

УДК 621.762: 539.

В.А. Кошелюк

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПОРОШКОВИХ ТІЛ

У статті наведено результати розв'язку задачі термопружності для порошкових матеріалів. В роботі досліджено вплив неоднорідного нестационарного температурного поля на характер деформування порошкового середовища. Показано, що існуюча залежність границі текучості від температури та коефіцієнту теплопровідності від пористості характеризується утворенням зони ущільнення із градієнтом густини. Розв'язки задач термопружності отримано при деяких спеціальних видах представлення експериментальних функцій.

Ключові слова: гаряче ізостатичне пресування, термопружність, порошковий матеріал, деформування, рівняння теплопровідності

Рис. 2. Літ. 10.

В.А. Кошелюк

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОРОШКОВЫХ ТЕЛ

В работе показана возможность решения задачи термоупругости для порошковых материалов. Исследовано влияние неоднородного нестационарного температурного поля на процесс деформирования порошковой среды. Показано, что существующая зависимость границ текучести от температуры и коэффициента теплопроводности от пористости описывается образованием зоны уплотнения с градиентом плотности. Решение задачи термоупругости получено при некоторых специальных видах экспериментальной функции. Показано результаты численного анализа распределения плотности для различных значений безразмерного коэффициента.

Ключевые слова: горячее изостатическое прессование, термоупругость, порошковый материал, деформирование, уравнение теплопроводности

V.A. Koshelyuk

CONSTRUCTION of DECISION EQUALIZATION of THERMOELASTICITY FOR POWDER-LIKE BODIES

Possibility of decision of task of thermoelasticity is in-process rotined for powder-like materials. Influence of the heterogeneous non-stationary temperature field is investigational on the process of deformation of powder-like environment. It is rotined that existent dependence of scopes fluidity on a temperature and coefficient of heat conductivity from porosity is described formation of area compression with the gradient of closeness. The decision of task of thermoelasticity is got at some special types of experimental function. The results of numerical analysis of distributing of closeness are rotined for the different values of dimensionless coefficient.

Keywords: hot isostatical pressing, thermoelasticity, powder-like material, deformation, equalization of heat conductivity

Постановка проблеми у загальному вигляді і її зв'язок з важливими науковими та практичними завданнями. На сучасному етапі розвитку промислового виробництва необхідно звернути увагу на впровадження енергозберігаючих технологій. Одним із таких напрямків є порошкова металургія. Підвищення конкурентоспроможності виробів, що отримані методами порошкової металургії можливе при прогнозуванні фізико - механічних характеристик на етапі їх виготовлення. Це обумовлює необхідність створення нових методик прогнозування механічних властивостей матеріалів в залежності від технології їх отримання.

Традиційним методом отримання виробів в порошкській металургії є гаряче ізостатичне пресування (ГІП) порошкових матеріалів. Процес ГІП є високотемпературним (на рівні 1000⁰ С) ущільненням порошкових матеріалів під дією зовнішнього тиску (на рівні 1000 атмосфер).

В загальному випадку формулюванні задачу моделювання процесу ГІП можна сформулювати як проектування форми штамп, що визначає відповідність до геометрії виробу.

Проблема математичного моделювання процесів ГІП характерна для проблеми опису поведінки матеріалів за границями пружності. Вона пов'язана з точністю рішень системи рівнянь.

Аналіз основних досліджень. Побудова моделей, що описують поведінку структурно-неоднорідних середовищ, наведено в роботах Друянова Б.А. (1), В.Р. Скорохода (2), М.Б. Штерна (3), В.Е. Перельмана (4). В переважній більшості праць для побудови розв'язуючих рівнянь використовується асоційований закон течіння. Для врахування анізотропії властивостей матеріалу, що виникає при ГІП, використовують рівняння поверхні текучості (2-4).

Я.С. Підстригач, Ю.М. Коляно (5) та інші розробили основи теорії та методи розв'язування задач теплопровідності та термопружності для тіл неоднорідної структури.

Аналіз публікацій показує недостатність систематизованих теоретичних досліджень та числового аналізу щодо моделювання неоднорідних тіл під впливом температурного поля. Поряд з тим, на основі аналізу літературних джерел, можна стверджувати, що не існує єдиної залежності для точного опису поведінки порошкових матеріалів залежно від температурних напружень

Цілі статті полягають у розв'язку задачі термопружності для тіл неоднорідної структури на прикладі порошкового матеріалу.

