+1} + r_i)\theta_i + r_i\theta_{i-1}) - Bi_z T(\theta_i) + Bi_z T_p = \dot{\theta}_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_N h^2}(r_{N+1} + r_N)(\theta_{N-1} - \theta_N) - T(\theta_N) \left[\frac{2Bi_1 r_{N+1}}{hr_N} + Bi_z \right] + \\ & + \frac{2Bi_1 T_1 r_{N+1}}{hr_N} + Bi_z T_p = \dot{\theta}_N. \end{aligned} \quad (42)$$

Таким чином сформульовано напівдискретну математичну модель для визначення змінної Кірхгофа у вигляді задачі Коші (40)–(42) для системи N звичайних нелінійних диференціальних рівнянь. Її розв'язок знаходимо чисельно, використовуючи неявний метод Гіра другого порядку апроксимації за часом, вигляду

$$\frac{3\theta_i^j - 4\theta_i^{j-1} + \theta_i^{j-2}}{2w} = f_i(\theta_i^j), \quad j = \overline{0, M},$$

де w і M — крок та кількість точок розбиття за часом відповідно.

Математична модель для визначення напруженого стану диска. Термопружний стан вільного від зовнішніх навантажень диска визначають компоненти напружень [2, 6]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2G(t)}{1-\nu(t)} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \nu(t) \frac{u}{r} - (1+\nu(t))\Phi(t) \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{2G(t)}{1-\nu(t)} \left[\nu(t) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - (1+\nu(t))\Phi(t) \right], \end{aligned} \quad (43)$$

які задовольняють рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad (44)$$

та граничні умови

$$u|_{r=0} < \infty, \quad \sigma_{rr}|_{r=r_1} = 0, \quad (45)$$

де u — радіальне переміщення, $\Phi(t) = \int_{t_p}^t \alpha_t(\xi) d\xi$ — суто тепла деформація.

Подамо механічні характеристики матеріалу у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, де $\chi_0 = \chi(t)|_{t=t_p}$ — опорне значення відповідної характеристики, $\chi^*(T)$ — безрозмірна функція, що описує залежність відповідної характеристики від безрозмірної температури T , причому $\chi^*(T_p) = 1$. Введемо безрозмірні переміщення $\bar{u} = u / (\delta\alpha_{t_0} t_0)$ та напруження $\sigma_r = \sigma_{rr} / (2G_0 \alpha_{t_0} t_0)$, $\sigma_\varphi = \sigma_{\varphi\varphi} / (2G_0 \alpha_{t_0} t_0)$. У введених величинах рівняння рівноваги та компоненти напружень набудуть вигляду:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad (46)$$

$$\sigma_r = \frac{G^*(T)}{1-\nu(T)} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \nu(T) \frac{\bar{u}}{r} - \bar{\Phi}(T) \right], \quad \sigma_\varphi = \frac{G^*(T)}{1-\nu(T)} \left[\nu(T) \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{u}}{r} - \bar{\Phi}(T) \right], \quad (47)$$

де $\bar{\Phi}(T) = (1 + \nu(T))\Phi(T)$, $\Phi(T) = \int_{T_p}^T \alpha_t^*(\xi) d\xi$.

Підставивши (47) у (46) отримаємо таке рівняння для визначення переміщення \bar{u} :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{u} r) \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 + \ln \left(\frac{G^*(T)}{1 - \nu(T)} \right) \right) \bar{\Phi}(T) \right] - \left(\frac{\partial \nu(T)}{\partial r} \frac{\bar{u}}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\ln \left(\frac{G^*(T)}{1 - \nu(T)} \right) \right] \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \nu(T) \frac{\bar{u}}{r} \right] + \ln \left(\frac{G^*(T)}{1 - \nu(T)} \right) \frac{\partial \bar{\Phi}(T)}{\partial r} \right). \quad (48)$$

