УДК 539.3: 681.3.06

О.В. Горик, С.Б. Ковальчук

ЗГИН КОМПОЗИТНИХ ПРИЗМАТИЧНИХ БРУСІВ В УМОВАХ ОБМЕЖЕНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

У роботі розглядаються задачі згину композитних призматичних брусів із проміжними закріпленнями, що обмежують його прогини. На основі співвідношень ітераційної зсувної моделі деформування композитних брусів із використанням варіаційних принципів отримані загальні визначальні рівняння моделі у випадку наявності умов різного типу накладених на переміщення точок циліндричної поверхні, що належать головній площині жорсткості бруса. Розглянуті деякі типи умов та задачі згину брусів із обмеженим деформуванням, що їм відповідають

Ключові слова: *композит, брус, згин, обмеження, деформації, умови*
Форм. 19. Рис. 3. Літ. 9.

А.В. Горик, С.Б. Ковальчук

ИЗГИБ КОМПОЗИТНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ БРУСЬЕВ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

В работе рассматриваются задачи изгиба композитных призматических брусьев с промежуточными закреплениями, которые ограничивают его прогибы. На основе соотношений итерационной сдвиговой модели деформирования композитных брусьев с использованием вариационных принципов получены общие определяющие уравнения модели в случае наличия условий различного типа наложенных на перемещение точек цилиндрической поверхности, принадлежащих главной плоскости жесткости бруса. Рассмотрены некоторые типы условий и задачи изгиба брусьев с ограниченным деформированием которые им соответствуют

Ключевые слова: *композит, брус, изгиб, ограничения, деформации, условия*

A. Goryk, S. Kovalchuk

BENDING COMPOSITE PRISMATIC BARS IN CONDITIONS OF LIMITED DEFORMATION

In paper considers the problem of bending composite prismatic beams with intermediate restraints that limit its deflection. On the basis relations of the iterative model of deformation composite beams using variational principles obtained general constitutive equations of the model in the case of different types of conditions that imposed on the movement of the points of cylindrical surface of the beam. Considered some types of conditions and the problem of bending beams with limited deformation associated with them

Keywords: *composite, bar, bending, deformation, conditions.*

Постановка проблеми. Композитні матеріали поєднують у собі декілька різнорідних матеріалів із відмінними фізико-механічними властивостями. Але, по суті, композити – не просто матеріали, у традиційному розумінні цього слова, а своєрідні конструкції, які мають певну будову (черговість шарів, розташування армуючих елементів і ін.), що проектується під конкретні умови роботи. Це дозволяє у значних межах змінювати механічні властивості композитних елементів, підкреслювати корисні властивості традиційних матеріалів та зменшувати негативні. Тому одним із напрямів підвищення економічності, надійності та зниження ресурсоємності нових конструкцій у сучасному машинобудуванні та будівництві, а також зниження собівартості відновлення вже існуючих конструкцій, є застосування сучасних композитів.

У інженерних конструкціях різного призначення велика кількість елементів у вигляді стержнів різних перерізів працює на поперечний згин. Досить часто такі елементи працюють в умовах обмеженого деформування, що обумовлюється наявністю проміжних пов'язей різного типу, як то додаткові жорсткі та пружні опори, ділянки пружної основи та інше. Якщо для однорідних брусів із обмеженим деформуванням методики розв'язання різних задач добре відпрацьовані і загальновідомі, то для композитних брусів такі задачі залишаються практичного невисвітленими у наукові літературі.

Аналіз існуючих досліджень. Аналізу досягнень розвитку моделювання роботи композитних систем у різних умовах деформування присвячений ряд оглядів [3, 4, 2, 9, 8], а результати досліджень увійшли у довідникову і монографічну літературу, наприклад, [6, 5]. Слід відмітити, що існуючі дослідження композитних елементів конструкцій стосуються переважно деформування шаруватих плит і оболонок, про що свідчить значна кількість наукових праць, присвячених даним питанням. Значно менше наукової інформації щодо деформування композитних брусів, що обумовлено їх більш складною структурною будовою.

