

УДК 621.824.42

Г.А. Герасимчук, Р.А. Склярів, В.В. Шанайда
**РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ
ПРОФІЛЬНИХ З'ЄДНАНЬ У СПЕЦІАЛІЗОВАНИХ ПАКЕТАХ КОМП'ЮТЕРНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ**

В статті розглядаються особливості розрахунку складнопрофільних РК-з'єднань. Сформовано математичні моделі для теоретичного аналізу РК-4 профільного з'єднання. Запропоновано алгоритм дослідження жорсткості механічної системи при крученні у середовищі багатofункціонального математичного пакета MathCAD і встановлено значення найбільших дотичних напружень. Проведено моделювання напружено-деформованого стану в РК-3 та РК-4 профільних з'єднаннях.

Ключові слова: профільне з'єднання, напружено-деформований стан, РК-4 профільне з'єднання, РК-3 профільне з'єднання, поперечний переріз.

Форм. 12. Рис. 5. Літ. 5.

Г.А. Герасимчук, Р.А. Склярів, В.В. Шанайда
**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ИССЛЕДОВАНИЕ
СЛОЖНЫХ ПРОФИЛЬНЫХ СОЕДИНЕНИЙ В СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ ПАКЕТАХ
КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.**

В статье рассматриваются особенности расчета сложнопрофильных РК-соединений. Сформирована математическая модель для теоретического анализа РК-4 профильного соединения. Предложен алгоритм исследования жесткости механической системы при кручении с использованием многофункционального математического пакета MathCAD и рассчитаны значения наибольших касательных напряжений. Проведено моделирование напряженно-деформированного состояния в РК-3 и РК-4 профильных соединениях.

Ключевые слова: профильное соединение, напряженно-деформированное состояние, РК-4 профильное соединение, РК-3 профильное соединение, поперечное сечение.

Н. Herasymchuk, R. Sklyarov, V. Shanayda
**DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL AND THE STUDY OF
COMPLEX STRUCTURE OF EQUIAXED PROFILE CONNECTIONS IN THE RELEVANT
SPECIALIZED COMPUTER MODELING PACKAGES**

Development of a mathematical model for the. The article discusses the features of calculating complex-equiaxed profile (EP) connections. An equation of the polynomial for the EP-4 profile connections. With the use of Mathcad obtained simple formulas for calculation of torsional rigidity and the value of the largest shear stresses. The simulation of the stress-strain state in the EP-3 and EP-4 profile connections.

Keywords: profile connection, the stress-strain state, EP-4 profile connection, EP-3 connection profile, the cross-section.

Постановка проблеми. Полігональні поверхні почали застосовуватись в машинобудуванні порівняно недавно і тому галузей їх застосування відносно небагато. Здебільшого вони використовуються в профільних з'єднаннях деталей машин, які є альтернативою традиційним шпонковим, шліцевим та іншим подібним з'єднанням для передачі крутильного моменту. Полігональні поверхні також знаходять своє застосування в об'ємних машинах, затискних механізмах, багатоклинових радіальних підшипниках ковзання тощо. Однак, вони не набули значного поширення внаслідок невідпрацьованості ефективних способів їх обробки. Профільні з'єднання мають більш високий ККД, в порівнянні із шпонковими і шліцевими, що приводить до зменшення витрати енергії при здійсненні роботи з передачі крутного моменту.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Незважаючи на досить велику кількість робіт в галузі дослідження обробки різанням полігональних поверхонь, переважна їх більшість присвячена дослідженню кінематики при обробці зовнішніх полігональних поверхонь [1]. Так, в роботі [2] показано переваги профільних валів за техніко-економічними показниками в порівнянні зі шпонковими та шліцевими: за згинальною жорсткістю, за максимальним прогином валу на одиницю довжини, за надійністю, за максимальним діючим згинальним моментом, показниками міцності та жорсткості. Робіт, які присвячені питанням розподілу контактних напружень в профільних з'єднаннях, є порівняно мало. Основні математичні залежності, які дозволяють провести розрахунок безшпонкових з'єднань, наведені в роботі [3]. У роботі [4] дана методика розрахунку напружено-деформованого стану при крученні деталей безшпонкових з'єднань, які використовуються в приводах прокатних станів. Вона заснована на

використанні одного з методів математичної теорії пружності - методу теорії функцій комплексної змінної в поєднанні з конформними відображеннями.