Яке при незалежному від температури коефіцієнті Пуассона ν співпадає з відомим [6]. Його розв'язок будуюмо методом збурень. Для цього поряд з ним розглядаємо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{u} r) \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 + \ln \left(\frac{G^*(T)}{1 - \nu(T)} \right) \right) \bar{\Phi}(T) \right] - \varepsilon \left(\frac{\partial \nu(T)}{\partial r} \frac{\bar{u}}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\ln \left(\frac{G^*(T)}{1 - \nu(T)} \right) \right] \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \nu(T) \frac{\bar{u}}{r} \right] + \ln \left(\frac{G^*(T)}{1 - \nu(T)} \right) \frac{\partial \bar{\Phi}(T)}{\partial r} \right). \quad (49)$$

яке при $\varepsilon = 1$ збігається з (48). Його розв'язок шукаємо у вигляді розвинення за степенями ε :

$$\bar{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k \quad (50)$$

Підставивши (50) у (49) і прирівнявши доданки при однакових степенях ε , отримаємо наступні рівняння для визначення \bar{u}_0 та \bar{u}_k :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{u}_0 r) \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 + \ln \left(\frac{G^*(T)}{1 - \nu(T)} \right) \right) \bar{\Phi}(T) \right], \quad (51)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{u}_k r) \right) = f_{k-1}(r), \quad (52)$$

де $f_{k-1}(r) = \frac{\bar{u}_{k-1}}{r} \frac{\partial \nu(T)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\ln \left(\frac{G^*(T)}{1 - \nu(T)} \right) \right] \left[\frac{\partial \bar{u}_{k-1}}{\partial r} + \frac{\nu(T) \bar{u}_{k-1}}{r} \right] + \ln \left(\frac{G^*(T)}{1 - \nu(T)} \right) \frac{\partial \bar{\Phi}(T)}{\partial r}$, $k = \overline{1, \infty}$.

Відповідні складники компонент напружень обчислюються за формулами

$$\sigma_{rk} = \frac{G^*(T)}{1 - \nu(T)} \left[\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial r} + \nu(T) \frac{\bar{u}_k}{r} - \bar{\Phi}(T) \delta_{0k} \right], \quad (53)$$

$$\sigma_{\varphi k} = \frac{G^*(T)}{1 - \nu(T)} \left[\nu(T) \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial r} + \frac{\bar{u}_k}{r} - \bar{\Phi}(T) \delta_{0k} \right], \quad (54)$$

де δ_{0k} — символ Кронекера.

Безрозмірні переміщення та компоненти напружень за знайденими складниками обчислюються за формулами:

$$\bar{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_k, \quad \sigma_r = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{rk}, \quad \sigma_{\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{\varphi k}, \quad \text{а граничні умови (45) набувають вигляду} \\ \bar{u}_k|_{r=0} < \infty, \quad \sigma_{rk}|_{r=R_1} = 0, \quad k \geq 0. \quad (55)$$

Розв'язок рівняння (51) має вигляд

$$\bar{u}_0 = c_{10} r + \frac{c_{20}}{r} + \frac{1}{r} E(r), \quad (56)$$

де $E(r) = \int_0^r \left[1 + \ln \left(\frac{G^*(T)}{1 - \nu(T)} \right) \right] \bar{\Phi}(T) \xi d\xi$, а c_{10} , c_{20} — сталі інтегрування.

З першої граничної умови (55) отримаємо, що $c_{20} = 0$. Врахувавши це та скориставшись другою граничною умовою (55) при $k = 0$, отримаємо формулу для визначення сталої інтегрування c_{10} :

$$c_{10} = - \left[1 + \ln \left(\frac{G^*(T)}{1 - v(T)} \right) \bar{\Phi}(T) \right]_{r=R_1}.$$

Проінтегрувавши рівняння (52) отримаємо, що:

$$\bar{u}_k = c_{1k}r + \frac{c_{2k}}{r} - \frac{r}{2} H_{k-1}^{(0)}(r) + \frac{1}{2r} H_{k-1}^{(2)}(r), \quad (57)$$

де $H_{k-1}^{(i)}(r) = \int_0^r f_{k-1}(\xi) \xi^i d\xi$, $i = 0, 2$, а c_{1k} , c_{2k} ($k > 0$) — сталі інтегрування.