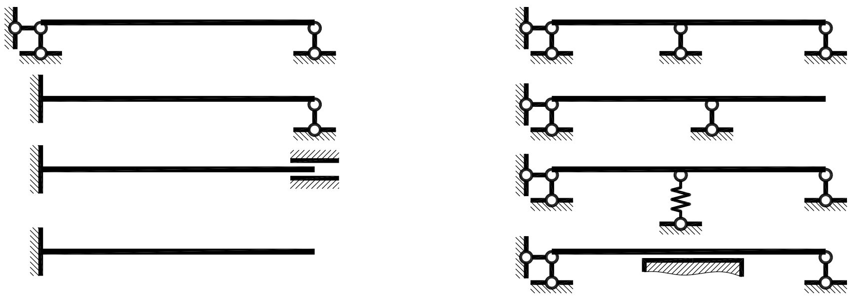
Окремим напрямом теоретичного дослідження механіки деформування композитів є ітераційне моделювання, вихідні положення якого сформульовані С.О. Амбарцумяном. Розвиток аналітичної теорії із використанням ітераційних принципів у механіці шаруватих композитних систем, що за останні десятиріччя набула значного розвитку стосовно задач деформування пластин та оболонок, висвітлений у [7]. Щодо механіки деформування композитних брусів, ітераційний підхід реалізований у [1], де побудовано ітераційну зсувну модель згину композитних брусів довільного наближення.

Механіка деформування однорідних брусів в умовах обмеженого деформування детально розроблена і описана у науковій літературі у вигляді окремих типів задач таких, як поперечний згин нерозрізних балок на жорстких, чи пружних опорах, пружній однорідній, чи неоднорідній основі, методики розв'язання яких описані у численній літературі із будівельної механіки. Натомість моделювання подібних задач для брусів неоднорідної структурної будови, у науковій літературі практично не висвітлене.

Невирішені частини проблеми. У ході аналізу наукових джерел встановлено, що при моделюванні згину композитних брусів дослідники обмежуються розглядом випадків різного типу закріплень на кінцях бруса. Тому, зважаючи на достатньо велику розповсюдженість у конструкціях брусів, що працюють в умовах обмеженого згину, дослідження питань моделювання роботи композитних брусів в таких умовах є актуальною проблемою.

Метою дослідження є розробка загальних підходів до розв'язання задач згину композитних брусів за наявності проміжних закріплень різного типу між крайніми перерізами.

Основні результати дослідження. Опорні вузли значної частини згинальних елементів у конструкціях розташовані поблизу, або безпосередньо на їхніх кінцях. Під дією зовнішнього навантаження такі бруси загалом вільно деформуються між крайніми закріпленнями, тобто відсутні зовнішні обмеження переміщень проміжних перерізів бруса (рис. 1, *а*). Але на практиці зустрічаються такі згинальні елементи, деформування яких додатково обмежується певними чинниками, що діють на частину бруса, розташовану між крайніми перерізами (рис. 1, *б*). У якості таких чинників можуть виступати різного типу додаткові опорні вузли, контактна взаємодія із відносно жорсткими, чи піддатливими елементами конструкції, пружним середовищем, вимушені переміщення спричинені неточністю виготовлення елементів конструкції, їх монтажу та інші. Такі бруси будемо у подальшому називати брусами із обмеженими умовами деформування, не виділяючи окремо тип наявного обмеження.



а) *б)*

Рис. 1. **Схеми закріплення брусів** [авторська розробка]

Практично всі задачі згину брусів із обмеженим деформуванням є статично невизначними, але в той же час не можна сказати, що всі статично невизначні задачі відносяться до задач із обмеженим деформуванням. Наприклад, друга та третя схеми на рис. 1, *а* є статично невизначними, але переміщення прольотної частини балки нічим не обмежується, тому вона перебуває в умовах вільного деформування. Натомість двоопорна балка із консоллю на рис. 1, *б* є статично визначною, але має бути віднесена до балок із обмеженим деформуванням, оскільки її прогини обмежуються жорсткою шарнірною опорою, розташованою між торцевими перерізами.
Деякі із задач згину, в залежності від прийнятих допущень, можна розглядати, і як задачі із обмеженим деформування, і як задачі із вільним деформуванням. Наприклад, балка-консоль, якщо при моделюванні жорсткого закріплення виключити із розгляду частину бруса занурену у середовище, і розглядати лише вільну його частину із жорстким закріпленням лівого торця (рис. 2, *а*), то такий брус не перебуватиме у обмежених умовах деформування. Якщо ж розглядати роботу такого бруса разом із зануреною у середовище частиною (рис. 2, *б*), то деформування такого бруса буде обмеженим, оскільки на переміщення зануреної частини бруса, що знаходиться між торцевими перерізами будуть накладені обмеження у вигляді пружних чверть-просторів.

