

В.А. Кривень, А.Р. Бойко, О.Б. Гнатюк
ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ЖОРСТКОГО ВКЛЮЧЕННЯ, ОБМЕЖЕНОГО
ЦИЛІНДРИЧНИМИ ПОВЕРХНЯМИ, ПІД ЗСУВНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Досліджено квазістатичне пластичне відшаровування жорсткого тунельного включення, обмеженого з боків двома циліндричними поверхнями. Деформація зумовлена зсувним навантаженням, прикладеним на нескінченності. Знайдено аналітичний розв'язок задачі, визначено напружено-деформівний стан, досліджено розвиток смуг пластичного відшаровування.

Ключові слова: жорстке включення, міжфазне відшарування, конформне відображення, задача Келдыша-Седова, пластичні смуги

Форм. 54. Рис.4. Літ. 10.

В.А. Кривень, А.Р. Бойко, О.Б. Гнатюк
ПЛАСТИЧЕСКОЕ ОТСЛАИВАНИЕ ЖЕСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ, ОГРАНИЧЕННОГО
ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ, ПРИ СДВИГОВОЙ НАГРУЗКЕ.

Исследовано квазистатическое пластическое отслаивание жесткого включения, ограниченного двумя цилиндрическими поверхностями. Деформация обусловлена сдвиговой нагрузкой, приложенной на бесконечности. Найдено аналитическое решение задачи, определено напряженно-деформированное состояние, исследовано развитие полос пластического отслаивания.

Ключевые слова: жесткое включение, междуфазное отслаивание, конформное отображение, задача Келдыша-Седова, пластические полосы.

V. Kryven, A. Boyko, O. Gnatyuk
THE PLASTIC EXFOLIATION OF RIGID INCLUSION LIMITED BY CYLINDRICAL
SURFACES UNDER A SHEAR LOAD

The quasi-static plastic exfoliation of rigid tunnel inclusion bounded on each side by two cylindrical surfaces was studied. Deformation due to shear load applied at infinity. The analytical solution of the problem was obtained, the stress-strain state was defined, the development of plastic bands exfoliation was investigated.

Key word: rigid inclusions, plastic exfoliation, conformal mapping, Keldich-Siedov problem, plasticity bands.

Постановка проблеми. Дослідження напружено-деформованого стану тіл з включенням представляють значний інтерес для теорії міцності композитів і армованих матеріалів та прогнозування і оптимізації їх деформаційних характеристик. Для лінійно-пружних тіл ця проблема вивчалася у багатьох працях [1], [2].

Сучасні дослідження розвитку пластичних зон в тілах з концентраторами напружень виконані переважно чисельними методами [3], [4]. Побудова найбільш бажаних для наукових досліджень аналітичних розв'язків таких задач якраз і є дуже складною, особливо для включень складної форми. Невирішеними залишаються практично важливі задачі міжфазного пластичного розшарування [5], що можуть призводити до втрати міцності чи функціональних характеристик механічної конструкції.

Метою даного дослідження є вивчення розвитку міжфазного пластичного розшарування жорсткого включення складної форми за наявності кутових точок на його поверхні чисельно-аналітичним методом.

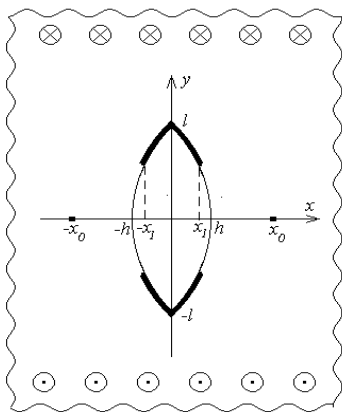


Рис. 1. Поперечний переріз тіла

Постановка задачі. Дослідимо напружено-деформівний стан ідеально пружно-пластичного необмеженого тіла, що містить абсолютно жорстке включення:

$$x_0 - \sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq -x_0 + \sqrt{R^2 - y^2}, \quad -l \leq y \leq l = 0,$$

$-\infty < z < +\infty$. Радіус R поверхонь, що його обмежують, і кут α при вершинах включення зв'язані

з висотою включення співвідношенням $R = l \sec \frac{\alpha}{2}$.

