УДК 539.3.

В.І. Шваб'юк, А.В. Маткова, В.В. Шваб'юк

ПОСТАНОВКА ПЕРШОЇ ОСНОВНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ЗГИНУ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕННИХ ОБЛАСТЕЙ

У статті проаналізовано використання методу лінійного спряження М. Мусхелішвілі для розв'язку першої основної задачі згину півнескінченних ортотропних пластин. Наведені рівняння уточненої моделі. відрізняються від уже відомих представлень інших теорій згину членами, які враховують поперечне обтиснення, а також нелінійність розподілу нормальних напружень по товщині пластини.

Ключові слова: *згин пластин, крайова задача, ортотропні пластини, деформації поперечного зсуву, обтиснення, комплексні потенціали.*

Форм. 25. Рис. 1. Літ.5.

В.И. Швабюк, А.В. Маткова, В.В. Швабюк

ПОСТАНОВКА ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

У статье проанализировано использование метода линейного сопряжения Н. Мусхелишвили для решения первой основной задачи изгиба полубесконечных ортотропных пластин. Приведенные уравнения уточненной модели. отличаются от уже известных представлений других теорий изгиба членами, которые учитывают поперечное обжатие, а также нелинейность распределения нормальных напряжений по толщине пластины.

Ключевые слова: *изгиб пластин, краевая задача, ортотропные пластины, деформации поперечного сдвига, обжатия, комплексные потенциалы.*

V.I. Shvabyuk, A.V.Matkova, V.V. Shvabyuk

FORMULATIONS OF THE FIRST BASIC OF BOUNDARY PROBLEM ORTHOTROPIC PLATES BENDING FOR SEMI-INFINITE DOMAIN

The analysis conditions on the orthotropic plate boundaries are determined. By introduction of N.Muskhelishvili's complex potentials the solutions of main tasks of the theory of bending of orthotropic plates come to solutions of boundary by linear coupling method.

Keiwords**:** *bending plates, linear coupling method, orthotropic plates, complex potentials.*

Постановка проблеми. Використання методу лінійного спряження аналітичних функцій комплексної змінної стосовно плоскої задачі теорії пружності розглянуто М. Мусхелішвілі [2]. Для теорії згину ізотропних та трансверсально- ізотропних пластин досить детально розглянуто І. Прусовим у його монографії [3]. Метод лінійного спряження аналітичних функцій зручно використовувати також для розв'язку основних крайових задач згину ортотропних пластин для півнескінченних і кругових областей. Однак, застосування цього методу для ортотропних пластин пов'язане із значними труднощами як у записах через комплексні потенціали виразів для згинальних моментів і поперечних сил, так і в постановці крайових задач, тому в випадках ортотропних пластин ним майже не користувалися.

У роботі дається постановка і розв'язок першої основної крайової задачі ортотропних пластинок як в уточненій постановці, так і в постановці класичної теорії тонких пластин Ґ. Кірхгофа [1,4].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для задач згину тонких пластинок Ґ. Кірхгофа представлення основних залежностей та розв'язків через аналітичні функції комплексної змінної, можливо вперше, систематично почали використовуватись С. Лехніцьким [1] та Г. Савіним [4] для анізотропних та ізотропних пластинок з отворами. Формули уточненої моделі згину ортотропних пластин [5] дають змогу, за аналогією з плоскою задачею теорії пружності [2], де визначення комплексних потенціалів М. Мусхелішвілі поширюється на область яку не займає пластинка, а також методикою І. Прусова [3], скористатися методом лінійного спряження для розв'язку основних задач згину так званих півнескінченних пластин. Наведені рівняння уточненої моделі відрізняються від уже відомих представлень теорії І. Прусова [3] членами, які враховують поперечне обтиснення, а також нелінійність розподілу нормальних напружень по товщині пластини.

Мета дослідження. Зробити постановку та одержати розв'язок першої основної крайової задачі згину півнескінченних ортотропних пластин на основі рівнянь уточненої моделі, що враховує деформації поперечного зсуву та обтиснення. Здійснити аналіз отриманих результатів.

