

УДК 539.3

В.В. Божидарник, К.Я. Бортник, О.В. Максимович
ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛИШКОВОЇ МІЦНОСТІ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИНОК ІЗ
ТРИЩИНАМИ

Запропоновано методику визначення напрямків росту тріщин та граничних навантажень для анізотропної пластинки на основі енергетичного критерію руйнування. Методика використана для знаходження критичного потоку енергії на основі експериментально знайдених значень в'язкості руйнування.

Ключові слова: залишкова міцність, тріщини, анізотропна пластинка, енергетичний критерій руйнування
Форм. 8. Табл. 2. Рис. 3. Літ. 4.

В.В. Божидарник, К.Я. Бортник, О.В. Максимович
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНОЙ ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИНОК С
ТРЕЩИНАМИ

Предложена методика определения направлений роста трещин и граничных нагрузок для анизотропной пластинки на основании энергетического критерия разрушения. Методика использована для нахождения критического потока энергии на основе экспериментально найденных значений вязкости разрушения.

Ключевые слова: остаточная прочность, трещины, анизотропная пластинка, энергетический критерий разрушения

V. Bozhidarnik, K. Bortnyk, O. Macsimovich
DEFERMINATION OF THE RESIDUAL STRENGTH OF COMPOSITE PLATES WITH
CRACKS

The method of determining the direction of growth of cracks and limit loads for anisotropic plate-based energy criterion of fracture. Methods used for finding the critical flux based on the experimentally found values of fracture toughness.

Keywords: residual strength, crack, anisotropic plate fracture energy criterion

Відомо, що при виготовленні композитних матеріалів, технологічних процесах їх обробки і створенні з них елементів конструкцій, на різних етапах експлуатації виникають тріщини. Такі тріщини під впливом експлуатаційних навантажень можуть розвиватись, досягати критичного розміру і ресурс (міцність) елемента конструкції вичерпується. Тобто, утворення і розвиток тріщини є у даному випадку основним механізмом вичерпання ресурсу (втрати міцності) елементів композитних конструкцій. Для визначення залишкової міцності елементів конструкцій із таких матеріалів, які є неоднорідні, доцільно застосувати енергетичні підходи. В даній статті розглядаються питання оцінки міцності композитних пластинчастих елементів конструкцій з дефектами типу тріщин на основі енергетичного критерію руйнування.

Енергетичний критерій руйнування. Розглянемо тріщину, дотична до якої у її вершині A нахилена під кутом φ до осі Ox . Введемо полярну систему координат (r, θ) з центром у вершині тріщини так, щоби кут координата $\theta=0$ збігалась з дотичною до тріщини у її вершині.

Вважатимемо відомими коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для цієї вершини, які позначимо через K_I, K_{II} . Для напружень в околі вершини тріщини маємо асимптотичні співвідношення

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) \approx \frac{K_{I\theta}(\theta, \varphi)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \tau_{r\theta}(r, \theta) \approx \frac{K_{II\theta}(\theta, \varphi)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad (1)$$

де:

$$K_{I\theta}(\theta) = K_I f_1(\theta + \varphi, \varphi) + K_{II} f_2(\theta + \varphi, \varphi),$$

$$K_{II\theta}(\theta) = K_I f_3(\theta + \varphi, \varphi) + K_{II} f_4(\theta + \varphi, \varphi), \quad (2)$$

$$f_1(\gamma, \varphi) = \operatorname{Re} \left[\left(g_1 \delta_2(\gamma) \sqrt{\delta_2(\gamma) / d_2} - g_2 \delta_1(\gamma) \sqrt{\delta_1(\gamma) / d_1} \right) / (s_2 - s_1) \right],$$

$$f_2(\gamma, \varphi) = -\operatorname{Re} \left[\left(d_1 \delta_2(\gamma) \sqrt{\delta_2(\gamma) / d_2} - d_2 \delta_1(\gamma) \sqrt{\delta_1(\gamma) / d_1} \right) / (s_2 - s_1) \right],$$