Метою досліджень є проведення аналізу і дослідження напружено-деформованого стану РК-3 та РК-4 профільного з'єднання та визначення максимальних величин напружень, які вони можуть передавати.

Виклад основного матеріалу дослідження. Наявність плавного профілю суттєво знижує рівень концентрації напружень у порівнянні зі шпонковими й шлицевими з'єднаннями. Поверхні сполучення можуть мати довільну форму, але з міркувань технологічності найчастіше вони виготовляються призматичними. Призматичне профільне з'єднання має плоскі грані, а їх перехідні ділянки обкреслені дугами кіл. Кількість граней з'єднання може бути довільною, але в практиці проектування не застосовують з'єднання із кількістю граней більше восьми. Такі з'єднання мають високу точність центрування, але через складності виготовлення профільної поверхні їх застосування істотно обмежене.

Методи розрахунків профільних з'єднань проілюструємо на прикладі конструктивної схеми призматичного типу.

Зовнішні навантаження нормальні до поверхні контакту й створюють момент щодо центру обертання. Найбільших значень нормальні напруження досягають на краях. Картина розподілу контактних напружень суттєво залежить від похибок геометричної форми, що перебувають у контакті поверхонь. Ідеальним назовемо таке з'єднання, при якому величинами похибок у контакті можна знехтувати.

Проведемо аналіз ідеального профільного з'єднання (похибки, пов'язані з помилками моделі, можуть бути скомпенсовані відповідним вибором допустимих контактних напружень). При ідеальному контакті розподіл нормальних напружень по гранях з'єднання можна вважати лінійним (рис. 1). Тоді рівняння рівноваги можна записати у такому вигляді:

$$10^3 \cdot T = z \int_0^s \frac{\sigma_{\max}^2 \cdot y}{s} l dy = \frac{z \cdot \sigma_{\max} \cdot s^2 \cdot l}{3} \quad (1)$$

де T - величина моменту, що передається; σ_{\max} - максимальне напруження в контакті; z - кількість граней з'єднання; s і l - робоча ширина й довжина грані (рис. 1).

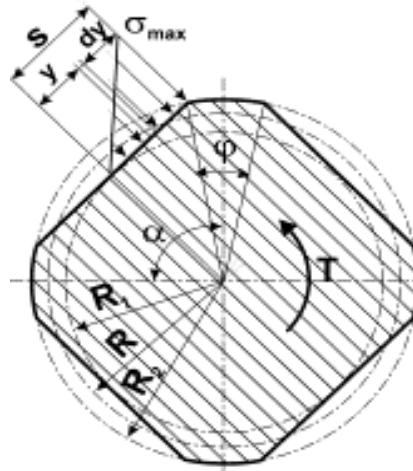


Рис. 1. Розподіл нормальних напружень по гранях профільного валу

Перевірочний розрахунок з'єднання зводиться до визначення максимального контактного напруження σ_{\max} на основі виразу (1). Умова міцності за допустимими напруженнями має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot T}{z \cdot l \cdot s^2} \leq \sigma_{\text{зм}} \quad (2)$$

Числові значення нормального допустимого напруження на з'єднання $\sigma_{\text{зм}}$ вибираються з умови відсутності пластичних деформацій на поверхні сполучених деталей.

У формулу для визначення контактних напружень (2) входить величина робочої ширини грані s . Розрахуємо цю величину. Насамперед врахуємо, що сума кутів неробочої ділянки профілю приймається рівною $\varphi = 90^\circ$, отже, $\Delta\varphi = \frac{90}{z}$; $\alpha = \frac{360}{z}$. Введемо позначення $\beta = \frac{135}{z}$.