Основні результати досліджень. Система рівнянь поперечного згину ортотропних пластин може бути записана у вигляді [5]:

$$D_1\frac{\partial^4\tilde{w}}{\partial x^4}+2\left(2D_{66}+D_{12}\right)\frac{\partial^4\tilde{w}}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4\tilde{w}}{\partial y^4}+\left(K_y-K_x\right)\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}=q_2+0,4h^2\left(A_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}+A_2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)q_2; \qquad (1)$$

$$K_x\frac{\partial^2 w_\tau}{\partial x^2}+K_y\frac{\partial^2 w_\tau}{\partial y^2}+\left(K_y-K_x\right)\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}=-q_2.\ \ D_{66}\Delta\Omega+\left(D_1-(2D_{66}+D_{12})\right)\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}=\frac{5}{4}K_x\cdot\Omega,\quad \begin{pmatrix}x\leftrightarrow y\\ 1\leftrightarrow 2\end{pmatrix};$$

äå $K_x=\dfrac{4}{3}G_{13}h,\ K_y=\dfrac{4}{3}G_{23}h,\ A_1=\left(\nu_{13}+\nu_{21}\nu_{23}\right)\cdot E_1\big/\left(1-\nu_{12}\nu_{21}\right)E_3,\left(1\leftrightarrow 2\right)$

$$\tilde{w}=w+\varepsilon_2 q_2/D_1-\frac{4}{5}w_\tau,\ D_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{E_1h^3}{1-\nu_{21}\nu_{12}},\ D_{66}=\frac{2}{3}G_{12}h^3,\ D_{12}=\nu_{12}D_1=\nu_{21}D_2;$$

$\varepsilon_2=0,05(1-\nu^*)\tilde{E}_1/E_3;\ \nu^*=0,5\nu''G_{13}/G_{12}$; w — переміщення серединної поверхні пластини, $w_\tau(x,y),\Omega(x,y)$ — невідомі функції, що описують деформації поперечного зсуву в пластині і через похідні від яких виражаються поперечні сили в пластині : $Q_x=\mathrm{K}_x\left(\dfrac{\partial w_\tau}{\partial x}-\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}\right),\quad Q_y=\mathrm{K}_y\left(\dfrac{\partial w_\tau}{\partial y}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}\right)$; $2h$ – товщина пластини, E_i,G_{ij},ν_{ij} — модулі пружності, модулі зсуву та коефіцієнти Пуассона матеріалу пластини в напрямках $i,j=1,2,3$; $q_2=q^++q^-$ — сумарне навантаження на пластину; q^+,q^- — нормальні компоненти поверхневих навантажень, прикладених до зовнішніх $\left(\gamma=\pm h\right)$ поверхонь пластини.

Формули для напружень в поперечних перерізах пластини записуються у вигляді [5]:

$$\sigma_x=\frac{3M_x}{2h^3}\cdot\gamma+\tilde{E}_1\left(\frac{\partial\tilde{Q}_x}{\partial x}+\nu_{12}\frac{\partial\tilde{Q}_y}{\partial y}\right)\cdot f(\gamma);\ \ \sigma_y=\frac{3M_y}{2h^3}\cdot\gamma+\tilde{E}_2\left(\frac{\partial\tilde{Q}_y}{\partial y}+\nu_{21}\frac{\partial\tilde{Q}_x}{\partial x}\right)\cdot f(\gamma);$$

$$\tau_{xy}=\frac{3H_{xy}}{2h^3}\cdot\gamma+G_{12}\left(\frac{\partial\tilde{Q}_x}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{Q}_y}{\partial x}\right)\cdot f(\gamma);\ \tau_{x\gamma}=G_{13}(1-\gamma^2/h^2)\tilde{Q}_x, \qquad (2)$$

$$\tau_{y\gamma}=G_{23}(1-\gamma^2/h^2)\tilde{Q}_y.\ \left\{M_x,M_y,H_{xy}\right\}=\int_{-h}^{h}\left\{\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}\right\}\cdot\gamma\cdot d\gamma.$$

Тут $f(\gamma)=\dfrac{\gamma}{5}\left(1-\dfrac{5}{3}\dfrac{\gamma^2}{h^2}\right),\ \tilde{Q}_x=Q_x/K_x,(x\leftrightarrow y);\ \tilde{E}_1=E_1/(1-\nu_{12}\cdot\nu_{21}),(1\leftrightarrow 2).$

Розглянемо випадки, коли область, яку займає серединна поверхня недеформованої пластини, є півплощиною. Позначимо її значком $D^-\left(y<0\right)$. Будемо вважати, що пластина згинається зусиллями, які прикладені до її границі, або в довільний точці $z_0\in D^-$ у вигляді зосереджених моменту M і сили P та розподіленого навантаження $q(x)$ (рис. 1); γ — поперечна координата декартової системи координат.