$$f_3(\gamma, \varphi) = \operatorname{Re} \left[\left(g_1 \gamma_2(\gamma) \sqrt{\delta_2(\gamma) / d_2} - g_2 \gamma_1(\gamma) \sqrt{\delta_1(\gamma) / d_1} \right) / (s_2 - s_1) \right],$$

$$f_4(\gamma, \varphi) = -\operatorname{Re} \left[\left(d_1 \gamma_2(\gamma) \sqrt{\delta_2(\gamma) / d_2} - d_2 \gamma_1(\gamma) \sqrt{\delta_1(\gamma) / d_1} \right) / (s_2 - s_1) \right],$$

$$\delta_j = \delta_j(\gamma) = \cos \gamma + s_j \sin \gamma, \quad \gamma_j = \gamma_j(\gamma) = \sin \gamma - s_j \cos \gamma, \quad g_j = \gamma_j(\varphi),$$

$d_j = \delta_j(\varphi), \gamma = \varphi + \theta, s_{1,2}$ – корені характеристичного рівняння [6].

Будемо виходити із потоку енергії у вершину тріщини, який рівний інтенсивності пружної енергії, що вивільнюється при зростанні довжини тріщини на величину δ . Позначимо роботу внутрішніх сил при просуванні тріщини через Q . Тоді за Ірвіним потік енергії у вершину тріщини буде $G = -\lim_{\delta \rightarrow 0} Q / \delta$.

Потік енергії у вершину тріщини у даному випадку знаходиться за формулою $G = -(Q_1 + Q_2) / \delta$. Таким чином отримуємо []

$$G(\gamma, \varphi) = \frac{a_{11}}{2} \left[u_{11}(\gamma) K_{I\theta}^2(\theta, \varphi) + 2u_{12}(\gamma) K_{I\theta}(\theta, \varphi) K_{II\theta}(\theta, \varphi) + u_{22}(\gamma) K_{II\theta}^2(\theta, \varphi) \right]$$

де: a_{ij} – пружні сталі,

$$u_{11}(\varphi) = -\operatorname{Re} \left[i(s_1 - \bar{s}_2) \gamma_2(\varphi) \overline{\gamma_1(\varphi)} \right], \quad u_{12}(\varphi) = \operatorname{Re} \left[i(s_1 - \bar{s}_2) \delta_2(\varphi) \overline{\gamma_1(\varphi)} \right],$$

$$u_{21}(\varphi) = \operatorname{Re} \left[i(s_1 - \bar{s}_2) \gamma_2(\varphi) \overline{\delta_1(\varphi)} \right], \quad u_{22}(\varphi) = -\operatorname{Re} \left[i(s_1 - \bar{s}_2) \delta_2(\varphi) \overline{\delta_1(\varphi)} \right].$$

Критерій руйнування записують на основі порівняння розрахованого потоку енергії із критичним, яке для анізотропних матеріалів є залежним від напрямку, тобто $G_c(\gamma)$.

Тоді маємо критеріальну умову:

$$\frac{a_{11}}{2} \left[u_{11}(\gamma) K_{I\theta}^2(\theta, \varphi) + 2u_{12}(\gamma) K_{I\theta}(\theta, \varphi) K_{II\theta}(\theta, \varphi) + u_{22}(\gamma) K_{II\theta}^2(\theta, \varphi) \right] = G_c(\gamma). \quad (3)$$

Перепишемо її у вигляді

$$K_{I\theta}^2(\theta, \varphi) + w_1(\gamma) K_{II\theta}^2(\theta, \varphi) + w_2(\gamma) K_{I\theta}(\theta, \varphi) K_{II\theta}(\theta, \varphi) = g_c^2(\gamma), \quad (4)$$

де:

$$g_c^2(\gamma) = \frac{2 G_c(\gamma)}{a_{11} u_{11}(\gamma)}, \quad w_1(\gamma) = u_{22}(\gamma) / u_{11}(\gamma), \quad w_2(\gamma) = 2u_{12}(\gamma) / u_{11}(\gamma).$$

Тут враховано, що функція $u_{11}(\gamma) > 0$.