Об'єкти досліджень. Об'єктом дослідження є процеси термопружного деформування конструкцій з порошкових матеріалів.

Математичне формулювання задачі. Важливість досліджень одновимірної задачі визначається тим фактом, що на початковому етапі процесу деформування піддається лише приграничний шар матеріалу, без детального розгляду якого неможливо досягнути бажаної точності подальших розрахунків.

Розглянемо процес пресування структурно-неоднорідного шару в одновимірній постановці (6, 7).

Для опису механічних властивостей структурно-неоднорідного матеріалу зазвичай використовують умову текучості Гріна (8).

$$\frac{\sigma^2}{f_2^2} + \frac{S^2}{f_1^2} = \sigma_s^2 \quad (1)$$

де: $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ - середнє напруження;

$S^2 = \frac{3}{2}(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})$ - інтенсивність девіатора тензору напружень;

f_1 та f_2 - експериментальні функції відносної густини ρ ;

σ_s - границя текучості моноліту, що є відомою функцією температури.

Розглянемо одновимірну задачу пресування структурно-неоднорідного матеріалу вздовж осі X. Введемо позначення $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - відповідні напруження, а $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ - відповідні деформації.

Рівняння поверхні текучості набуде вигляду

$$\frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2}{9f_2^2} + \frac{(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)^2 + (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z)^2 + (2\sigma_z - \sigma_y - \sigma_x)^2}{6f_1^2} = \sigma_s^2 \quad (2)$$

Зв'язок тензору швидкостей деформації ε_{ij} з тензором напружень σ_{ij} визначається асоційованим законом течіння $\varepsilon_{ij} = \beta \frac{\delta\Phi}{\delta\sigma_{ij}}$ (3)

В координатній формі представлення

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \beta \left[\frac{2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{9f_2^2} + \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{f_1^2} \right] \\ \varepsilon_y &= \beta \left[\frac{2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{9f_2^2} + \frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{f_1^2} \right] \\ \varepsilon_z &= \beta \left[\frac{2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{9f_2^2} + \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{f_1^2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

В одновимірній постановці вважаючи, що всі швидкості переміщень крім $U_x = U$ рівні нулю ($\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$ та $\sigma_y = \sigma_z$) отримаємо

$$\frac{2(\sigma_x + 2\sigma_y)^2}{9f_2^2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{f_1^2} = 0 \quad (4)$$

Після перетворення отримаємо:

$$\sigma_y = \sigma_x \frac{9f_2^2 - 2f_1^2}{9f_2^2 + 4f_1^2} \quad (5)$$

Після підстановки (5) до рівняння (2) отримаємо $\sigma_x^2 = \sigma_s^2 \frac{9f_2^2 + 4f_1^2}{9}$ (6)

Для визначення температури T використовується рівняння теплопровідності:

$$C_v \rho \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta X} \lambda(\rho) \frac{\delta T}{\delta X} - C_v \rho U \frac{\delta T}{\delta x} \quad (7)$$

де: C_v - коефіцієнт теплоємності одиниці об'єму моноліту;

λ - коеф. теплопровідності, що залежить від густини ρ ;

U - швидкість переміщень.

Визначення густини характеризується закон збереження маси: $\frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x} (\rho U) = 0$ (8)

Дана система рівнянь при відповідних початкових та граничних умовах визначає математичні постановку задачі. Варто зазначити, що початкова температура та густина вважаються постійними по об'єму.

Методика розв'язання. Мета аналітичного дослідження полягає в отриманні аналітичних рішень задачі ущільнення при деяких спеціальних видах представлення експериментальних функцій, що явно виражають характер їх поведінки.