Нехай L – дійсна вісь площини комплексної змінної $z=x+i\lambda y$, де λ – кратний додатній корінь характеристичного рівняння

$$D_2\lambda^4-2\left(2D_{66}+D_{12}\right)\lambda^2+D_1=0, \qquad (3)$$

Коефіцієнти якого повинні задовольняти умову: $\lambda^2=\left(2D_{66}+D_{12}\right)\big/D_2=\sqrt{D_1/D_2}$.

За такого виду ортотропії будемо мати тільки одну комплексну змінну $z=x+i\lambda y$, через яку будуть виражатися комплексні потенціали $\varphi(z)$ і $\chi(z)$ у формулі Гурса [2]

$$\tilde{w}=\mathrm{Re}\left[\bar{z}\cdot\varphi\left(z\right)+\chi(z)\right]+w^*. \qquad (4)$$

Тут w^* — частковий розв'язок першого рівняння системи (1).

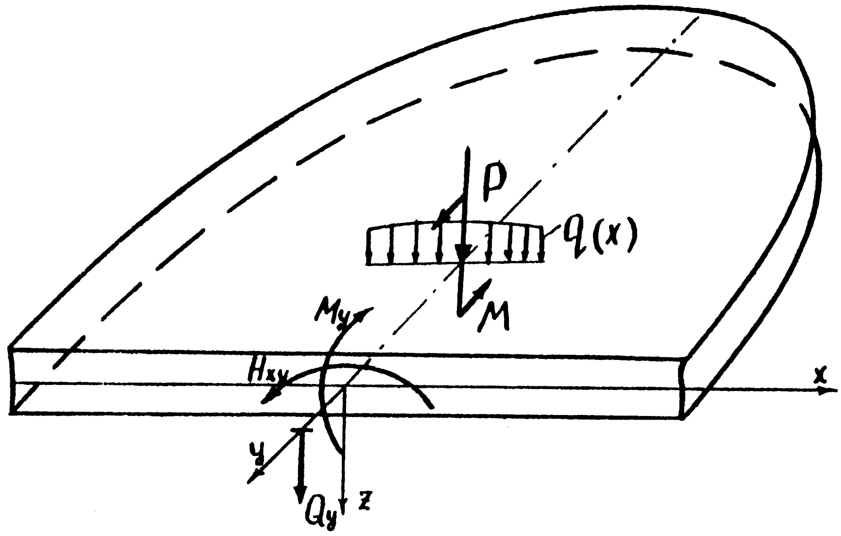

Рис. 1. **Схема навантаження пластини**

Перша основна задача полягає в тому, щоб знайти пружну рівновагу пластини, коли на її границі L задані згинальні моменти $m(x)$, крутні моменти $H(x)$, і поперечні зусилля $Q(x)$, віднесені до одиниці довжини, як функції відрізка контуру L. Граничні умови, які виконуються на краю пластини і відповідають першій основній задачі, будуть наступними:

$$M_y = m(x),\ H_{xy} = H(x),\ Q_y = Q(x). \tag{5}$$

Поступаючи, так само, як і в [2], поширимо означення функції $\hat{O}(z) = d\varphi(z)/dz$ на область, яка не зайнята пластиною (обл. D^+), вважаючи, що для $z \in D^+$ функція $\hat{O}(z)$ визначається так:

$$\hat{O}(z) = -\bar{\hat{O}}(z) - \bar{\Psi}(z) - z\bar{\hat{O}}'(z) + \Psi_0(z), \tag{6}$$

де $\Psi_0(z)$ – довільна аналітична функція , яка визначена тільки в області D^+.