Умова (4) при відомій функції $g_c(\gamma)$ дозволяє дослідити гранично - рівноважний стан анізотропної пластини з тріщиною при відомих КІН. Розглянемо детальніше випадок, коли КІН пропорційні деякому параметру навантаження p і зображені у вигляді $K_{I,II} = p\sqrt{\pi a} F_{I,II}$, де: a – характерний розмір тріщини, $F_{I,II}$ – безрозмірні відомі величини. Тоді з умови (4) граничне значення параметру визначається за формулою:

$$p^2 = \frac{1}{\pi a F_E(\gamma)}, \quad (5)$$

де:

$$F_E(\gamma) = F_1^2(\gamma, \varphi) + w_1(\gamma) F_2^2(\gamma, \varphi) + w_2(\gamma) F_1(\gamma, \varphi) F_2(\gamma, \varphi),$$

$$F_1(\gamma, \varphi) = \frac{F_I f_1(\gamma, \varphi) + F_{II} f_1(\gamma, \varphi)}{g_c(\gamma)}, \quad F_2(\gamma, \varphi) = \frac{F_I f_3(\gamma, \varphi) + F_{II} f_4(\gamma, \varphi)}{g_c(\gamma)}.$$

Звідси отримуємо, що тріщина буде підростати під кутом $\gamma = \gamma_*$ відносно осі Ox , при якому досягається максимальне значення функції $F_E(\gamma)$ (кут φ - зафіксований). Граничне значення параметра навантаження визначається за формулою:

$$p_* = \frac{1}{\sqrt{\pi a} \sqrt{F_E(\gamma_*)}}. \quad (6)$$

У загальному випадку знаходження величин γ_*, p_* (при фіксованому значенні кута φ) може бути проведено числовими методами на основі безпосереднього пошуку максимального значення функції $F_E(\gamma, \varphi)$ або на основі знаходженні критичних точок похідної $F_E'(\gamma, \varphi) = 0$.

Визначення функції $g_c(\gamma)$. Розглянемо ортотропну пластинку із прямолінійною тріщиною, що розміщена під кутом φ до вісі ортотропії. Прийемо, що відома в'язкість

руйнування $K_C(\varphi)$, яку визначають на основі розтягу в перпендикулярному відносно тріщини напрямку. Для анізотропних матеріалів необхідно додатково враховувати, що при поперечному відносно тріщини розтягу тріщина може змінювати напрямок.

1) Прийmemo, що при експериментальних дослідженнях встановлено крім значень $K_C = K_C(\varphi)$ значення кутів $\theta = \theta(\varphi)$, під яким підростатиме тріщина відносно прямої, на якій вона розміщена. Тоді із (3):

$$G_C(\gamma) = \frac{a_{11}}{2} K_C^2(\varphi) [u_{11}(\gamma) f_1^2(\gamma, \varphi) + 2u_{12}(\gamma) f_1(\gamma, \varphi) f_2(\gamma, \varphi) + u_{22}(\gamma) f_2^2(\gamma, \varphi)],$$

де: $\gamma = \varphi + \theta$.

Тут враховано, що в даному випадку:

$$K_{I\theta}(\theta) = K_I f_1(\theta + \varphi, \varphi) = K_C(\varphi) f_1(\gamma, \varphi), K_{II\theta}(\theta) = K_C(\varphi) f_3(\gamma, \varphi).$$

2) Як правило, в літературі наведені тільки значення величин $K_C(\varphi)$. Достатньо просто визначається функція G_C за додаткового припущення, що тріщина буде підростати вздовж прямої, на якій вона розміщена []. В цьому випадку в момент руйнування маємо $K_I = K_C(\varphi)$, $K_{II} = 0$. Тоді поклавши в (3) $\theta = 0$ та врахувавши, що при цьому $K_{I\theta}(0, \varphi) = K_I$, $K_{II\theta}(0, \varphi) = K_{II} = 0$, $\gamma = \varphi$ отримаємо вираз для критичного значення потоку енергії:

$$G_C(\gamma) = \frac{a_{11}}{2} u_{11}(\gamma) K_{IC}^2(\gamma).$$

3) В уточненому підході будемо враховувати, що тріщина в момент руйнування може підростати під кутом. Складність розв'язування задачі в такій постановці полягає в тому, що необхідно визначати додатково цей кут.