Для опису функцій $f_1(\rho)$ та $f_2(\rho)$ використовують властивості порошкового матеріалу (9):

$$f_1^2(\rho) = \frac{3}{2(1+\nu)} \psi^2(\rho) \quad f_2^2(\rho) = \frac{1}{3(1-2\nu)} \psi^2(\rho) \quad (8)$$

де: $\nu(\rho)$ аналог функції Пуассона, який для широкого класу матеріалів апроксимується співвідношенням $\nu = \frac{\rho^2}{2}$

$\psi(\rho)$ - функція, що визначає інтенсифікацію напружень. Досить часто для дослідження використовується апроксимація виду $\psi(\rho) = \rho^m$

Вираз для $\lambda(\rho)$ набуває вигляду

$$\lambda(\rho) = \lambda_0 + \frac{\lambda_m - \lambda_0}{1 - \rho_0} (\rho - \rho_0) \quad (9)$$

де: λ_m - коефіцієнт теплопровідності моноліту

λ_0 - коефіцієнт теплопровідності порошку при початковій густині засипки $\rho \approx 0,6$

Варто зазначити, що $\lambda_0 \ll \lambda_m$, тому вираз для $\lambda(\rho) \frac{\rho}{\rho_0}$ можна представити у вигляді

$$\lambda(\rho) \frac{\rho}{\rho_0} = \lambda_0 [1 + \beta g_1(\rho)]$$

де: $\beta \ll 1$

В Лагранжевій системі координат рівняння теплопровідності має вигляд

$$C_v \rho_0 \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta x} \left[\lambda(\rho) \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\delta T}{\delta x} \right] \quad (10)$$

Початкові та граничні умови для рівняння (10) в даній постановці мають вигляд

$$T = T_0 \text{ при } t = 0$$

$$T = T_1 \text{ при } x = 0$$

Розглянемо випадок коли зовнішньої сили не є достатньо для деформування середовища при додатковій температурі проте достатньо при температурі T_1 .

Ця умова відповідає нерівності $\sigma_s^2(T_1) \frac{9f_2^2(\rho_0) + 4f_1^2(\rho_0)}{9} < P^2 < \sigma_s^2(T_0) \frac{9f_2^2(\rho_0) + 4f_1^2(\rho_0)}{9}$

Температуру, при якій починається плавлення порошку, позначимо T_U . Дана температура

визначається рівнянням $\sigma_s^2(T_U) = \frac{9P^2}{9f_2^2(\rho_0) + 4f_1^2(\rho_0)}$

Ведемо безрозмірну величину $\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$ тоді $T = T_0 + \theta(T_1 - T_0)$. Позначимо $\theta_U = \frac{T_U - T_0}{T_1 - T_0}$. Для

θ рівняння (10) набуде вигляду

$$C_v \rho_0 \frac{\delta \theta}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta x} \lambda_0 [1 + \beta g_1(\rho)] \frac{\delta \theta}{\delta x} \quad (11)$$

з умовами :

$$\theta = 0 \text{ при } t = 0 \quad x > 0$$

$$\theta = 0 \text{ при } x = 0$$

Функцію $\sigma_s(\theta)$ будемо розглядати як функцію виду $\sigma_s(\theta) = \sigma_{s0}h(\theta)$

де: $h(\theta)$ - монотонно спадна функція $h(0) = 1$ та $h(1) = 0$

Через ρ позначимо рішення рівняння

$$9f_2^2(\rho_1) + 4f_1^2(\rho_1) = \frac{9P^2}{\sigma_s^2(T_1)} \quad (12)$$

Оскільки в постановці задачі відсутній характер лінійного розміру то задача є автомодельною. Рішення будемо шукати у вигляді

$$T = T(Z)$$

$$\rho = \rho(Z)$$

де: $Z = \frac{x}{\sqrt{2at}}$, $a = \frac{\lambda_0}{C_v \rho_v \rho_0}$

Тоді система рівнянь відносно визначення θ та ρ набуде вигляду

$$-Z \frac{d\theta}{dZ} = \frac{d}{dx} [1 + \beta g_1(\rho)] \frac{d\theta}{dZ} \quad (13)$$

з умовами:

$$\theta = 0 \text{ при } Z = \infty$$

$$\theta = 1 \text{ при } Z = 0$$

$$9f_2^2(\rho_1) + 4f_1^2(\rho_1) = \frac{9P^2}{\sigma_{s0}^2 h^2(\theta)} \text{ при } \theta > \theta_U \quad (14)$$

$$\rho = \rho_0, \quad \theta < \theta_u$$

Обмежимо Z_U границю зони ущільнення.