Максимальна ширина включення дорівнює $2h$,

$h = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{4}$. Центр поверхонь знаходиться в точках

прикладеними у нескінченно віддаленій точці

$x_0 = \pm l \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Деформування спричинено зусиллями $\tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = \tau_\infty$ (Рис. 1). Матеріал тіла ідеально пружно-пластичний із зсувною границею текучості рівною k . Задача полягає у визначенні напружено-деформівного стану тіла та закону розвитку пластичних смуг під впливом квазістатично зростаючого навантаження.

Формалізація і розв'язок задачі. Внаслідок концентрації напружень в околі вершин включень розвиваються пластичні зони, які ми вважатимемо локалізованими на межі включення середовища у смугах $(x \pm x_0)^2 + y^2 = R^2, |x| \leq x_1, \pm x_1$ - залежні від рівня навантаження абсциси кінців смуг. Пластичні деформації призводять до порушення механічного зв'язку матриці із середовищем з виникненням між ними тангенціального розриву переміщення (пластичне відшаровування).

Дослідимо напружено-деформівний стан тіла поза включенням у другому квадранті (область $D = \{(x, y) | x < 0, y > 0, (x - x_0)^2 + y^2 > R^2\}$).

Поставимо крайову задачу у напруженнях в області D :

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x, 0) &= 0, \quad -\infty < x < -h; \\ \tau_{xz}(x, y) &= 0, \quad (-h < x < x_1, (x - x_0)^2 + y^2 = R^2); \\ \tau_{xz}^2(x, y) + \tau_{yz}^2(x, y) &= k^2, \quad (-x_1 < x < 0, (x - x_0)^2 + y^2 = R^2); \\ \tau_{xz}(0, y) &= 0, \quad (l < y < +\infty); \\ \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} \tau_{xz}(x, y) &= 0; \quad \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} \tau_{yz}(x, y) = \tau_\infty; \end{aligned} \quad (1)$$

де \vec{n} - одиничний тангенціальний вектор на межі включення середовища.

Умови (1) послідовно виражають: непарність переміщення відносно осі абсцис; відсутність переміщення на пластично-невідшарованих ділянках поверхні включення, умову пластичності на частині відшарованої поверхні включення, парність переміщення відносно осі ординат та спосіб і величину навантаження.

Додатково повинна виконуватися умова:

$$\tau_{xz}^2(x, y) + \tau_{yz}^2(x, y) = k^2, \quad (x \notin [0; h], (x - x_0)^2 + y^2 = R^2), \quad (2)$$

котра гарантує, що пластичний стан не досягається ніде поза смугами.

Складена із компонент напружень функція $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$, $\zeta = x + iy$ є аналітичною та однолистою в області D і конформно відображає її на область G комплексної площини τ (Рис. 2).

Стосовно функції $\tau(\zeta)$ крайова задача (1) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0, \quad (\zeta = x, -\infty < x < -h); \\ \operatorname{Im} \tau(\zeta) d\zeta &= 0, \quad (\zeta \in BC); \\ |\tau(\zeta)| &= k, \quad (\zeta \in CD); \\ \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0, \quad (\zeta = iy, l < y < +\infty); \\ \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tau(\zeta) &= \tau_\infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Для розв'язання задачі (3) застосуємо конформні відображення [6-8].

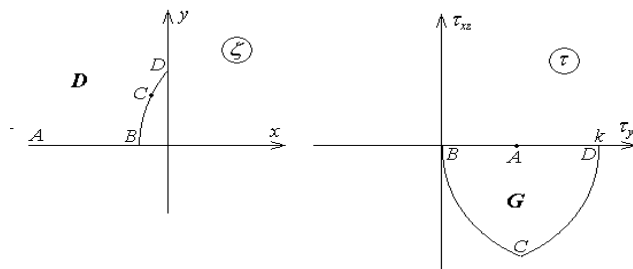


Рис. 2. Области у площинах ζ і τ .

Зауважимо, що оскільки ділянка BC границі області G , відповідна невідшарованій частині поверхні вклучення, апріорі невідома, неможливо знайти функцію $\tau(\zeta)$ безпосередньою побудовою відображення.

Для розв'язання задачі (3) застосуємо конформні відображення [6-8].

Зауважимо, що оскільки ділянка BC границі області G , відповідна невідшарованій частині поверхні вклучення, апріорі невідома, неможливо знайти функцію $\tau(\zeta)$ безпосередньою побудовою відображення.