Рис. 2. **Моделювання жорсткого закріплення** [авторська розробка]

Незважаючи на те, що різноманітні задачі згину можна віднести до задач із обмеженим деформуванням, більшість їх об'єднує те, що зовнішні обмеження стосуються прогинів бруса. Тому було розглянуто випадок обмеженого деформування дискретно-неоднорідного бруса із обмеженнями його прогинів (рис. 3).

Призматичний прямий композитний брус (рис. 3) із незмінними за довжиною формою та структурною будовою поперечного перерізу, утворюють n дискретних фаз k, жорстко зв'язаних на границях і виконаних із різнорідних пружних матеріалів. Поперечний переріз бруса симетричний, як за формою, так і за структурою, принаймні, відносно осі OZ.

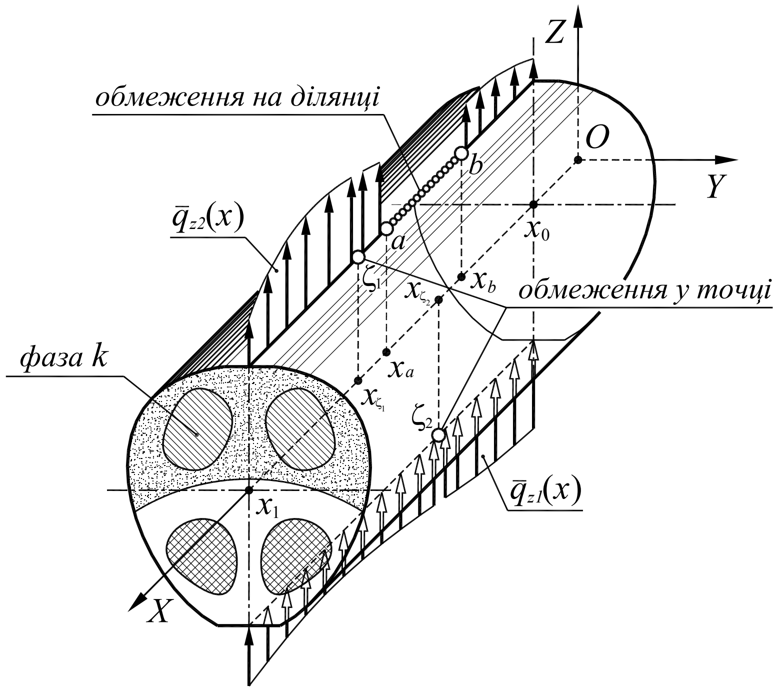


Рис. 3. **Схема навантаження та обмежень деформуванню бруса** [авторська розробка]

Для бруса обрано декартову систему координат XYZ. Вісь OX співпадає з поздовжньою віссю жорсткості бруса, а осі OY та OZ лежать в головних площинах жорсткості бруса. Матеріал фаз композита є ізотропним, або володіє властивостями трансверсальної ізотропії. Тобто відомі пружні властивості матеріалу довільної фази k, описані сукупністю пружних констант $E_x^{(k)}$, $E_y^{(k)}$,

$$E_z^{(k)},\ G_{xz}^{(k)},\ G_{xy}^{(k)},\ \nu_{xz}^{(k)},\ \nu_{xy}^{(k)}.$$

Брус знаходиться під дією нормальних розподілених зовнішніх навантажень $\bar{q}_{z1}$ та $\bar{q}_{z2}$, зведених до головної площини жорсткості XOZ. На ряд окремих точок та відрізків на циліндричній поверхні бруса, що належать головній площині XOZ накладені обмеження переміщень вздовж осі OZ (вертикальних переміщень).

З точки зору теорії пружності усі задачі із обмеженим деформуванням відносяться до задач із граничними умовами змішаного типу – коли на деякій ділянці поверхні тіла задані статичні граничні умови, а для частини точок поверхні задані геометричні умови (переміщення). Умови у переміщеннях фактично моделюють той чи інших спосіб закріплення тіла, тому зважаючи на основні принципи механіки, можуть бути замінені деякими реактивними навантаженнями $\bar{q}_{z1}^{r}$ та $\bar{q}_{z2}^{r}$, які за впливом на переміщення закріплених точок еквівалентні закріпленням, але закон розподілу яких є невідомим. Такий підхід дозволяє при визначенні напружень та деформацій скористатися відомими розв’язками теорії пружності для композитних брусів, у яких статичні умови складатимуть повні навантаження: $\bar{q}'_{z1} = \bar{q}_{z1} + \bar{q}^r_{z1}$, $\bar{q}'_{z2} = \bar{q}_{z2} + \bar{q}^r_{z2}$.