Тоді при $Z > Z_U$ отримаємо $\rho = \rho_0$, $g_1(\rho) = 0$ та рівняння (13) набуде вигляду

$$-Z \frac{d\theta}{dZ} = \frac{d^2\theta}{dZ^2}$$

Розв'язуючи його з умовами $\theta = \theta_U$ при $Z = Z_u$, $\theta = 0$ при $Z \rightarrow \infty$ отримаємо

$$\theta(Z) = \theta_U \frac{\int_{z_u}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}{\int_{z_u}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy} \quad (15)$$

При $Z < Z_u$ згідно (14) будемо вважати, що $\rho = h_1(\theta)$ де $h_1(\theta)$ монотонно зростаюча функція при цьому $h(\theta_U) = \rho_0$, $h(1) = \rho_1$

Отже залежність $1 + \beta g(\rho)$ можна записати $1 + \beta g(\rho) = 1 + \beta \lambda_1(\theta)$ де $\lambda_1(\theta) = g[h_1(\theta)]$.

Тоді згідно (13) отримаємо

$$-Z \frac{d\theta}{dZ} = \frac{d}{dZ} [1 + \beta \lambda_1(\theta)] \frac{d\theta}{dZ} \quad (16)$$

з умовами :

$$\theta = 1 \text{ при } Z = 0$$

$$\theta = \theta_U \text{ при } Z = Z_U$$

$$\theta(Z) = -\theta_U \frac{e^{-\frac{Z_u^2}{2}}}{\int_{z_u}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy} \text{ при} \quad (17)$$

$$Z = Z_U$$

З іншої сторони рівняння (16) з умовами $\theta = \theta_u$, $\frac{d\theta}{dZ} = -\theta_u \frac{e^{\frac{Z_u^2}{2}}}{\int_{z_u}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}$ однозначно визначає

рішення при $Z < Z_U$.

Тоді систему можна розглядати як зворотню задачу, де по відомому параметру Z_U визначається відповідна безрозмірна температура на межі $\theta(0)$, що відповідає заданому значенню Z_U (10).

Для аналітичного розв'язку рівняння (16) визначимо як рівняння зворотної функції $Z = Z(\theta)$. Тоді рівняння (16) перепишемо у вигляді:

$$-\frac{Z}{\frac{dZ}{d\theta}} = \frac{d\lambda_1}{d\theta} \frac{1}{\left(\frac{dZ}{d\theta}\right)^2} - [1 + \beta\lambda_1(\theta)] \frac{\frac{d^2Z}{d\theta^2}}{\left(\frac{dZ}{d\theta}\right)^3}$$

яке перетвориться до вигляду: $-Z = \frac{\frac{d}{dx}[1 + \beta\lambda_1(\theta)]}{\frac{dZ}{d\theta}} - \frac{[1 + \beta\lambda_1(\theta)] \frac{d^2Z}{d\theta^2}}{\left(\frac{dZ}{d\theta}\right)^2}$

Інтегруючи отримане співвідношення отримаємо: $-\int_{\theta_U}^{\theta} Z(\theta) d\theta + C = \frac{1 + \beta\lambda_1(\theta)}{\frac{dZ}{d\theta}}$

Перепишемо у вигляді: $1 + \beta\lambda_1(\theta) = -\frac{dZ}{d\theta} \left[C + \int_{\theta_U}^{\theta} Z(\theta) d\theta \right]$ (18)

Це співвідношення необхідно розглядати як рівняння для визначення $\lambda_1(\theta)$ по відомій функції $Z(\theta)$. Тобто задаючи залежність зміни $Z(\theta)$ ми можемо визначити закон зміни $\lambda_1(\theta)$, який характеризує закон розподілу температури.