Замінивши у формулі (3) z на $\bar{z}$ (вважаючи, що $z \in D^-$) і, виконавши операцію спряження, знайдемо вираз для комплексного потенціалу $\Psi(z) = d^2\chi(z)/dz^2$:

$$\Psi(z) = -\hat{O}(z) - \overline{\hat{O}(\bar{z})} - z\hat{O}'(z) + \Psi_0(\bar{z}). \tag{7}$$

Підставивши формулу (4) у рівності [5] отримаємо наступну систему рівнянь, яку можна використати при постановці граничних задач для ортотропної пластини:

$$\Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} = -\eta_1 f_1 + 0.4i\alpha R_2 + 0.8(\alpha - 1)\Omega''_{xy} - \Psi_0(\bar{z});$$

$$\kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} = -\eta_2 f_2 + \frac{4}{5}\kappa_0^*(\alpha - 1)\Omega''_{xy} - \frac{2}{5}i\alpha\left(R_2 + \alpha^2 k_0^2\Omega\right) + \Psi_0(\bar{z});$$

$$2i\alpha \cdot D_1\left[\Phi(z) - \overline{\Phi(z)}\right] = K_y\Omega - P_y + C_0; \tag{8}$$

$$\Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} = g(x) + 0.8i\alpha(R_1)'_x;$$

$$4\varepsilon\overline{\Phi'(z)}=\frac{4}{5}i\alpha R_1-\left[\left(\gamma_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+i\alpha\left(\gamma_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right],$$

де $\qquad f_1(x)=\lambda^2(1+r)M_x-(\nu_{21}-r)M_y+i\alpha(1+\nu_{21})H_{xy};\ \alpha=1/\lambda;$

$$f_2(x)=M_y-i\alpha\left(H_{xy}+P_y+C_0\right);\quad \kappa=\left(3\alpha^2+\nu_{12}\right)\left(\alpha^2-\nu_{12}\right)^{-1};$$

$$g(x)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma_x+i\alpha\gamma_y\right)-\Psi_0(\bar z);\quad P_y=\int_{x_0}^{x}Q_y dx;\ \overset{*}{\kappa_0}=\left(\alpha^3+\nu_{12}\right)\left(\alpha^2-\nu_{12}\right)^{-1};$$

$$r=\left(\alpha^2\nu_{21}-\nu_{12}\right)\left(\alpha^2+\nu_{12}\right)^{-1};\ \eta_1=1/\left(2D_{66}(1+\nu_{21})\right),\quad \eta_2=1/2D_{66},$$

C_0 – довільна дійсна стала, яка дорівнює P_y в точці x_0.

Використовуючи записані рівності, можна отримати різні граничні умови, яким повинні задовольняти функції $\Phi(z)$ і $\Omega(x,y)$. Якщо пластинка, крім зусиль, що діють на контурі L, навантажена також в деякій точці $z=z_0$ області D^- зосередженою силою P_1 і зосередженою парою сил з моментом $M_1=M'_{\hat{e}}+i\alpha M'_y$, то на основі формул (8) в околі точок z_0 і $\bar z_0$ будемо мати:

$$\hat{O}(z)=A(z)+\hat{O}_*^-\quad äëÿ\quad z\to z_0;\ \hat{O}(z)=B(z)+\hat{O}_*^+\quad äëÿ\quad z\to \bar z_0,$$

де $A(z)=A_0\ln(z-z_0)+\dfrac{a_0}{z-z_0};\ B(z)=-A_0\ln(z-\bar z_0)+\dfrac{A_0(z_0-\bar z_0)-a_0}{z-\bar z_0}-\dfrac{\bar a_0(z_0-\bar z_0)}{(z-\bar z_0)^2};$

$A_0=\dfrac{\lambda P_1}{8\pi D};\ a_0=\dfrac{\lambda^2 M_1}{8\pi i D}$. $\hat{O}_*^-(z)$, $\hat{O}_*^+(z)$ – голоморфні функції в околі точок z_0 і $\bar z_0$.