Серед існуючих аналітичних моделей, побудованих за ітераційним принципом, найбільш розвинутою є депланаційна модель згину дискретно-неоднорідних брусів розроблена у [1]. Дана модель дозволяє із довільним наближення отримувати розв’язки задач згину композитних брусів із урахуванням поперечних зсувів та обтиснення. Якщо відкинути врахування поперечного обтиснення, то ітераційній моделі на довільному кроці наближення m відповідатимуть співвідношення для напружень:

$$\sigma_{mx} = E_x\left(\frac{du_m}{dx} - \frac{d^2 w_m}{dx^2}\psi_0 - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{d^2\chi_{mi}}{dx^2}\psi_i\right)\right), \tag{1}$$

$$\tau_{mxz} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{d\chi_{mi}}{dx} f_{i-1}\right), \tag{2}$$

та деформацій:

$$\varepsilon_{mx} = \frac{\sigma_{mx}}{E_x}, \qquad \gamma_{mxz} = \frac{\tau_{mxz}}{\bar{G}_{xz}}, \tag{3}$$

де $w_m = w_m(x)$, $\chi_{mi} = \chi_{mi}(x)$ – шукані функції, відповідно вертикальних переміщень та зсувів; $\psi_{mi} = \psi_{mi}(z)$ – функції розподілу поздовжніх переміщень по висоті поперечного перерізу бруса; $f_{(i-1)} = f_{(i-1)}(z)$ – функції розподілу складових дотичних напружень; $E_x = E_x(y,z)$ – функція поздовжнього модуля пружності; $\bar{G}_{xz} = \bar{G}_{xz}(z)$ – функція усередненого по ширині перерізу бруса модуля зсуву.

У співвідношеннях (1) та (2) функції розподілу по висоті перерізу поздовжніх деформацій та дотичних напружень визначаються за інтегральними співвідношеннями, наведеними у [1], де детально описана методика їх визначення для брусів із перерізами, що утворені елементами фаз прямокутної форми.

Співвідношення для напружень (1), (2) та деформацій (3), після введення позначення для вертикальних переміщень $w_m(x) = \chi_{m0}$ отримають наступний вигляд:

$$\sigma_{mx} = E_x\sum_{i=0}^{m}\frac{d^2\chi_i}{dx^2}\xi_i, \qquad \tau_{mx} = \sum_{i=1}^{m}\frac{d\chi_i}{dx} f_{i-1}, \tag{4}$$

$$\varepsilon_{mx} = \frac{\sigma_{mx}}{E_x}, \qquad \gamma_{mxz} = \frac{\tau_{mxz}}{\bar{G}_{xz}}, \tag{5}$$

де: ξ_i – функції розподілу поздовжніх переміщень, отримані після виключення першої похідної функції u_m із використанням умови відсутності поздовжнього стиску бруса. У виразах (4) та (5) для компактності подальших теоретичних викладок опущений перший індекс у позначенні функцій $\chi_{mi} = \chi_i$.

Співвідношення (4), для визначення напружень за ітераційною моделлю, залежать від невідомих функцій χ_i визначення яких і складає подальше розв’язання задачі. Для відшукання даних функцій був використаний принцип мінімуму повної енергії пружного тіла.

Відповідно до (4) та (5) повна енергія композитного бруса запишеться так:

$$W = \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{1}{2}\int_A\left(E_x\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{d^2\chi_i}{dx^2}\xi_i\right)^2 + \frac{1}{\bar{G}_{xz}}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{d\chi_i}{dx} f_{(i-1)}\right)^2\right)dA - \bar{q}_z\chi_0\right)dx, \tag{6}$$

де $\bar{q}_z = \bar{q}_{z1}(x) + \bar{q}_{z2}(x)$ – зведене до головної площини бруса зовнішнє нормальне навантаження (рис. 3); A – площа поперечного перерізу бруса.

Якщо у випадку закріплень лише на кінцях бруса функції χ_i повинні надавати повній енергії (6) безумовний мінімум, то за наявності проміжних закріплень (рис. 3) вони також мають відповідати певним умовам, які накладають закріплення.