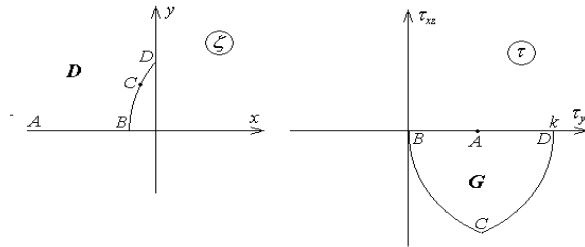


Рис. 2. Области у площинах ζ і τ

Уведемо площину допоміжного комплексного параметра t так аби її верхня частина $H = \{t \mid \text{Im } t > 0\}$ конформно відображалася на область D (Рис. 3) і шукатимемо розв'язок крайової задачі (3) у параметричному вигляді:

$$\tau = \tau(t), \zeta = \zeta(t), \quad (t \in H) \tag{4}$$

У площинах ζ і t області конформних відображень є наперед відомими, а саме

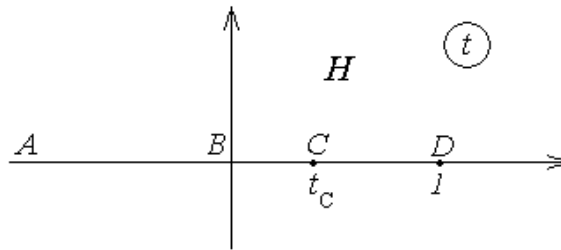


Рис. 3. Площина допоміжного комплексного параметра t

відображення $\zeta = \zeta(t)$ визначається композицією функцій:

$$\zeta(t) = l \frac{(\sqrt{t} + 1)^\lambda + (\sqrt{t} - 1)^\lambda}{(\sqrt{t} + 1)^\lambda - (\sqrt{t} - 1)^\lambda}, \tag{5}$$

де $\lambda = \frac{2\pi - \alpha}{2\pi}$. Тут і далі у цій роботі під t^q (t - комплексна змінна, q - дійсне число, $|q| < 1$) розумітимемо аналітичну в області H функцію, що приймає дійсні додатні значення на дійсній додатній півосі.

Покажемо тепер, що визначення функції $\tau(t)$ зводиться до задачі Келдиша-Сєдова [9]. Введемо нову невідому функцію:

$$\varphi(t) = \ln \frac{\tau(t)}{k}. \tag{6}$$

Внаслідок умов (3) отримаємо для $\varphi(t)$ таку крайову задачу в області H :

$$\begin{aligned} \text{Im } \varphi(t) &= 0, \quad (t \in (-\infty; 0)); \\ \text{Im } \varphi(t) &= -\arg \zeta'(t), \quad (t \in [0; t_c]); \\ \text{Re } \varphi(t) &= 0, \quad (t \in (t_c; 1)); \\ \text{Im } \varphi(t) &= 0, \quad (t \in [1; +\infty)). \end{aligned} \tag{7}$$

Оскільки, ділянка $t \in [0; 1]$ границі області H відображається функцією $\zeta(t)$ у дугу BC межі області D , із формули (5) отримуємо:

$$x(t) = -2l \sin(\pi\lambda) f_3(t) / w(t), \quad y(t) = l(f_1(t) - f_2(t)) / w(t), \quad (8)$$

де $f_1(t) = (1 + \sqrt{t})^{2\lambda}$,

$$f_2(t) = (1 - \sqrt{t})^{2\lambda},$$

$$f_3(t) = (1 + \sqrt{t})^{2\lambda-1},$$

$$f_5(t) = (1-t)^\lambda,$$

$$w(t) = f_1(t) + f_2(t) - 2 \cos(\pi\lambda) f_5(t).$$

І, отже, на відрізку $t \in [0; 1]$

$$\arg \zeta'(t) = \operatorname{arctg} \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad (9)$$

де

$$x'(t) = 2l \sin(\pi\lambda) \frac{(f_3(t)f_6(t) - f_4(t)f_6(t) + 2 \cos(\pi\lambda) f_7(t)) f_5(t)}{w^2(t)} + l \frac{f_7(t)}{w(t)},$$

$$y'(t) = -l \cdot \frac{(f_3(t)f_6(t) - f_4(t)f_6(t) + 2 \cos(\pi \cdot \lambda) f_7(t)) \cdot (f_1(t) - f_2(t))}{w^2(t)} +$$

$$+ l \cdot \frac{f_6(t)(f_4(t) + f_3(t))}{w(t)},$$

$$f_4(t) = (1 - \sqrt{t})^{2\lambda-1}, \quad f_6(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{t}}, \quad f_7(t) = \lambda(1-t)^{\lambda-1}.$$