З першої граничної умови (55) при $k > 0$ отримаємо, що $c_{2k} = 0$, а з другої, після підстановки розв'язку (57) у (53), що:

$$c_{1k} = \frac{1}{2} H_{k-1}^{(0)}(R_1) + \frac{H_{k-1}^{(2)}(R_1)}{2R_1^2} \left(\frac{1 - v(T)}{1 + v(T)} \right)_{r=R_1}.$$

Числовий аналіз. При обчисленні температурного поля та напружень, використовувались такі вхідні дані: $t_p = 293K$, $t_1 = 873K$. За відлікову температуру вибрали $t_0 = t_1$. Таким чином $T_p = t_p / t_1 = 0.3356$, $T_1 = 1$. Прийняли $r_1 = 0.08$ м, $\delta = 0.01$ м, $R_1 = r_1 / \delta = 8$, $Bi_z = 0.5$, $Bi_1 = 5.5$, $k = -0.5253$, $\lambda_{t_0} = 47.7636 \frac{Bm}{MK}$, $\lambda_{av} = 39.4285 \frac{Bm}{MK}$. Тут λ_{av} середньо-інтегральне значення КТ (на проміжку температур $293K - 873K$). Вирази неперервних залежностей термомеханічних характеристик матеріалу сталі У12, для діапазону температур $293K - 873K$, отримано методом найменших квадратів. Дані характеристик взяті з таблиць [4]. Їх остаточний вигляд такий:

$$\lambda_t(t) = 47,7636 \left(1 - 0,52533(T - T_p) \right) \left[\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}) \right],$$

$$G(t) = 79,4 \cdot 10^9 \left(1 - 0,27(T - T_p) + 0,21(T - T_p)^2 + 0,59(T - T_p)^3 \right) \left[\text{Па} \right],$$

$$v(t) = 0,282 \left(1 + 0,199(T - T_p) - 1,291(T - T_p)^2 + 2,36(T - T_p)^3 \right),$$

$$\alpha_t(t) = 11,68 \cdot 10^{-6} \left(1 + 1,33(T - T_p) - 0,65(T - T_p)^2 \right) \left[\text{К}^{-1} \right].$$

При цьому, значення суто теплової деформації

$$\Phi(t) = t_0 \cdot 11,68 \cdot 10^{-6} \left((T - T_p) + 1,33(T - T_p)^2 / 2 - 0,65(T - T_p)^3 / 3 \right).$$

На рис. 1. наведемо графіки розподілу температури по радіусу диска для різних моментів безрозмірного часу Fo . Суцільні лінії стосуються розподілів температурного поля обчислених з використанням двох ЛП, значення яких знаходили з системи (33), а штрихові лінії — розподілів порохованих з використанням одного ЛП, значення якого знаходили з другого рівняння системи (33) в точці $r = R_1$.

Обчислюючи температурне поле методом ЛП бачимо(рис. 2), що для фіксованого часу зі зміною радіальної координати істотно змінюється лише κ_z (штрихові лінії). Тому на першому кроці, при знаходженні значень ЛП для конкретного часу Fo можна систему (33) розв'язати лише в одній точці по r , наприклад при $r = R_1$ — де досягається максимальне значення температури і де система зводиться до одного рівняння. У решті ж точок по координаті достатньо знаходити значення κ_z з першого рівняння системи (33), де замість κ_1 взяте значення з першого кроку. Відмінність температурного розподілу, знайденого з використанням такого спрощення, від температурного розподілу, знайденого з використанням двох ЛП, які визначались з системи (33), є менша 0.1%.