Був розглянутий загальний випадок, коли наявні проміжні закріплення накладають на шукані функції умови у вигляді системи виразів:

$$\vartheta_j\left(x,\chi_0,\chi_1,\ldots\chi_m,\chi_0^{(1)},\chi_1^{(1)},\ldots\chi_m^{(1)}\right)=0\,,\ j=1,2,\ldots,n;\ n<2m\,, \tag{7}$$

де: $f^{(1)}=df/dx$.

Таким чином, було поставлено задачу відшукання умов мінімуму функціонала (6) у випадку наявних умов (7), накладених на деякі точки циліндричної поверхні бруса, що і складає подальше розв'язання задачі згину із обмеженим деформуванням. Повна енергія (6) є функціоналом, що залежить від функцій χ_i та їх похідних до другого порядку включно

$$W=\int_{x_0}^{x_1}J\left(x,\chi_0,\chi_1,\ldots,\chi_m,\chi_0^{(1)},\chi_1^{(1)},\ldots,\chi_m^{(1)},\chi_0^{(2)},\chi_1^{(2)},\ldots,\chi_m^{(2)}\right)dx\,. \tag{8}$$

З математичної точки зору задача дослідження на екстремум функціонала (8) за наявних умов (7) є варіаційною задачею на умовний екстремум. При отримані необхідних умов екстремуму розглядались два випадки: коли умови стосуються окремої точки поверхні (обмеження у точці); коли умови (7) стосуються сукупності точок поверхні, що утворюють відрізок (обмеження на ділянці).

Для випадку, коли умови (7) стосуються деякої точки ζ з координатою $x_\zeta\in\left(x_0,x_1\right)$, необхідні умови екстремуму функціонала (8) отримані у наступному вигляді

$$\frac{\partial J}{\partial\chi_k}-\frac{d}{dx}\frac{\partial J}{\partial\chi_k^{(1)}}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial J}{\partial\chi_k^{(2)}}+\sum_{j=1}^{n}\left(\Delta_{x_\zeta}\lambda_j\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\chi_k}-\frac{d}{dx}\left(\Delta_{x_\zeta}\lambda_j\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\chi_k^{(1)}}\right)\right)=0, \tag{9}$$

де: $\Delta_{x_\zeta}=\Delta\left(x-x_\zeta\right)$ – дельта функція Дірака локалізована у точці $x=x_\zeta$; $\lambda_j=\lambda_j\left(x\right)$ – деякі невідомі функції (невідомі множники); $k=\overline{0,\,m}$ – індекс розгортає систему умов по вертикалі.

Разом з умовами (9) були отримані додаткові рівняння для визначення невідомих множників λ_j

$$\Delta_{x_\zeta}\vartheta_{k-m}=0\,,\ k=\overline{m+1,m+n}\,. \tag{10}$$

У випадку, коли умови (7) стосуються деякої безперервної сукупності точок, що утворюють відрізок $\left[a,b\right]$ з координатами $x_a,x_b\in\left(x_0,x_1\right)$ (рис. 3) необхідні умови отримані у такому вигляді:

$$\frac{\partial J}{\partial\chi_k}-\frac{d}{dx}\frac{\partial J}{\partial\chi_k^{(1)}}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial J}{\partial\chi_k^{(2)}}+\sum_{j=1}^{n}\left(Q_{[a,b]}\lambda_j\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\chi_k}-\frac{d}{dx}\left(Q_{[a,b]}\lambda_j\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\chi_k^{(1)}}\right)\right)=0, \tag{11}$$

де: $Q_{[a,b]}$ – характеристична функція проекції відрізка $\left[a,b\right]$ на вісь OX; $k=\overline{0,\,m}$.

Додаткові рівняння у такому випадку мають наступний вигляд:

$$Q_{[a,b]}\vartheta_{k-m}=0\,,\ k=\overline{m+1,m+n}\,. \tag{12}$$

Після застосування підінтегрального виразу (6), в умовах екстремуму функціонала (9) та (11), були отримані системи диференціальних рівнянь, яким мають відповідати шукані функції χ_i при наявних обмеженнях відповідного типу.