Розв'язок крайової задачі Келдиша-Сєдова (7) зводиться до квадратур:

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{(t-t_c)(t-1)}}{\pi} \int_0^{t_c} \frac{\arg \zeta'(\eta) d\eta}{\sqrt{(\eta-t_c)(\eta-1)(\eta-t)}}. \quad (10)$$

Із формули (6) отримуємо

$$\tau(t) = ke^{\varphi(t)} \quad (11)$$

Оскільки

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{t_c} \frac{\arg \zeta'(\eta) d\eta}{\sqrt{(\eta-t_c)(\eta-1)}},$$

то із формул (3) і (11) отримуємо зв'язок параметра t_c з величиною діючого навантаження τ_∞ :

$$\ln \frac{\tau_\infty}{k} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{t_c} \frac{\arg \zeta'(\eta) d\eta}{\sqrt{(\eta-t_c)(\eta-1)}}. \quad (12)$$

Можна переконатися, що права частина рівняння (12) є монотонно-спадною функцією від t_c і при зміні t_c на відрізку $[0;1]$ змінюється від 0 до $-\infty$. І, отже, для кожного $\tau_\infty \in [0;k]$ рівняння (12) має єдиний розв'язок на відрізку $[0;1]$.

Таким чином розв'язок крайової задачі (3) дають функції (5), (11) для яких параметр t_c визначається із розв'язку рівняння (12).

Знайдемо тепер довжини смуг пластичного відшарування у залежності від величини навантаження.

Кінцевій точці смуги у площині t відповідає $t = t_c$. Тому, за формулою (8):

$$x_1 = -2l \sin(\pi\lambda) f_3(t_c) / w(t_c), \quad y_1 = l(f_1(t_c) - f_2(t_c)) / w(t_c).$$

Кутову величину пластичних смуг і частину відшарованої поверхні включення дають формули:

$$\psi = 2 \arcsin \frac{\sqrt{x_1^2 + (l - y_1)^2}}{2R} \quad \text{і} \quad \theta = \frac{2\psi}{\alpha}. \quad (13)$$

Розглянемо часткові випадки знайденого розв'язку.

Включення нульової товщини. Якщо кут при вершині включення $\alpha=0$, то ширина включення стає нульовою, а саме включення прямолінійним плоским: $x=0; |y|\leq l$. Тоді λ у формулі (5) дорівнює одиниці, а $\zeta(t)=il\sqrt{t}$. На відрізку $[0;1]$ дійсної осі t $\arg\zeta'(t)=\pi/2$. Із формул (10), (11) для цього випадку отримуємо:

$$\tau(t) = k \frac{\sqrt{t_c - t} + i\sqrt{1-t_c}\sqrt{t}}{\sqrt{t_c}\sqrt{1-t}}, \quad t_c = 4 \frac{k^4 \tau_\infty^4}{(k^2 + \tau_\infty^2)^2}.$$

Для довжини d смуги пластичного відшарування отримуємо просту явну залежність:

$$d = 2l \frac{\tau_\infty^2}{k^2 + \tau_\infty^2} \tag{14}$$

Знайдені для цього часткового випадку функція напружень і довжина шару пластичного відшарування співпадають із раніше відомими [10].

Кругове включення. Якщо кут при вершині включення $\alpha=\pi$, зникає кутова точка у включення і воно набуває кругової форми $x^2 + y^2 = l^2, R=l$. Параметр $\lambda = 1/2$.

$$\zeta(t) = l \frac{\sqrt{\sqrt{t}+1} + \sqrt{\sqrt{t}-1}}{\sqrt{\sqrt{t}+1} - \sqrt{\sqrt{t}-1}}.$$

За наявності кутової точки на поверхні включення пружне поле напружень сингулярне і пластичні зони проявлятимуться навіть за як завгодно малого навантаження. Навпаки, у випадку гладкої границі для достатньо малих навантажень границя текучості не досягається, тому для гладких включень не завжди можна припускати наявність дугової ділянки на межі області G . Зокрема для кругового включення воно справедливе для навантажень $\tau_\infty > k/2$. Для цього випадку одержуємо:

$$\tau(\zeta) = \frac{(\zeta^2 + R^2)f(\zeta) + \tau_\infty(\zeta^2 + R^2)^2 - 4kR^2\zeta^2}{2\zeta^2(\zeta^2 - R^2)},$$

де $f(\zeta) = \sqrt{\tau_\infty^2(\zeta^2 + R^2)^2 - 4kR^2\zeta^2(2\tau_\infty - k)}$.