© Г.А. Герасимчук, Р.А. Склярів, В.В. Шанайда

Тоді R_1 - радіус вписаного в багатокутник кола:

$$R_1 = \frac{s}{\tan\left(\frac{\alpha - \varphi}{2}\right)} = \frac{s}{\tan \beta}, \quad (3)$$

R_2 - радіус описаного навколо багатокутника кола:

$$R_2 = \frac{s}{\sin\left(\frac{\alpha - \varphi}{2}\right)} = \frac{s}{\sin \beta}, \quad (4)$$

а R_e - середній радіус кола:

$$R_e = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{s}{2 \cdot (\tan \beta + \sin \beta)} = \frac{s}{2} \left(\frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\sin \beta} \right). \quad (5)$$

Вирішуючи рівняння (5) відносно s і, підставляючи знайдений вираз в (2), одержуємо формулу для перевірочних розрахунків:

$$\sigma_{\max} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot T}{4 \cdot z \cdot R^2 \cdot l} \left(\frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\sin \beta} \right)^2 \leq \sigma_{\text{зм}}. \quad (6)$$

Отже, профільні з'єднання мають набагато більший рівень нормальних напружень у порівнянні зі шліцевими.

Розрахунок на міцність і жорсткість деталей профільних з'єднань пов'язаний з математичними труднощами, тому існуючі методики розрахунку побудовані на різних спрощуючих припущеннях або наближених підходах.

Проведемо розрахунок дотичних напружень при крученні валів профільних з'єднань, обмежених синусоїдальними кривими.

Розглянемо вал, контур поперечного перерізу якого обмежений гладкою кривою L (рис. 2), який має N осей симетрії (тобто N граней) і в комплексній площині описується рівнянням:

$$t = (R + e \cdot \cos(N \cdot \theta)) \cdot e^{i\theta} \quad (7)$$

де $t = e/R$ - координата поточної точки контуру; R і e - дивись на рис. 2; θ - полярний кут; $N = 4; i = \sqrt{-1}$.

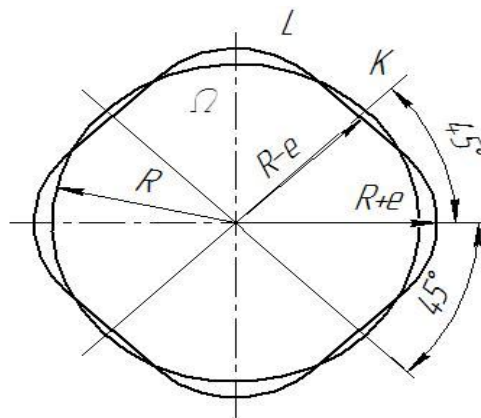


Рис. 2. Поперечний переріз профільного валу

Нехай зовнішні зусилля, діючі на вал, еквівалентні моменту M . Тоді пружно-деформований стан валу у області Ω його поперечного перерізу визначається регулярною функцією комплексної змінної $\varphi(z)$, яка на кривій L задовольняє граничній умові:

$$\varphi(t) + \overline{\varphi(\bar{t})} = t \cdot \bar{t}. \quad (8)$$

Для вирішення задачі необхідно знати функцію, яка здійснює конформне відображення зовнішності одиничного круга $|\zeta| > 1$ на зовнішність області, обмеженої кривою L . Таку функцію можна представити апроксимуючим поліномом [5]:

$$z = A \cdot \xi \cdot \sum_{n=1}^q a_n \cdot \xi^{-6(n-1)N}, \quad (9)$$

де A і a_n - коефіцієнти, які знаходять методом тригонометричної інтерполяції; q - число, залежне від необхідної точності відображення.

Функцію $\varphi(z)$ приводимо до вигляду:

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\frac{z}{R}\right)^m. \quad (10)$$

де a_m - дійсні коефіцієнти, які необхідно визначити.