Прийmemo, що відомі значення величини $K_j = K_C(\varphi_j)$, де $0 \leq \varphi_j \leq \pi/2$, $j = 1, \dots, J$. Зобразимо невідому функцію у вигляді:

$$g_c(\gamma) = \sum_{n=1}^N C_n \varphi_n(\gamma),$$

де: $\varphi_n(\gamma)$ – лінійно незалежні періодичні функції, які задовольняють умовам $\varphi_n(-\gamma) = \varphi_n(\gamma)$, $\varphi_n(\pi - \gamma) = \varphi_n(\gamma)$, C_n – невідомі сталі, $N < J$.

Будемо виходити із викладеного вище підходу, в якому знаходження граничного навантаження зводиться до задачі визначення екстремуму функції F_E , яка в даному випадку буде:

$$F_E(\gamma) = \frac{f_1^2(\gamma, \varphi) + w_1(\gamma) f_2^2(\gamma, \varphi) + w_2(\gamma) f_1(\gamma, \varphi) f_2(\gamma, \varphi)}{g_c^2(\gamma)}. \quad (7)$$

Значення граничних навантажень $p_* = p_*(\varphi)$, які будуть знайдені в результаті розв'язування екстремальної задачі при заданих значеннях φ_j , позначимо через p_j . Зазначимо, що ці значення залежать від введених коефіцієнтів, тобто $p_j = p_j(C_1, \dots, C_N)$. Звідси випливає, що значення сталих C_n необхідно визначити так, щоби :

$$p_j(C_1, \dots, C_N) \approx p_*(\varphi_j) = K_j / \sqrt{\pi a}.$$

Ці коефіцієнти будемо визначати методом найменших квадратів так, щоби величина:

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^J \left[\sqrt{\pi a} p_j(C_1, \dots, C_N) - K_j \right]^2, \quad (8)$$

була мінімальною.

Мінімізацію величини (8) проведено чисельно, причому функції $p_j(C_1, \dots, C_N)$ знаходились також чисельно на основі мінімізації відповідно сформованої функції.

Розглянемо склопластик ЕФ 32-301, який виготовлений із склотканини АСТТ. Використаємо експериментальні дані для граничного значення КІН залежно від кута між прямолінійною тріщиною і головною віссю анізотропії Ox , в напрямку якої модуль пружності є мінімальним [1] (таблиця 1).

Таблиця 1. Значення величин K_C (МПа·м^{1/2})

$\gamma, \text{рад}$	0	$3\pi/16$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
ЕФ 32-301	25,55	22,74	18,66	16,79	13,0

При розрахунках покладали в першій чверті $\varphi_1 = 1, \varphi_n(\gamma) = \sin(n - 1)\gamma, n = 2, 3, 4$. В інших чвертях функції φ_n задавались із врахуванням симетрії K_C відносно осей координат. Розраховані коефіцієнти за вказаним вище алгоритмом будуть: $C_1 = 25,837; C_2 = -11,079; C_3 = 3,825; C_4 = 0,083$

Результати розрахунків на міцність. Розглянемо пластинку з прямолінійною тріщиною півдовжини a , нахиленою під кутом φ до вісі Ox за розтягу зусиллями p під кутом α відносно прямої, на якій лежить тріщина. Значення КІН при цьому будуть $K_I = p\sqrt{\pi a} \sin^2 \alpha, K_{II} = p\sqrt{\pi a} \cos \alpha \sin \alpha$. Далі прийнято, що напрямок з максимальною жорсткістю матеріалу паралельний осі Oy .

Спочатку, з метою перевірки розробленого алгоритму проведемо розрахунки процесу росту тріщини при розтягу пластинки в напрямку, перпендикулярному до тріщини.

Для перевірки проведено розрахунки процесу росту початкової прямолінійної тріщини, яка нахилена під кутом φ відносно вісі Ox , яка розтягується зусиллями p , які діють перпендикулярно до тріщини. Критичні значення зусиль при наведених у таблиці кутах φ_j будуть $p_*(\varphi_j) = K_j / \sqrt{\pi a}$, де K_j – експериментально знайдені табличні значення КІН.