При $|y|\to 0$ та $C_0=0$ залежності (8) стануть еквівалентними граничним умовам (5):

$$\begin{gathered}\kappa\hat{O}^-(x)+\hat{O}^+(x)=-\eta_2 f_2(x)+\frac{4}{5}\overset{*}{\kappa_0}(\alpha-1)\Omega''_{xy}-\frac{2}{5}i\alpha\left(R_2+\alpha^2k_0^2\Omega\right)+\Psi_0^+(x);\\ 2iD_1\alpha\left[\hat{O}^-(x)-\overline{\hat{O}^-(x)}\right]=-P_y+K_y\Omega+C_0,\end{gathered}\tag{9}$$

де $\hat{O}^-(x)$ і $\hat{O}^+(x)$ – граничні значення $\Phi(z)$ на L із сторони D^- і D^+.

При цьому надалі будемо вважати, що функції $f_i(x)$ задовольняють на L умові Гельдера [2] — $\left|f(x_2)-f(x_1)\right|<R|x_2-x_1|^{\lambda}$, де x_1 і x_2 – довільні точки на L, R і λ $(0<\lambda\le 1)$ — додатні числа, а для великих $|x|$ виконується нерівність —

$$\left|f(x)-f(\infty)\right|<C|x|^{-\alpha},\quad C>0,\quad \alpha>0.\tag{10}$$

У роботах [2], [3], показано, що для розв'язку системи рівнянь (9) комплексні потенціали $\Phi(z)$, в областях D^-і D^+, також функції кручення $\Omega(x,y)$ та $\Psi_0(x,y)$, достатньо представити у вигляді інтегралів типу Фур'є:

$$\begin{gathered}\hat{O}(z)=\int_0^\infty a(\tau)e^{-i\tau z}d\tau,\quad z\in D^-;\ \hat{O}(z)=\int_0^\infty \hat{a}(\tau)e^{i\tau z}d\tau,\quad z\in D^+;\\ \Omega(x,y)=i\int_0^\infty\left[r(\tau)e^{i\tau x}-\bar r(\tau)e^{-i\tau x}\right]e^{\beta y}d\tau,(y<0).\end{gathered}\tag{11}$$

$$\Psi_0(x,y) = i\cdot\int_0^\infty\left[c(\tau)e^{i\alpha\tau x} + d(\tau)e^{-i\alpha\tau x}\right]e^{-\tau y}d\tau, \quad (y>0).$$

Тут $\beta = \sqrt{\tau^2 + k_0^2}$, , $a(\tau)$, $\hat{a}(\tau)$, $r(\tau)$, $c(\tau)$, $d(\tau)$ – довільні функції від τ, інтеграли від яких сходяться при $y = 0$. Риска над символом $r(\tau)$ означає комплексне спряження. При умові, що на нескінченності напружений стан в пластині відсутній, функції $f_i(x)$ можна представити у вигляді:

$$f_i(x) = \int_0^\infty\left[F_i(\tau)e^{i\tau x} + F_i(-\tau)e^{-i\tau x}\right]d\tau, \quad F_i(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_i(x)e^{-i\tau x}dx.$$

У випадках першої і другої крайових задач функцію $\Psi_0^+(x)$ можна покласти рівною нулю. Для змішаної задачі, шляхом певного підбору, вона може служити засобом значного спрощення крайових умов.

Розв'язок поставленої крайової задачі зводиться до знаходження виразів $a(\tau)$, $\hat{a}(\tau)$, $r(\tau)$ з системи рівнянь (11), яку легко отримати з співвідношень (9). Зокрема, для випадку трансверсально-ізотропного матеріалу, одержимо:

$$\kappa\cdot a(\tau) + \frac{4}{5}\tau(\beta-\tau)\bar{r}(\tau) = -\eta_2F_0(-\tau); \ \hat{a}(\tau) + \frac{4}{5}\tau(\beta+\tau)r(\tau) = -\eta_2F_0(\tau);$$
$$2a(\tau) + \frac{K'}{D}\cdot\bar{r}(\tau) = \frac{iF_1(-\tau)}{D}, \quad K' = \frac{4}{3}G'h. \qquad (12)$$