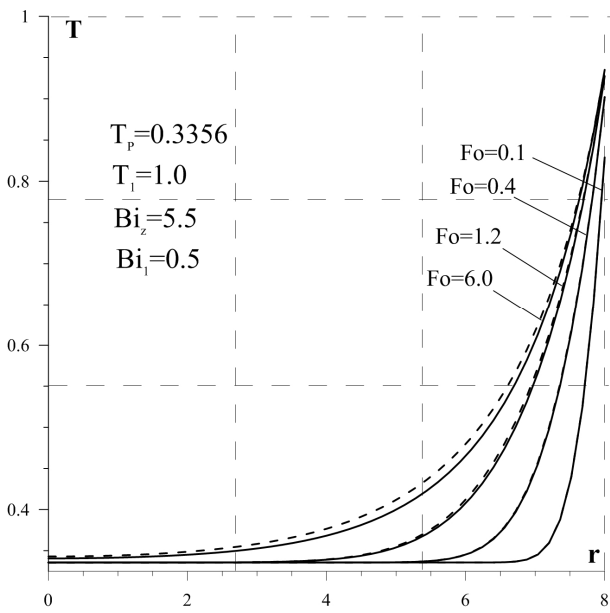


Рис. 1. Графіки температурного розподілу при використанні 1-го та 2-х ЛП

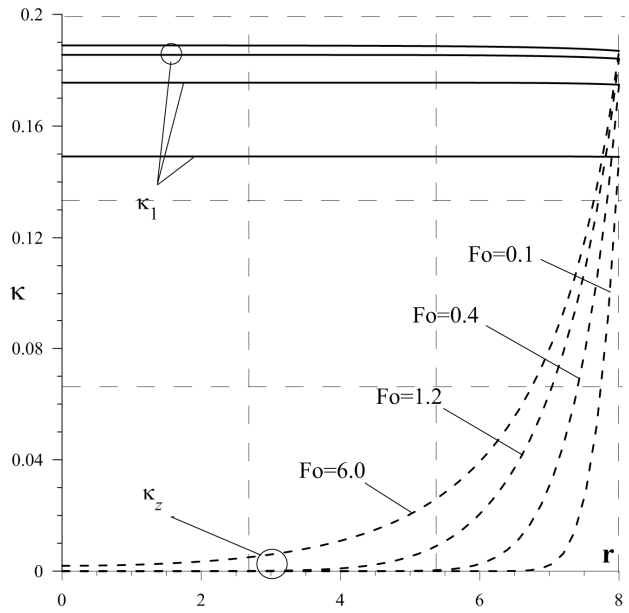


Рис. 2. ЛП

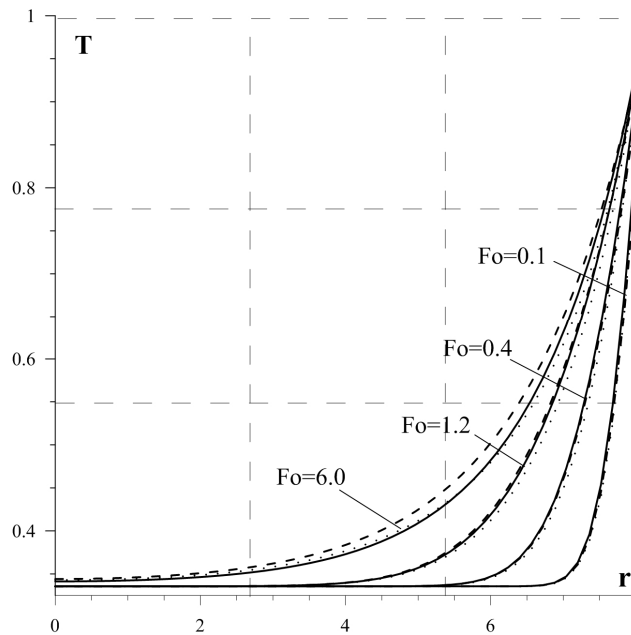


Рис. 3. Графіки температурного розподілу при використанні опорного та середньо-інтегрального значення КТ

На рис. 3 наведено розподіли температури отримані з використанням двох ЛП(суцільні лінії) і сталих опорного(штрихові лінії) та середньо-інтегрального(пунктирні лінії) значень КТ (нетермочутливе тіло). Відмінності між температурним розподілом термочутливого тіла(використання 2-х ЛП) та нетермочутливого склали 5% (опорне значення КТ) і 4% (середньо-інтегральне значення КТ) відповідно. При малих значеннях Fo меншу похибку дає використання опорного значення КТ, а при виході на стаціонарний режим — використання середнього значення КТ.