Результати розрахунків траєкторій підростання тріщин та відносних граничних зусиль $P_{\max} = p_*(\alpha) / \sqrt{\pi a}$ наведено на рис. 1-2.

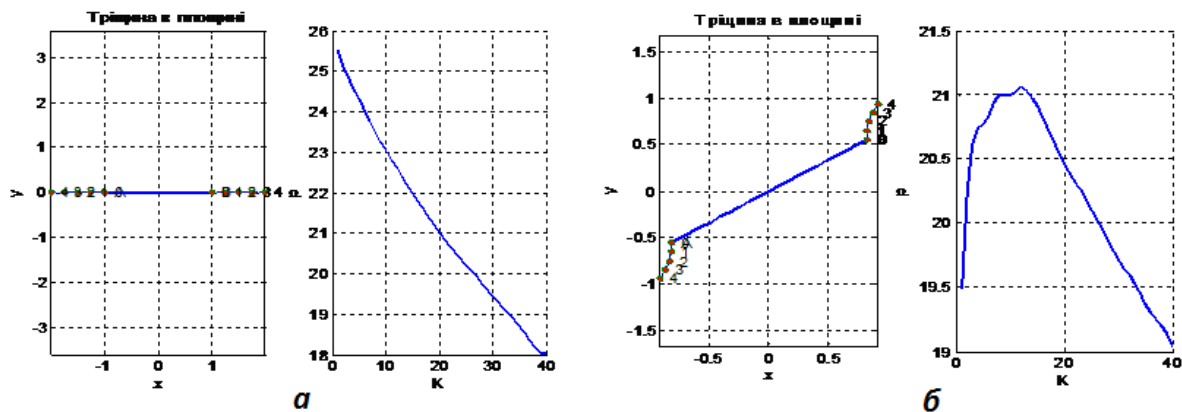


Рис. 1. Траєкторії поширення тріщини та зусилля, які необхідні для їх росту при $\varphi = 0$ (а) та $\varphi = 3\pi/16$ (б)

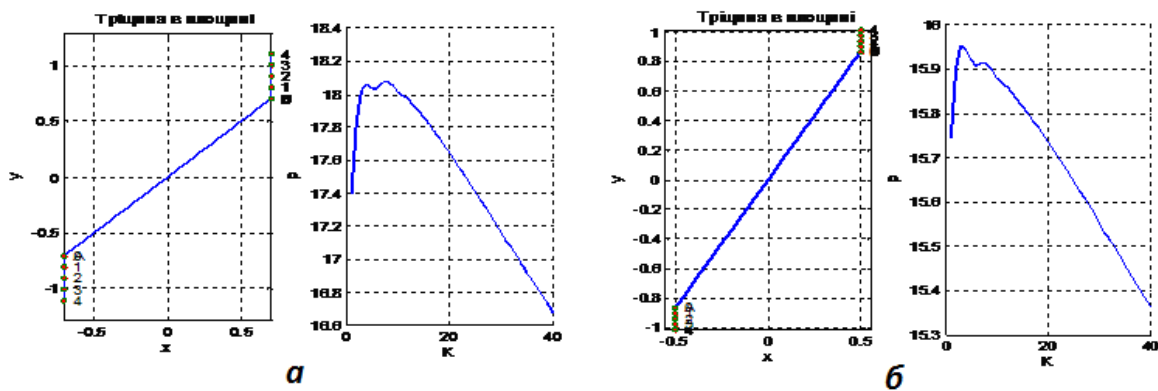


Рис. 2. Траєкторії поширення тріщини та зусилля, які необхідні для їх росту при $\varphi = \pi/4$ (а) та $\varphi = \pi/3$ (б)

Розраховані граничні навантаження, за досягнення яких проходить руйнування наведені в таблиці 2.

Таблиця 2. Експериментальні дані для в'язкості руйнування

γ, φ	0	$3\pi/16$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
ЕФ 32-301	25,55 (25,55)	21 (22,74)	18,05 (18,66)	15,95 (16,79)	14,7 (13,0)

В нижньому рядку в дужках наведені відповідні експериментальні дані. Із таблиці видно, що побудована функція, яка описує критичну енергію дозволяє із задовільною для практики точністю розраховувати процес руйнування.