Для обчислення коефіцієнтів a_m підставимо формулу (10) в граничну умову (8) з урахуванням виразу (9). Після прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях змінної ζ в обох частинах одержаної рівності приведемо його до системи лінійних рівнянь алгебри відносно a_m . Застосовуючи метод редукції до рішення системи і, зберігаючи в ній число рівнянь, що вимагається для практичних цілей, одержимо наближене рішення задачі. Потім за відомими формулами обчислимо жорсткість при крученні валу і компоненти дотичних напружень в його поперечному перерізі.

Як приклад, розглянемо вал (рис. 2) з наступними значеннями параметрів перерізу: $N=4$; $R=50$ мм; $e=2,5$ мм. При цих параметрах на контурі перерізу відсутні увігнуті ділянки і точки перегину. Разом з тим $i=e/R=1/20$ близько до коефіцієнта початкової форми профілю, рівному $1/17$, що дозволяє (з врахуванням того, що $N=4$) використовувати цей профіль для з'єднання.

У даному випадку поліном (8) має вигляд:

$$z = 50,216(\zeta + 0,0491\zeta^{-2} - 0,0042\zeta^{-7} + 0,0007\zeta^{-11}). \quad (11)$$

При цьому точність конформного відображення прийемо рівною 0,02%, що відповідає відхиленню наближеного контуру, побудованого за формулою (10), від заданого, побудованого за формулою (1), на величину, що не перевищує 0,01 мм. Функція (10), яка з точністю 0,1% задовольняє граничній умові (8), має вигляд:

$$\varphi(z) = 2,0134 \cdot 10^{-3} z^4 - 2,8858 \cdot 10^{-13} z^9 + 6,4974 \cdot 10^{-21} z^{12} + 4,1852 \cdot 10^{-30} z^{16} \quad (12)$$

Жорсткість валу при крученні $D = 9,696 \cdot 10^{-6} \cdot G$, де G - модуль зсуву матеріалу, Па; D - в $\text{Н} \cdot \text{м}^2$. Найбільше дотичне напруження, яка досягається в точці K контуру (рис. 1), $\tau_{\max} = 5,943 \cdot 10^3 \cdot M$ (тут M - в $\text{Н} \cdot \text{м}$; τ_{\max} - в Па). Якщо знайти найбільше дотичне напруження за наближеною методикою [4], як для круглого валу, що має рівну площу перерізу з профільним, то $\tau_{\max} = 5,003 \cdot 10^3 \cdot M$. Таким чином, наближена методика дає занижені на 16% значення максимальних напружень.

На підставі висловленої методики рішення задачі [4] були розроблені програмні блоки в пакеті Mathcad, які дозволили досліджувати залежність жорсткості при крученні і максимальних дотичних напружень від параметра i для валів з $N=3; 4; 5, \dots$. Були розроблені наступні блоки: 1) побудова конформного відображення із заданою точністю; 2) визначення функції кручення із заданою точністю; 3) обчислення жорсткості при крученні; 4) обчислення дотичних напружень в поперечному перерізі валу; 5) визначення максимальних дотичних напружень.

В результаті інженерних розрахунків були одержані прості формули обчислення жорсткості при крученні $D=k_1GR_4$ і найбільших дотичних напружень $\sigma_{\max}=k_2M/R_3$, де k_1 і k_2 - коефіцієнти, розраховані на ЕОМ, для кожного значення N при різних t .

Дана методика розрахунку є досить трудомісткою, тому для подальших розрахунків ми вирішили використати метод кінцевих елементів (МКЕ), що припускає явну апроксимацію рішення на малих підобластях - кінцевих елементах. На основі МКЕ працює більшість сучасних універсальних програмних пакетів - ANSYS, Cosmos Works, NASTRAN, APM і ін. Для подальшого дослідження ми застосували пакет APM WinMashine 2009 (ver. 9.6), яка сумісна з програмою Компас 10-3D.