Числовий розв'язок даної задачі теплопровідності знайдено з другим порядком апроксимації по часу та координаті. Крок по часу склав 0.01 ($N = 600$), а проміжок по координаті був розбитий на $M = 100$ частин. Відносна похибка температурного розподілу, знайденого з використанням двох ЛП, і числового розв'язку виявилась не більша ніж 0.6%, що свідчить про коректність методу ЛП.

На рис. 4. наведено графіки розподілу радіальних σ_r (а) та колових σ_φ (б) напружень, а також графіки напружень обчислених за нехтування температурної залежності КТ.

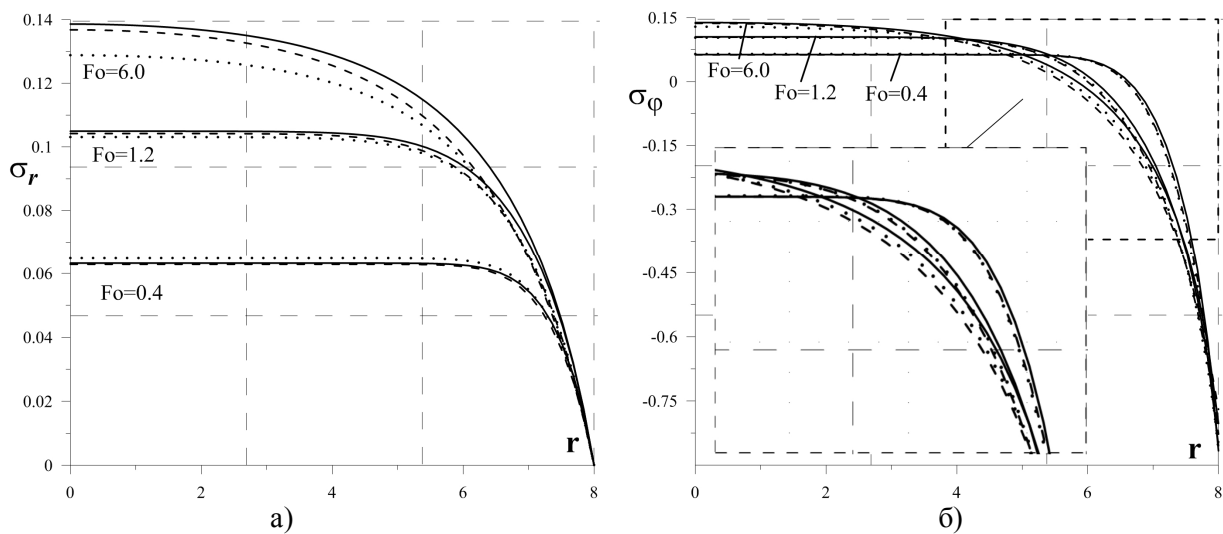


Рис. 4. Температурні напруження в диску з опорним та середнім КТ

Тут суцільна крива — КТ залежить від температури, штрихова — КТ опорний, пунктирна — рівний середньо-інтегральному значенню на проміжку температур 293К – 873К. Усі механічні характеристики залежать від температури. Розбіжності напружень обчислених при використанні розподілу температури термочутливого тіла (два ЛП) та напружень при використанні наближеного температурного розподілу досягають 10% для σ_r та 14% для σ_φ , при заміні КТ на опорне значення і 10% для σ_r та σ_φ , при заміні КТ на середньо-інтегральне значення.

На даному проміжку температур коефіцієнт Пуассона змінюється на 20%, модуль зсуву — на 12%, коефіцієнт теплового лінійного розширення — на 37%. Нехтування температурною залежністю коефіцієнта Пуассона неістотно впливає на розподіл напружень (1-2%). Нехтування температурною залежністю модуля зсуву дає похибку напружень до 3% при заміні на опорне і середньо-інтегральне значення. Нехтування температурною залежністю коефіцієнта теплового лінійного розширення найбільш істотно впливає на розподіл напружень і сягає 10-37%. Серед можливих варіантів заміни коефіцієнта Пуассона та модуля зсуву на опорне або середньо-інтегральне значення найменші відхилення від температурних напружень термочутливого тіла досягаються при використанні опорного значення коефіцієнта Пуассона і середньо-інтегрального значення модуля зсуву, і складають 1.5% для σ_r та 2% для σ_φ .