У випадку, коли перша основна задача розв'язується у постановці класичної теорії згину ортотропних тонких пластинок, функція кручення $\Omega(x,y)\equiv 0$ і граничні умови (9) зводяться тільки до однієї:

$$\kappa\hat{O}^-(x) + \hat{O}^+(x) = -\eta_2 f_2(x). \qquad (13)$$

Розв'язок цієї крайової задачі можна записати у вигляді:

$$\hat{O}(z) = \frac{\eta_2}{2i\kappa}\int_L\frac{f_2(\tau)d\tau}{\tau - z} + A(z), \ z\in D^-, \ \hat{O}(z) = -\frac{\eta_2}{2\pi i}\int_L\frac{f_2(\tau)d\tau}{\tau - z} + B(z), \ z\in D^+ \qquad (14)$$

Легко переконатись, що вирази (14) задовольняють нульовим умовам на нескінченності.

Якщо на краю пластинки діє тільки моментне навантаження $M_y = m_0\cdot\cos\tau x$, $(H_{xy} = Q_y = 0)$, то вирази для функцій Φ і Ω можна вибрати у спрощеному вигляді І.Прусова [3]:

$$\hat{O}(z) = ae^{-i\tau z} \text{ ïðè } z\in D^-, \ \hat{O}(z) = \hat{a}e^{i\tau z} \text{ ïðè } z\in D^+,$$
$$\Omega(x,y) = ir\left(e^{i\tau x} - e^{-i\tau x}\right)e^{\beta y}, \qquad (y<0), \qquad (15)$$

де a, $\hat{a}$, r, τ, β – довільні дійсні сталі. Функції $f_i(x)$ і $F_i(\tau)$ при такому навантаженні можна записати наступним чином

$$2f_2(x) = m_0\left(e^{i\tau x} + e^{-i\tau x}\right); 2F_0(\tau) = m_0, \quad f_1(x) = F_1(\tau) = 0.$$

Розв'язки системи (15) при таких умовах, мають вигляд:

$$a(\tau) = -\frac{\eta_2\cdot m_0}{4\varepsilon\tau(\beta-\tau) - 2\kappa}; \ \hat{a}(\tau) = \frac{2\varepsilon\eta_2 m_0\tau(\tau+\beta)}{4\varepsilon\tau(\beta-\tau) - 2\kappa}; r(\tau) = -\frac{2{,}5\varepsilon\eta m_0}{4\varepsilon\tau(\beta-\tau) - 2\kappa}. \qquad (16)$$

Використавши останню формулу системи (2), знаходимо вираз для згинального моменту M_x:

$$M_x = -m_0\left[1-\frac{2(1+\nu)(\tau+\beta)}{(3+\nu)(\tau+\beta)-4\tau}\right]\cos\tau x. \qquad (17)$$

Отриманий вираз (17) для згинального моменту M_x за формою співпадає з відомим виразом І. Прусова [3]. Але значеннями вони будуть відрізнятись при певних величинах τ і β. Причина в тому, що згідно теорії І. Прусова величина $k_0^2 = 3\frac{G'}{G}\cdot h^{-2}$, а в запропонованій моделії — $k_0^2 = 2,5\frac{G'}{G}h^{-2}$. Ще більшою буде різниця між результатами при визначенні напружень σ_x. У відповідності з формулами (2) напруження σ_x для трансверсально–ізотропного матеріалу можна представити у вигляді:

$$\sigma_x = \frac{3M_x}{2h^3}\cdot\gamma + \frac{3}{2}\cdot\frac{G}{G'}\cdot\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial Q_y}{\partial y}\right)\cdot f(\gamma), \qquad (18)$$

де
$$f(\gamma) = \frac{\gamma}{5h}\left(1-\frac{5}{3}\cdot\frac{\gamma^2}{h^2}\right)(1-\nu)^{-1}.$$

Поклавши $(\gamma = \pm h)$, будемо мати:

$$\sigma_x = \pm\frac{3M_x}{2h^2} \mp \frac{G/G'}{5(1-\nu)}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial Q_y}{\partial y}\right). \qquad (19)$$