В пакеті Компас 10-3D ми розробили твердотільні моделі валу з двома профільними ділянками (РК-3 та РК-4 профіль) та двох шківів, які будуть вступати в контакт з валом та імітувати профільне з'єднання. В програмі APM Structure 3D проводимо розрахунок напружено-деформованого стану профільного з'єднання для двох випадків (РК-3 та РК-4 профіль). Для досліджень приймаємо аналогічні розміри шківів та прикладений до нього силовий фактор. При цьому у вікнах програми ми отримали результати напружень, які виникають в профільних з'єднаннях, а саме карти деформацій, карти головних напружень та карти переміщень.

Згідно різних літературних джерел існують рекомендації, в яких говориться, що при більшій кількості граней напруження, які виникають у профільному з'єднанні, є більш рівномірними. Як видно з рис. 3 максимальна величина напружень в РК-3 профільному з'єднанні становить $1,09 \text{ Н/мм}^2$, а в РК-4 профільному з'єднанні становить $0,845 \text{ Н/мм}^2$, що на 30% менше.

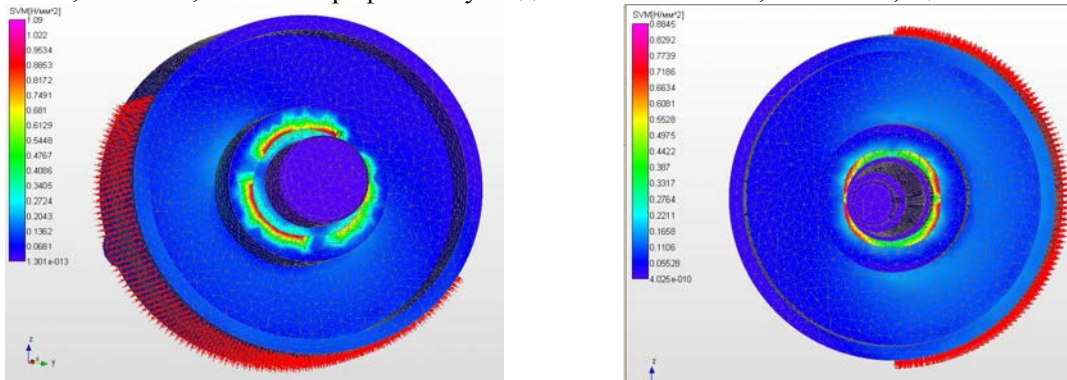


Рис. 3. Напруження в РК-3 та РК-4 профільному з'єднанні при однакових схемах навантаження

Порівняємо величини головних напружень, які виникають у профільних з'єднаннях (рис. 4). Так в РК-3 профільному з'єднанні максимальне значення величини деформації становить $4,593 \cdot 10^{-6}$, а для РК-4 ця величина становить $2,981 \cdot 10^{-6}$. Для РК-4 профільного з'єднання деформації на 40% менші.