Із рисунків 1-2 видно, що для тріщин, які нахилені відносно осей ортотропії при досягненні певних значень зусиль тріщина починає підростати, однак далі зупиняється. Для подальшого росту тріщин ці зусилля необхідно збільшувати до критичних (до максимальних значень на графіках), за яких далі відбувається повне руйнування.

При розрахунках траєкторій росту тріщин використано кроковий метод дослідження процесу руйнування [2]. Видно, що для всіх розглянутих випадків, крім малонахилених тріщин, тріщини підрастають практично прямолінійно.

Розраховані за енергетичним критерієм для матеріалу ЕФ 32-301 значення відносних граничних зусиль $P_{\max} = p_*(\alpha)\sqrt{l} / K_{IC}^{cep}$ на рис. 3 зліва. Тут $l = 2a$, $K_C^{cep} = [K_C(0) + K_C(\pi/2)]/2$, значення кутів φ наведено біля кривих. Залежності напрямку підростання тріщин відносно дотичної у вершині для значень кутів $\varphi = 30^\circ j$ при $j = 0, \dots, 3$ наведено на рис.3 справа.

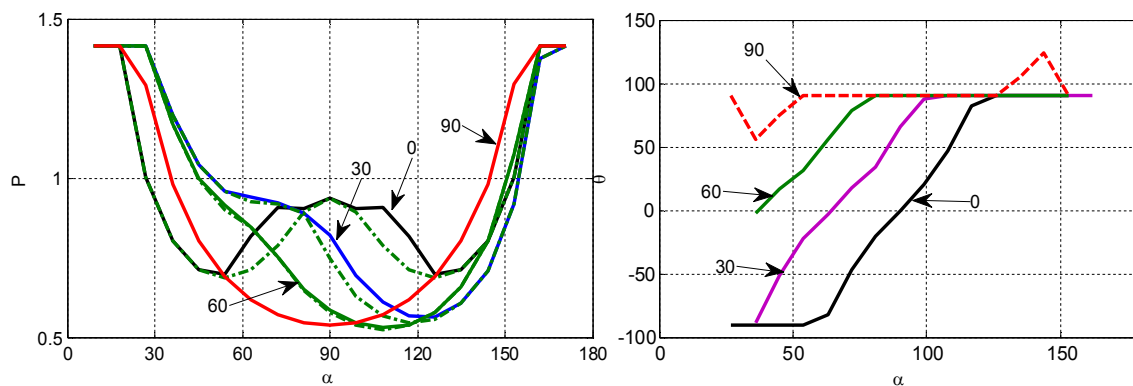


Рис. 3. Кути підростання тріщин залежно від напрямку дії зусиль для матеріалу ЕФ та граничні зусилля

Тут на рисунках штриховими лініями наведено також відносні зусилля, за яких тільки починається руйнування. Для повного руйнування зусилля необхідно для деяких нахилів тріщин збільшувати – вони описуються суцільними лініями.

Видно, що тріщини в основному підрастають практично вздовж прямих

Висновки. Розроблено методику визначення напрямків росту тріщин та граничних навантажень для анізотропної пластинки із тріщинами на основі енергетичного критерію руйнування. Побудована методика використана для знаходження критичного потоку енергії на основі експериментально знайдених значень в'язкості руйнування. Проведено розрахунки граничних навантажень для пластинки із матеріалу ЕФ 32-301 залежно від розміщення тріщин відносно головних осей ортотропії.

1. В.В. Божидарнік, О.С. Андрейків, Г.Т. Сулим. Механіка руйнування, міцність і довговічність неперечно армованих композитів. Луцьк: „Надстир'я”, 2007. – Т. 1. – С. 424, Т. 2. – С. 410.
2. В.В. Божидарнік, О.В. Максимович. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – С. 226.
3. Ашкенази Е.К. Анизотропия конструкционных материалов / Е.К. Ашкенази, С.В. Ганов // Справочник – М.: Машиностроение, 1980. – С. 247.
4. Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук И.В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук.думка, 1989. – 248 с.

Стаття надійшла до редакції 27.04.2013.