Кутовий розмір пластичної смуги дає формула:

$$\theta = \begin{cases} \arccos \frac{k - \tau_\infty}{\tau_\infty}, & \tau_\infty \geq k; \\ 0, & k < \tau_\infty. \end{cases} \tag{15}$$

Залежності частини відшарованої поверхні включення від навантаження для декількох значень кута при вершині включення наведено на *Рис. 4*.

Висновки. Знайдено аналітичний розв'язок задачі про міжфазне пластичне відшарування

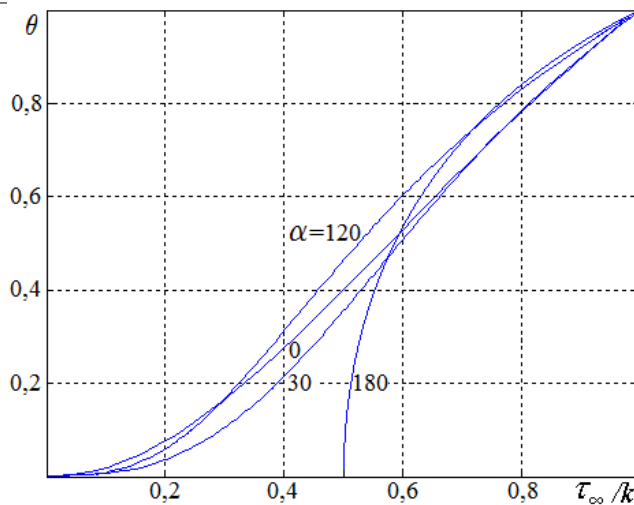


Рис. 4. Залежності частини відшарованої поверхні включення θ від навантаження для чотирьох значень кута при вершині включення

жорсткого тунельного включення, обмеженого циліндричними поверхнями. Для довільного кута при вершинах включення визначено напружено-деформівний стан середовища і залежності довжин пластичних смуг від величини навантаження. Отримані результати дають можливість встановити межі застосовності часто вживаного у механіці руйнування припущення нульової товщини тонкого включення.

1. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Монографія. — Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. – 2007. — 716 с.
2. Панасюк В.В. Концентрація напружень в трохмерних телах с тонкими включеннями / В.В. Панасюк, М.М. Стадник, В.П. Силованюк // К. Наукова думка. – 1986. – 216 с.
3. Максимович В.М. Пружно-пластична задача для обмеженої пластинки з м'яким еліптичним включенням / В.М. Максимович, Я.М. Пастернак, О.С. Приходько // Вісник ТНТУ. – 2012. – 66. – №2. – С. 44-50.
4. Wayne Chen W., Kun Zhou, Leon M. Keer and Jane Wang Q. // Internatinal Journal of Solids and Structures – 2010. - Vol. 47, Issue 20 – P. 2841-2854.
5. Kryven' V. A. Initial stage of plastic exfoliation of a rectangular inclusion under conditions of one-sided contact with a medium Journal of Mathematical Sciences / Kryven' V. A., Valyashek V. B. // -Vol. 171. - No. 4. - September, 2010. – P. 107–116.
6. Иванов В.И. Конформные отображения и их приложения / В.И. Иванов, В.Ю. Попов// М.: Едиториал УРСС. – 2002. – 324 с.
7. Crowdy D.G. Conformal mappings from annuli to canonical doubly connected Bell representations, J. Math. Anal. Appl. – 340(1). – 2007. – P. 669-674.
8. Crowdy D.G. Schwarz-Christoffel mappings to unbounded multiply connected polygonal regions // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 2007. – P. 319-339.
9. Мухомеливили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматгиз. – 1968. – 512 с.
10. Kryven V.A. Plastic interfacial slip of periodic systems of rigid thin inclusions undergoing longitudinal shear / Kryven V.A., Sulym G.T., Yavorska M.I. // JTAM. – V.44. – No. 4. – 2006.– P. 837–848.

Стаття надійшла до редакції 29.04.2013.