Умова (9), яка відповідає випадку обмежень у точці ζ, після розгортання має наступний вигляд:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{m}D_{0i}\frac{d^4\chi_i}{dx^4}=\overline{q}_z-\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta_{x_\zeta}\lambda_j\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\chi_0}-\frac{d}{dx}\left(\Delta_{x_\zeta}\lambda_j\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\chi_0^{(1)}}\right)\right);\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{m}D_{ki}\frac{d^4\chi_i}{dx^4}-\sum_{i=1}^{m}D_{(k-1)i}\frac{d^2\chi_i}{dx^2}=-\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta_{x_\zeta}\lambda_j\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\chi_k}-\frac{d}{dx}\left(\Delta_{x_\zeta}\lambda_j\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\chi_k^{(1)}}\right)\right),\ k=\overline{1,\,m}.\end{cases} \tag{13}$$

де: $D_{ki}=\int_A\left(E_x\xi_k\xi_i\right)dA$ – характеристики жорсткості композитного бруса.

Умова (11), яка відповідає випадку обмежень на ділянці $\left[a,b\right]$, після розгортання запишеться так:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{m} D_{0i} \dfrac{d^4\chi_i}{dx^4} = \overline{q}_z - \sum_{i=1}^{n}\left(Q_{[a,b]}\lambda_j \dfrac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_0} - \dfrac{d}{dx}\left(Q_{[a,b]}\lambda_j \dfrac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_0^{(1)}} \right)\right); \\ \sum_{i=0}^{m} D_{ki} \dfrac{d^4\chi_i}{dx^4} - \sum_{i=1}^{m} D_{(k-1)i} \dfrac{d^2\chi_i}{dx^2} = -\sum_{i=1}^{n}\left(Q_{[a,b]}\lambda_j \dfrac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_k} - \dfrac{d}{dx}\left(Q_{[a,b]}\lambda_j \dfrac{\partial \vartheta_j}{\partial \chi_k^{(1)}} \right)\right),\ k = \overline{1,m}. \end{cases} \quad (14)$$

Системи рівнянь (13) та (14) разом із відповідними додатковими рівняннями дозволяють моделювати різні задачі згину композитних брусів із обмеженим деформуванням, задаючись тими, чи іншими умовами ϑ_j. Наприклад, ідеальному шарнірно рухомому вздовж осі OX закріпленню деякої точки ζ бруса відповідає умова $\vartheta_1 = \chi_0 = 0$ і, відповідно до (13), визначальна система диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{m} D_{0i} \dfrac{d^4\chi_i}{dx^4} = \overline{q}_z - \Delta_{x_\zeta}\lambda_1; \\ \sum_{i=0}^{m} D_{ki} \dfrac{d^4\chi_i}{dx^4} - \sum_{i=1}^{m} D_{(k-1)i} \dfrac{d^2\chi_i}{dx^2} = 0,\ k = \overline{1,m}. \end{cases} \quad (15)$$

Значення невідомого множника $\lambda_1\Big|_{x_\zeta}$ можна отримати за допомогою додаткового рівняння (10), яке набуде наступного вигляду

$$\chi_0\Big|_{x=x_\zeta} = 0. \quad (16)$$

Заданому вертикальному переміщенню шарнірного рухомого закріплення точки ζ відповідає умова $\vartheta_1 = \chi_0 - \delta = 0$, де δ – задана величина переміщення точки ζ. Система визначальних рівнянь при цьому має вигляд аналогічний (15). Але додаткове рівняння матиме відмінний від попереднього випадку вигляд:

$$\chi_0\Big|_{x=x_\zeta} = \delta. \quad (17)$$

Аналогічно отримані інші співвідношення, які моделюють задачі із лінійно-пружними проміжними опорами. Можливий, також, розгляд задач із нелінійно-пружними закріпленнями, але у цьому випадку обов'язковою є перевірка необхідних умов мінімуму повної енергії бруса.
Розглядаючи умови накладених на сукупність точок, що складають відрізок, можна прийти до моделювання задач згину композитних брусів на суцільній, чи дискретній пружній основі або затиснених у пружне середовище. Наприклад, пружна основа із коефіцієнтом пропорційності c за гіпотезою Вінклера накладає на переміщення точок поверхні бруса умову $\vartheta_1 = c\chi_0 - \overline{q}_{zi}^{r} = 0$, $i = 1, 2$. Якщо дана умова стосується точок відрізка $[a,b]$, що відповідає контакту деякої ділянки бруса із пружною основою, то відповідно до (14) визначальна система рівнянь задачі матиме вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{m} D_{0i} \dfrac{d^4\chi_i}{dx^4} = \overline{q}_z - Q_{[a,b]}c\chi_0; \\ \sum_{i=0}^{m} D_{ki} \dfrac{d^4\chi_i}{dx^4} - \sum_{i=1}^{m} D_{(k-1)i} \dfrac{d^2\chi_i}{dx^2} = 0,\ k = \overline{1,m}. \end{cases} \quad (18)$$