Так як $\lambda_1(\theta_U) = 0$ та $\frac{d\theta}{dZ} = -\frac{1}{Z_u \theta_u}$ при $\theta = \theta_u$ отримаємо:

$$1 + \beta\lambda_1(\theta) = -\frac{dZ}{d\theta} \left[Z_u \theta_u + \int_{\theta_U}^{\theta} Z(\theta) d\theta \right]$$

Так як $Z = Z_U$ при $\theta = \theta_U$ отримаємо: $Z(\theta) = Z_U - \int_{\theta_U}^{\theta} \frac{1 + \beta\lambda_1(x)}{Z_u \theta_u + \int_{\theta_U}^x Z(s) ds} dx$

де: $\lambda_1(\theta)$ - зростаюча функція $\lambda_1(\theta) \square 1$

$Z(\theta)$ - спадна функція зі зростанням θ при цьому $Z(1) = 0$

Ведемо позначення $Z(\theta) > Z_u R(\theta)$, де $R(\theta)$ спадна функція при цьому $R(\theta_u) = 1$, $R(1) = 0$

Для визначення $R(\theta)$ використаємо рівняння: $Z_u R(\theta) = 1 - \frac{1}{Z_u^2} \int_{\theta_U}^{\theta} \frac{1 + \beta\lambda_1(x)}{\theta_u + \int_{\theta_U}^x R(s) ds} dx$

Оскільки $R(1) = 0$, а $R(\theta) > 0$ то $1 - \frac{1}{Z_u^2} \int_{\theta_U}^1 \frac{1 + \beta\lambda_1(x)}{\theta} dx < 0$

Оскільки $R(1) = 0$, а $R(\theta) < 1$ то $1 - \frac{1}{Z_u^2} \int_{\theta_U}^1 \frac{1 + \beta\lambda_1(x)}{x} dx > 0$

Отримані залежності визначають кількісну оцінку поведінки величини Z_U .

До складу співвідношення (8) входить функція $\psi^2(\rho)$ - фактор інтенсифікації напружень, що визначається експериментально. Про неї відомо, що вона монотонно зростає із зростанням густини та $\psi(1) = 0$.

Представимо її у вигляді : $\psi^2(\rho) = \frac{(1+\rho)(2+\rho^2)}{6(2-\rho^2)}$

Відносно залежності σ_s від температури відомо, що функція спадна. Тому можна представити у вигляді $\sigma_s^2 = \sigma_{s0}^2(1-\gamma T)$.

При використанні безрозмірної температури θ залежність визначається співвідношенням $\sigma_s^2(\theta) = \sigma_{s0}^2 [(1-\gamma T_0) - \gamma_1 \theta]$

де: $\gamma_1 = \gamma(T_1 - T_0)$

Тоді, при прийнятій апроксимації функції $\psi(\rho)$ отримаємо:

$$\frac{9f_2^2(\rho_1) + 4f_1^2(\rho_1)}{9} = \frac{1}{6(1-\rho)}$$

Рівняння визначення густини як функції температури та тиску набуде вигляду:

$$\frac{1}{6(1-\rho)} = \frac{P^2}{\sigma_{s0}^2 [(1-\gamma T_0) - \gamma_1 \theta]}$$

або $\rho = 1 - \frac{\sigma_{s0}^2}{6P^2} [(1-\gamma T_0) - \gamma_1 \theta]$

Температура початку ущільнення θ визначається співвідношенням :

$$\rho = 1 - \frac{\sigma_{s0}^2}{6P^2} [(1-\gamma T_0) - \gamma_1 \theta_u]$$

Тоді вираз для залежності густини від безрозмірної температури можна представити співвідношенням:

$$\rho = \rho_0 + \gamma_1(\theta - \theta_u) \text{ при } \theta > \theta_u \tag{19}$$

$$\rho = \rho_0 \text{ при } \theta < \theta_u$$

Використовуючи (9) та (19) отримаємо наступну залежність для коефіцієнту теплопровідності:

$$\lambda = \lambda_0 [1 + \beta(\theta - \theta_u)] \tag{20}$$

де: $\beta = \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_0} - 1 \right) \frac{\gamma_1}{1 - \rho_0}$ □ 1

Тоді використовуючи автомодельний характер рішення рівняння для визначення $\theta(Z)$ (13) набуде вигляду:

$$-Z \frac{d\theta}{dZ} = \frac{d}{dZ} [1 + \beta(\theta - \theta_u)] \frac{d\theta}{dZ}$$