Висновки. Методом ЛП отримано розв'язок задачі термопружності для тонкого термочутливого диска, яких конвективно нагрівається через циліндричну поверхню середовищем сталої температури та охолоджується з бокових поверхонь. Досліджено питання ефективного визначення ЛП. Показано, що для зменшення обчислень при знаходженні значень температури кожного конкретного значення Fo є доцільним, визначення 2-х ЛП лише в одній точці по координаті. У решті ж точок по координаті достатньо знаходити лише ЛП з рівняння.

Для верифікації методу ЛП знайдено числовий розв'язок задачі повздовжнім методом прямих з використанням методу Гіра другого порядку апроксимації для розв'язання відповідної задачі Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь. Його відносна похибка щодо розподілу температури отриманого методом ЛП є меншою ніж 0.6%.

У розглянутому прикладі не можна однозначно сказати, що використання опорного чи середнього значення КТ краще наближує температурний розподіл термочутливого тіла. Для спрощення обчислень можна знехтувати температурною залежністю коефіцієнта Пуассона і модуля зсуву, змінивши їх на середньо-інтегральне та опорне значення відповідно. Оскільки коефіцієнт теплового лінійного розширення матеріалу диска істотно змінюються у даному діапазоні температур, то заміна його на сталу величину призводить до істотної похибки в напруженнях.

1. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев : Наук. думка. – 1992. – 280 с.
2. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел.- М.: Из-во МГУ. – 1976. – 368 с.
3. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа. – 1967. – 600 с.
4. Марочник сталей и сплавов. *Под ред. В.Г. Сорокина.* - М.: Машиностроение, Москва. – 1989. – 640 с.
5. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / *Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра.* Т.3: Термопружність термочутливих тіл / Кушнір Р. М., Попович В. С. – Львів: Сполом. – 2009. – 412 с.
6. *Подстригач Я.С.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках/ Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. // К. Наукова думка. – 1972. – 308 с.
7. *Попович В. С.* Моделирование тепловых полей в тонких термочувствительных пластинах // Моделирование и оптимизация сложных механических систем. –К.: Сб. науч. трудов Ин-та кибернетики. – 1991. – С. 70-75.
8. *Попович В.С.* О решении стационарных задач теплопроводности контактирующих термочувствительных тел // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1989. – Вып. 29. – С. 51–55.
9. *Попович В.С.* Термопружний стан термочутливої порожнистої кулі за умов конвективно-променевого теплообміну з довкіллям / Попович В.С., Гарматій Г.Ю., Вовк О.М.// Фіз.- хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 6. – С. 39–48.
10. *Carslaw, H. S.* Conduction of heat in solids Clarendon / Carslaw, H. S., Jaeger, J. C. // Oxford. – 1959. – 430p.
11. *Noda, N.,* Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties, Thermal Stresses I, North-Holland, Amsterdam. – 1986. – pp. 391-483.
12. *Popovych, V. S.* The thermoelastic state of a thermosensitive sphere and space with a spherical cavity subject to complex heat exchange / Popovych, V. S. Kushnir, R. M. Vovk, O. M. // J. Engng Math. – 2008. – № 2-4. – pp. 375-369.
13. *Prudnikov, A. V. O. I,* Direct Laplace transforms. Integrals and Series, Vol. 4 / Prudnikov, A. V. Brychkov, Yu. A. Marichev // New York. – 1992. – 331 p.
14. *Prudnikov, A. V.* Inverse Laplace transforms. Integrals and Series, Vol. 5 / Prudnikov, A. V. Brychkov, Yu. A. Marichev // New York. – 1992. – 595 p.

Стаття надійшла до редакції 27.04.2013.