

УДК 621.0

М.І. Пилипець, А.П. Драган, А.Є. Дячун, І.М. Кучвара
МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ФОРМОУТВОРЕННЯ НАВИВНИХ ЗАГОТОВОК

Розроблена математична модель формоутворення навивних заготовок. Виведені аналітичні залежності для розрахунку траєкторій переміщень формоутворюючого інструменту і силових та динамічних характеристик.

Ключові слова: математична модель, навивна заготовка.

Рис. 1. Форм. 12. Літ. 6.

М.И. Пилипец, А.П. Драган, А.Е. Дячун, И.М. Кучвара
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ НАВИВНЫХ ЗАГОТОВОК

Разработана математическая модель формообразования навивных заготовок. Выведенные аналитические зависимости для расчета траектории перемещения формообразующего инструмента и силовых и динамических характеристик.

Ключевые слова: математическая модель, навивные заготовка.

M.I. Pylypec, A.P. Dragan, A.Y. Dychun, I.M. Kuchvara
MATHEMATICAL MODEL OF WINDED BLANKS SHAPING

The mathematical model of winded blanks shaping was developed. Analytical dependences for determining the trajectories of shaping tools moving and power and dynamic performance were selected.

Keywords: mathematical model, winded blank.

Актуальність теми. Створення нових і удосконалення існуючих конструкцій гвинтових транспортних машин (ГТМ) з розширеними технологічними можливостями сприяє подальшому розвитку виробництва та підвищення їх ефективності використання. В сучасних конструкціях машин використання гвинтових механізмів, номенклатура яких та специфіка експлуатації постійно зростають, питома вага цих механізмів у підйомно-перевантажувальних машинах за різними даними складає 40-45%. Встановлено, що функціональні можливості і технологічні характеристики ряду ГТМ не відповідають вимогам сьогодення, за ознаками розширення номенклатури технологічних процесів, результатів теоретичних і експериментальних досліджень, стендовим оснащенням та інше.

Не зважаючи на значну кількість наукових праць, які присвячені розробленню і дослідженню ГТМ, рівень технологічного забезпечення залишається недостатнім, а наукова база для їх створення не завжди відповідає сучасним їх вимогам.

Тому вирішення наукової проблеми, яка полягає в розробленні математичної моделі формоутворення навивних заготовок, є актуальною і має важливе народногосподарське значення.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Питаннями теорії виготовлення ГЗ присвячені праці ряду авторів [1-6]. Однак цілий ряд теоретичних питань формування гвинтових навивних заготовок і визначення силових та динамічних характеристик потребують подальшого дослідження.

Метою роботи розробка математичної моделі формоутворення гвинтових заготовок з визначенням силових і динамічних характеристик.

Робота виконується в рамках пріоритетних напрямків розвитку науки і техніки «Новітні та ресурсозберігаючі технології в промисловості, енергетиці та агропромисловому комплексі» на 2010...2015 роки.

Реалізація роботи. При виготовленні різнопрофільних навивних заготовок (НЗ) із складною геометрією, рухи робочих органів технологічного обладнання повинні відповідати заданому технологічному процесу формоутворення. Саме тому необхідно визначити співвідношення між характеристичними параметрами згаданого процесу. Зручним об'єктом для параметризації є формоутворюючий інструмент, рухи якого визначаються органами керування верстату та конструктивними особливостями схеми формоутворення.

Для вивчення характеру відносних переміщень введемо такі координатні системи (рис. 1):

UVW – система координат верстату, причому напрямки осей MU , MW , MV співпадають з напрямками відповідно поперечної, поздовжньої та вертикальної подачі.

XYZ – власна система координат навивної заготовки, причому $OX \parallel MU$, $OY \parallel MV$, $OZ \parallel MW$.