У виразах (18), (19) тільки перший член, відповідає теорії І. Прусова (він такий самий як і в теорії тонких пластин Ґ. Кірхгофа). Другий член є уточненням формули для σ_x за рахунок нелінійності тангенціальних переміщень відносно поперечної координати γ. Вираз в дужках записується через функції $\Phi(z)$ та $\Omega(x,y)$ наступним чином:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial Q_y}{\partial y} = -2(1-\nu)D\left[\hat{O}''(z) + \overline{\hat{O}''(z)}\right] - (1-\nu)\cdot K'\cdot\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}. \qquad (20)$$

З урахуванням виразів (16), (17), будемо мати:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial Q_y}{\partial y} = -\frac{m_0\tau^2\left(e^{-i\tau z} + e^{i\tau\bar{z}}\right)}{\kappa - 1,6D\cdot\tau(\beta-\tau)/K'} + \frac{m_0\tau\cdot\beta\cdot\left(e^{i\tau x} + e^{-i\tau x}\right)\cdot e^{\beta y}}{\kappa - 1,6D\cdot\tau(\beta-\tau)/K'}. \qquad (21)$$

Граничні значення виразу (21) на краю $L(y=0)$ пластини будуть наступними:

$$\frac{\partial Q_x^-}{\partial x} + \nu\frac{\partial Q_y^-}{\partial y} = \frac{2m_0\tau k_0^2(1-\nu)}{(3+\nu)(\tau+\beta)-4\tau}\cos\tau x. \qquad (22)$$

Підставивши формулу (22) в (19) і, враховуючи (17), отримаємо:

$$\sigma_x = \mp\frac{3m_0}{2h^2}\left[1-\frac{2(1+\nu)(\tau+\beta)-2\tau/3}{(3+\nu)(\tau+\beta)-4\tau}\right]\cos\tau x. \qquad (23)$$

Аналіз формули (23) показує, що для отримання розв'язку класичної теорії тонких пластинок ($G/G'=0$) досить спрямувати відношення $\tau/\beta \approx \tau/k_0 \approx \tau h\sqrt{G/G'} \to 0$. У результаті, для значень $\tau \neq 0$, будемо мати:

$$\sigma_x = \mp\frac{3m_0}{2\kappa h^2}\cos\tau x,\ \kappa = \frac{3+\nu}{1-\nu}. \qquad (24)$$

Формула (24) співпадає з відповідним результатом, отриманим І. Прусовим [3], для випадку тонких пластинок Ґ. Кірхгофа. Разом з тим, за певних значень параметра τ, наприклад для

$\tau = k_0, \nu = 1/3$, напруження σ_x може поміняти знак на протилежний (порівняно із класичним результатом) і буде дорівнювати:

$$\sigma_x = \pm 2{,}13 \frac{3m_0}{2\kappa h^2} \cos k_0 x. \tag{25}$$

Висновки. Аналізуючи вище викладене, можна зробити такі висновки:

1. Для випадку ортотропного матеріалу з однаковими уявними коренями характеристичного рівняння виводяться нові співвідношення уточненої теорії пластин у комплексній формі. Отримані співвідношення набагато зручніші для застосування методу лінійного спряження від уже відомих в літературі.

2. На базі виведених формул дається постановка і розв’язок першої основної крайової задачі для півнескінченної транстропної пластини, навантаженої по краю моментним навантаженням $M_y = m_0 \cdot \cos \tau x.$

3. Аналіз отриманих результатів для напружень σ_x показує, що їх значення можуть поміняти знак на протилежний і більше ніж удвічі перевищувати амплітудні значення (порівняно із класичним результатом) теорії тонких пластин Ґ. Кірхгофа.

1. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий //Изд.2, ГТТИ.М., 1957. – 463 с.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили // М. Изд-во "Наука". 1966.– 708 с.
3. *Прусов И.А.* Метод сопряжения в теории плит / И.А. Прусов // Минск: Изд-во БГУ, 1975. – 256 с.
4. *Савин Г.Н.* Концентрация напряжений около отверстий / Г.Н.Савин - М.,Л.: Гостехиздат, 1951. – 496 с.
5. *Шваб’юк В.І.* Комплексне подання уточнених рівнянь згину ортотропних пластин з тріщинами / В.І. Шваб’юк //Машинознавство. Львів: 1999, № 4. – С. 51-55.

Стаття надійшла до редакції 26.04.2013.