Тут за допомогою додаткового рівняння (12) вже виключений невідомих множник λ_1, який у даній задачі за фізичною суттю є невідомим вертикальним переміщенням χ_0 закріплених точок. Для бруса на суцільній пружній основі $a = x_0$, $b = x_1$, тоді для усіх перерізів бруса $Q_{[a,b]} = 1$, відповідно система (18) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{m} D_{0i} \dfrac{d^4\chi_i}{dx^4} = \overline{q}_z - c\chi_0; \\ \sum_{i=0}^{m} D_{ki} \dfrac{d^4\chi_i}{dx^4} - \sum_{i=1}^{m} D_{(k-1)i} \dfrac{d^2\chi_i}{dx^2} = 0,\ k = \overline{1,m}. \end{cases} \quad (19)$$

Зауважимо, що для випадків коли на брус накладені і розподілена, і зосереджена умови, зважаючи на властивості функціонала (8), як визначеного інтеграла, моделювання зводиться до суперпозиції рівнянь (13) та (14), яка має розв'язуватись сумісно із додатковими рівняннями (10) та (12). Теж саме відноситься і до випадків коли ділянок, чи точок поверхні бруса, на які накладені умови, декілька. Відмітимо також те, що розподілені умови при спрощеному моделюванні можуть бути замінені деякою сукупністю зосереджених умов. Це дозволяє спростити отримання результатів моделювання важливих практичних задач.

Висновки. Розроблений підхід у моделюванні згину композитних брусів за наявності проміжних закріплень, що обмежують його прогини, показує спільну основу багатьох відомих задач. Основні та додаткові рівняння, отримані із використанням співвідношень довільного наближення для напружень та деформацій інтераційної зсувної моделі згину композитних брусів дозволяють розглядати різні типи проміжних закріплень композитного бруса. В свою чергу, це дозволяє отримати визначальні співвідношення для різних практично важливих задач, таких як нерозрізні композитні балки із жорсткими, чи пружними проміжними опорами, із заданим переміщенням опор, композитні балки на суцільній, чи дискретній пружній основі. Подальші теоретичні дослідження згину композитних брусів із обмеженим деформуванням можуть проводитись, як у напрямку побудови ефективних методик розв'язання вже приведених задач, так і в напрямку дослідження різного типу умов, що може розширити коло задач.

1. *Горик О.В.* Механіка деформування композитних брусів / О.В. Горик, В.Г. Піскунов, В.М. Чередніков. – Полтава-Київ: АСМІ, 2008. – 402 с.
2. *Рассказов О.О.* Розвиток прикладної теорії і методів розв'язання задач дослідження шаруватих ортотропних оболонок та пластин / Рассказов О.О. // Вісник Транспорт. академії України і Українського транспорт. університету. – 1997. – №1. – С. 110-116.
3. *Альтенбах Х.* Основные направления теории многослойных тонкостенных конструкций. Обзор / Альтенбах Х. // Механика композитных материалов. – 1998. – Т. 34, №3. – С.333-348.
4. *Григолюк Э.И.* Современное состояние теории многослойных оболочек / Григолюк Э.И., Коган Ф.А. // Прикладная механика. – 1972. – Т.8, №6. – С. 3-17.
5. *Малмейстер А.К.* Сопротивление полимерных и композитных материалов / Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
6. Механика конструкций из композиционных материалов / [В.В Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.]; под общ. ред.. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
7. *Пискунов В.Г.* Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем / Пискунов В.Г. // Механика композит. материалов. – 2003. – Т.39, №1. – С. 2-24.
8. *Пискунов В.Г.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек / Пискунов В.Г., Рассказов А.О. // Прикладная механика. – 2001. – Т.37, №2. – С. 22-57
9. *Bogdanovich A.E.* Composite materials and structures: Science, tecnology and applications. A compendium of books, review papers, and other sources of information / Bogdanovich A.E., Sierakowski P.L. // Appl. Mech. Rev.. – 1999. – 52, №12. – P. 351–366.

Стаття надійшла до редакції 26.05.2013.