з умовами : $\theta = \theta_u, \frac{d\theta}{dZ} = -\theta_u \frac{e^{\frac{Z_u^2}{2}}}{\int_{z_u}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}$ при $Z = Z_u$

$$\theta = 1 \text{ при } Z = 0$$

Для подальших досліджень зручно ввести величину $\theta_1 = \theta - \theta_u$. Позначимо $\theta^* = 1 - \theta_u$. Варто відмітити, що для процесу ГП є характерним значення $q = \frac{1 - \theta_u}{\theta_u} < 1$. Замість невідомої функції $\theta_1(Z_1)$ будемо шукати зворотну функцію $Z(\theta_1)$. Згідно (16) отримаємо

$$-Z = \frac{d}{d\theta_1} \left(\frac{1 + \beta\theta_1}{\frac{dZ}{d\theta_1}} \right) \tag{21}$$

з умовами :

$$Z = Z_u, \quad \frac{dZ}{d\theta_1} = -\frac{1}{\theta_u Z_u} \text{ при } \theta_1 = 0$$

$$Z = 0 \text{ при } \theta_1 = \theta^*$$

Інтегруючи (21) отримаємо : $1 + \beta\theta_1 = -\frac{dZ}{d\theta_1} \left[H + \int_0^{\theta_1} Z(S) dS \right]$

Так як $\frac{dZ}{d\theta_1} = -\frac{1}{\theta_u Z_u}$ при $\theta_1 = 0$ то отримаємо: $1 + \beta\theta_1 = -\frac{dZ}{d\theta_1} \left[\theta_u Z_u + \int_0^{\theta_1} Z(S) dS \right]$

Представимо $Z(\theta_1)$ у вигляді $Z(\theta_1) = Z_u X(\theta)$. Тоді для визначення $X(\theta)$ отримаємо рівняння:

$$1 + \beta\theta_1 = -Z_u^2 \left[\theta_u + \int_0^{\theta_1} Z(S) dS \right] \frac{dX}{d\theta_1} \quad (22)$$

з умовами $X(0) = 1, \frac{dX(0)}{d\theta_1} = -\frac{1}{\theta_u Z_u^2}, X(\theta^*) = 0$

Розглянемо рішення у вигляді ряду $X(\theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\theta_1}{\theta^*} \right)^n$

Отримаємо : $1 + \beta\theta_1 = -Z_u^2 \left(\theta_u \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \frac{\theta_1^{n-1}}{\theta^{*n}} \right) - Z_u^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} n a_n \frac{\theta_1^{n-1}}{\theta^{*n}} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \frac{\theta_1^{n+1}}{\theta^{*n}} \right)$

Згідно початкових умов отримаємо $a_0 = 1, a_1 = -\frac{\theta^*}{\theta_u Z_u^2}$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях θ_1 отримаємо $-Z_u^2 \theta_u \frac{2a_2}{\theta^{*2}} - Z_u^2 \frac{a_0 a_1}{\theta^*} = \beta$

Так як $\beta \ll 1, a_1 \leq 1$ то $a_2 = -\frac{\beta \theta^{*2}}{2Z_u^2 \theta_u}$. При $n > 1$ отримаємо

$$\frac{-Z_u^2 \theta_u (n+1) a_{n+1}}{\theta^{*2}} - Z_u^2 \frac{1}{\theta^{*n}} \sum_{i=0}^n \frac{i}{n+1-i} a_i a_{n-i} = 0.$$

Тоді для $n > 1$ отримаємо рекурентну формулу $a_{n+1} = -\frac{\theta^*}{n+1} \sum_{i=0}^n \frac{i}{n+1-i} a_i a_{n-i}$

Обмежившись трьома членами ряду та нехтуючи малими високо порядку

$$Z(\theta_1) = a_0 + a_1 \theta + a_2 \theta^2 \approx 1 - \frac{\beta \theta^*}{2Z_u^2} \left(\frac{\theta^*}{\theta_u} \right) \left(\frac{\theta_1}{\theta^*} \right)^2$$

З умови $Z(\theta^*) = 0$ отримаємо $Z_u^* \approx \sqrt{\beta \theta^*} \sqrt{\frac{\theta^*}{2\theta_u}}$