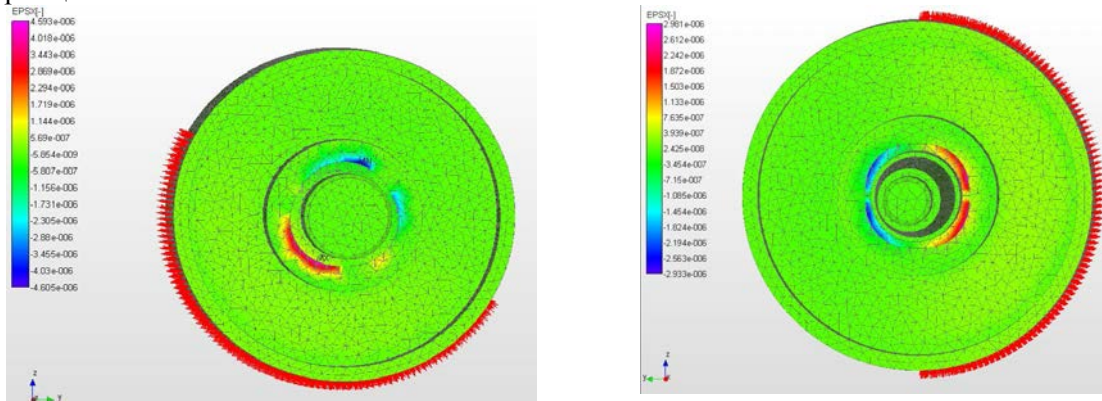


Рис. 4. Деформації, які виникають в РК-3 та РК-4 профільному з'єднанні, при однакових схемах навантаження

Порівняємо величини головних напружень у профільних з'єднаннях. Так в РК-3 профільному з'єднанні величина головних напружень становить $0,959 \text{ Н/мм}^2$, а для РК-4 ця величина становить $1,314 \text{ Н/мм}^2$. Для РК-4 профільного з'єднання головні напруження на 27% більші.

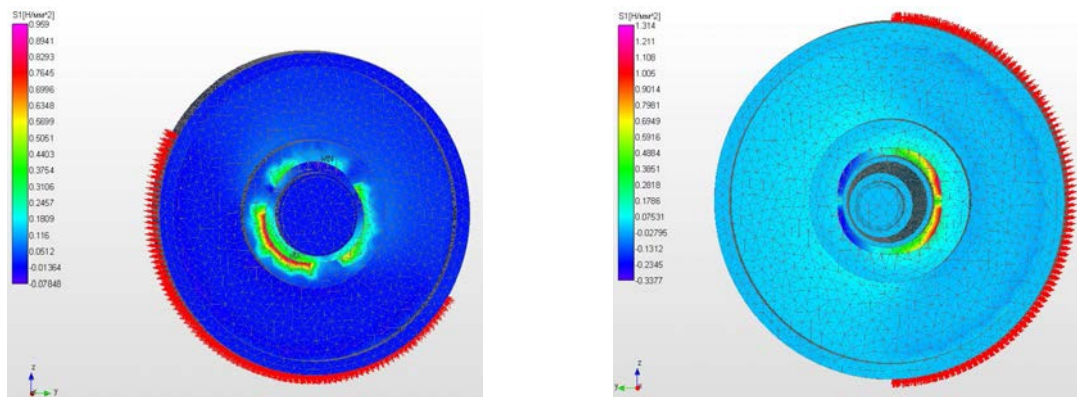


Рис. 5. Головні напруження, які виникають в РК-3 та РК-4 профільному з'єднанні, при однакових схемах навантаження

Висновки. Використання спеціалізованих пакетів комп'ютерного моделювання дозволяє проводити моделювання напружено-деформованого стану в РК-3 та РК-4 профільних з'єднаннях. Моделювання показало, що РК-4 профільні з'єднання мають кращі експлуатаційні характеристики в порівнянні з РК-3 профільними з'єднаннями.

1. Кузнєцов Ю.М. Обработка полигональных поверхностей: теория и практика. / Ю.М. Кузнєцов, О.В. Самойленко — К.: ТОВ «ГНОЗИС», 2008 — 193 с.
2. Тимченко А.И. Технология изготовления деталей профильных бесшпоночных соединений. / А.И. Тимченко — М.: МОССТАНКИН, 1988 — 143 с.
3. Борович Л.С. Бесшпоночное соединение деталей машин. / Л.С. Борович — М.: Машгиз, 1951 — 132 с.
4. Иванченко Ф.К. Динамика и прочность прокатного оборудования / Ф.К. Иванченко, П.И. Полухин, М.А. Тылкин, В.П. Полухин. — М.: Металлургия, 1970 — 487 с.
5. Определение моментов инерции и коэффициентов концентрации напряжений некруглых валов. // Экспресс-информация. Детали машин. — 1963. — №21. — С. 1–10.

Стаття надійшла до редакції 10.05.2013.