Для чотирьох членів ряду $Z(\theta_1) \approx 1 - \frac{\beta \theta^*}{2Z_u^2} \left(\frac{\theta^*}{\theta_u} \right) \left(\frac{\theta_1}{\theta^*} \right)^2 + \frac{\beta \theta^*}{3Z_u^2} \left(\frac{\theta^*}{\theta_u} \right)^2 \left(\frac{\theta_1}{\theta^*} \right)^3$

$$Z_u = \sqrt{\beta \theta^*} \sqrt{\frac{\theta^*}{2\theta_u}} \sqrt{1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\theta^*}{\theta_u} \right)}$$

Для п'яти членів розкладу $Z(\theta_1) \approx 1 - \frac{\beta \theta^*}{2Z_u^2} \left(\frac{\theta^*}{\theta_u} \right) \left(\frac{\theta_1}{\theta^*} \right)^2 + \frac{\beta \theta^*}{3Z_u^2} \left(\frac{\theta^*}{\theta_u} \right)^2 \left(\frac{\theta_1}{\theta^*} \right)^3 + \frac{\beta \theta^*}{4Z_u^2} \left(\frac{\theta^*}{\theta_u} \right)^3 \left(\frac{\theta_1}{\theta^*} \right)^4$

$$Z_u = \sqrt{\beta \theta^*} \sqrt{\frac{\theta^*}{2\theta_u}} \sqrt{1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\theta^*}{\theta_u} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta^*}{\theta_u} \right)^2}$$

Отримані співвідношення мають повільну збіжність проте є достатніми для якісного аналізу.

Варто відмітити, що якщо обмежитись трьома членами розкладу та нехтуючи малими високо порядку отримаємо

$$Z(\theta_1) \approx 1 - \frac{\theta_1^2}{\theta^{*2}} \quad Z_u = \sqrt{\beta\theta} \sqrt{\frac{\theta^*}{4\theta_u}}$$

Чисельний аналіз результатів. Будемо вважати, що товщина шару h , а підігрів та стиск відбувається з обох торців. Поведінку шару розглядаємо в Лагранжевій системі координат (6).

Нехай Z – початкове положення відповідної точки. Для визначення температури використаємо рівняння теплопровідності:

$$C_v \rho_0 \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta Z} \lambda(\rho) \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\delta T}{\delta Z} \quad 0 \leq x \leq h$$

З початковими умовами при $t = 0$: $T = T_0 \quad 0 \leq x \leq h$ та граничними умовами $T = T_1 \quad x = h$; $\frac{\delta T}{\delta x} = 0 \quad x = 0$.

Вважаємо, що на торцях розміщено напруження $\sigma_x = -F(Z)$. Тоді густина визначається рівнянням $\sigma_x^2 = \sigma_s^2 \frac{(9f_2^2 + 4f_1^2)}{9}$

$$\text{Розглянемо випадок коли } \sigma_s^2(T_1) \frac{9f_2^2(\rho_0) + 4f_1^2(\rho_0)}{9} < F^2 < \sigma_s^2(T_0) \frac{9f_2^2(\rho_0) + 4f_1^2(\rho_0)}{9}$$

Дана нерівність характеризує те, що прикладених зусиль достатньо для деформації нагрітої частини шару, в той час як холодна частина залишається недеформованою.

Позначимо температуру при якій відбувається процес деформації T_{ij} , що визначається

$$\text{співвідношенням } \sigma_s^2(T_U) \frac{9f_2^2(\rho_0) + 4f_1^2(\rho_0)}{9} = F^2$$

Межа деформованого шару $\eta(t)$ визначається співвідношенням $T(\eta, t) = T_U$

Тоді $\rho = \rho_0$ при $x < h$ та ρ визначається рівнянням $\sigma_x^2 = \sigma_s^2 \frac{(9f_2^2 + 4f_1^2)}{9}$ як функція температури при $\eta < x < h$.

$$\text{Згідно (10) для якісного аналізу прийнемо наближено } \frac{9f_2^2 + 4f_1^2}{9} \approx \frac{1}{6(1-\rho)}$$

$$\text{Для чисельного розрахунку будемо вважати: } \lambda(\rho) = \lambda_0 \left[1 + \beta \left(\frac{\rho - \rho_0}{1 - \rho_0} \right) \right] \quad \sigma_s(T) = \sigma_0 e^{-\gamma\theta}$$

$$\text{Застосуємо безрозмірні змінні } \eta y = x, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \quad \tau = \frac{\lambda_0 t}{C_m h^2}$$

Для розрахунку були вибрані наступні параметри: $\gamma = 3.47$, $\frac{\sigma_0}{F} = 13.87$ $\beta = 100$.

Це відповідає густині $\rho = 0.9$ при $\theta = 1$ та початковій густині $\rho_0 = 0.6$ при $\theta = 0, 6$

Розподіл густин при різних значеннях безрозмірного τ наведено на рис 1

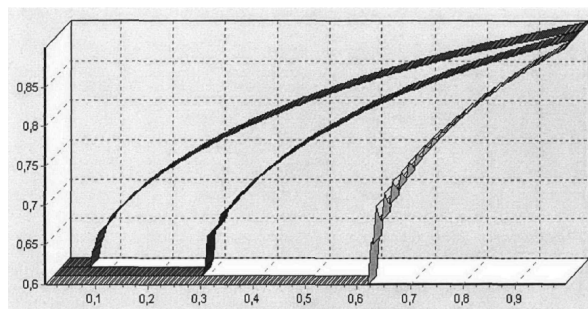


Рис. 1. Розподіл густини

Висновки. Варто відмітити, що результати розрахунку демонструють області з високим градієнтом густини. Це пов'язано з тим, що при підвищенні температури відбувається зменшення границі текучості, наслідком якого є ущільнення матеріалу. Це в свою чергу збільшує коефіцієнт

теплопровідності. В результаті ми спостерігаємо аналог руху фронту ущільнення матеріалу. Закон руху зони ущільнення наближається до змінної $\sqrt{\tau}$, що співпадає з теоретичними оцінками.

1. Друянов Б.А. Прикладная теория пластичности пористых тел / Друянов Б.А. – М.: Машиностроение, 1989.
2. Скороход В.В. Реологические основы теории спекания / Скороход В.В. – Киев. Наукова думка. 1972 – 152 с.
3. Штерн М.Б. Феноменологические теории прессования порошков / Штерн М.Б., Сердюк Г.Г., Максименко Л.А., и др. – Киев. Наукова думка. 1982. – 140 с.
4. Перельман В.Е. Деформирование порошковых материалов. / Перельман В.Е. – М. Металлургия. 1979. – 232 с.
5. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры. Подстригач Я.С., Ломакин В.А, Коляно Ю.М. – М.: Наука, 1984. – 378 с
6. А.В.Пономарев. Осадка пластически сжимаемого слоя в условиях неоднородного температурного поля. / А.В.Пономарев, В.А.Головешкин, В.А.Андрущенко, Н.Н.Холин – Материалы V Российской конференции с международным участием "Смешанные задачи механики деформируемого тела", Саратов, 23-25 августа 2005г, – с. 260-263
7. А.В.Пономарев. Аналитическое исследование одномерного процесса горячего изостатического прессования в условиях неоднородного нестационарного температурного поля. / А.В.Пономарев – Сборник трудов VIII международной научно-практической конференции "Фундаментальные и прикладные проблемы приборостроения, информатики и экономики", Сочи, 3-6 октября 2005г. – с. 89-95.
8. Грин Р. Дж. Теория пластичности пористых тел. / Грин Р. Дж. – Механика. – 1973. – № 4. – С. 109 – 120.
9. D.P. Delo. Modeling of Hot Isostatic Pressing and Hot Triaxial Compaction of Ti-6Al-4V Powder / D.P. Delo, R.E. Dutton, S.L. Semilatin, H.R. Pichler – Acta mater. Vol 47. No 9. pp 2841-2852. – 1999.
10. Semilatin S.L. (Wright Laboratory Materials Directorate, W.L/ MLLN, Wright-Patterson AFB OH 45433 UES, Inc. / Semilatin S.L., R.E. Dutton and R.L. Goetz – "A simple Analysis of the Hot Consolidation of Metal-Matrix Composite Panels from Tape-cast Monotape Layups". Scripta Materialia. Vol. 35. No 7. pp. – 855-860. – 1996.

Стаття надійшла до редакції 26.04.2013