$X_K Y_K Z_K$ – рухома система координат з початком відліку у точці C_i контакту формуючого елемента інструменту з поверхнею навивної заготовки, а вісь $C_i X_K$ завжди направлена по дотичній до характеристичної лінії $L-L$ цієї заготовки, вісь $C_i Y_K$ направлена вздовж нормалі до лінії $L-L$, $C_i Z_K \parallel MW$.

Кут $\psi = \vec{n} \wedge C_i Y_K$ визначає відхилення контактної площини від координатної осі MW , де \vec{n} - нормаль до поверхні F НЗ.

У процесі виготовлення НЗ інструментом, твірна робочої поверхні якого не характеризується певним радіусом кривини (точковий контакт), характер взаємодії інструменту із заготовкою легко відслідковується у випадку подання її геометрії поверхонь у вигляді параметричного виразу:

$$\begin{aligned} x = & [r_o(t, \chi_o) + r_1(t, \chi_1) \cos(\alpha_o + \alpha_p + (t/b)(dv/dt)) + r_2(t, \chi_2) \sin(\alpha_o + \\ & + \alpha_p + (t/b)(dv/dt))] \cos(v_o + t dv/dt); \quad y = [r_o(t, \chi_o) + r_1(t, \chi_1) \cos(\alpha_o + \\ & + \alpha_p + (t/b)(dv/dt)) + r_2(t, \chi_2) \sin(\alpha_o + \alpha_p + (t/b)(dv/dt))] \sin(t dv/dt + \\ & + v_o); \quad z = z_o + r_1(t, \chi_1) \sin(\alpha_o + \alpha_p + (t/b)(dv/dt)) - r_2(t, \chi_2) \cos(\alpha_o + \\ & + \alpha_p + (t/b)(dv/dt)) + \mathcal{E}(t dv/dt + \alpha_o), \end{aligned} \quad (1)$$

де $r_o(t, \chi_o)$, $r_1(t, \chi_1)$, $r_2(t, \chi_2)$ - функціональні радіус-вектори;

$b = (dv/dt)/(d\alpha/dt)$;

χ_i - незалежна змінна відповідного i -го функціонального радіус-вектора;

α_p - кутова характеристика профілю;

dv/dt , $d\alpha/dt$ – кутові швидкості обертання відповідно площини N (радіус-вектора $r_o(t, \chi_o)$) та радіус-вектора $r_1(t, \chi_1)$;

\mathcal{E} - параметр кроку гвинтової лінії: $\mathcal{E} = T/2\pi$.

У випадках, коли формоутворюючий інструмент має складу форму задача значно ускладнюється.

Припустимо, що рух точки E здійснюється у відповідності з переміщеннями, які задаються керуючими механізмами верстату. Так як задача керування верстатом зводиться до координації рухів окремих ланок його механізмів для реалізації необхідного процесу формоутворення, то вирішення забезпечується введеною параметризацією. Для цього достатньо виявити між координатами точок E і C взаємопов'язані співвідношення, тобто виявити вид функціональної залежності яка переводить довільну точку C у співпадання з іншою відповідною точкою E . Ця задача зводиться до вивчення групи твердих переміщень в рімановому просторі. Розглянемо, зокрема, безперервні групи переміщень для випадку виготовлення НЗ методом навивання для величини калібру співвідносного з шириною спіралі, а також оброблення НЗ різанням. Для цього припустимо, основна поверхня ГЗ задана у вигляді рівняння (1), яка визначена у власній системі координат. Для спрощення розрахунків приймемо: $\alpha'_i = 0$; $\chi_i = 0$, $i = \overline{1,3}$; $z_o = 0$; $\alpha_p = 0$; $b = 1$.

Групи перетворень твердих переміщень визначаються виходячи із таких умов:

1. Будь-який вектор, який є нормальним до траєкторії $\sum C$, є інваріантом загального переміщення групи g , які зберігають нерухомими точки E .

2. Якщо відомий рімановий простір розмірністю $m+f$, перетворений групою переміщень, траєкторії яких мають розмірність m , то завжди можна вибрати систему координат

$x^1, x^2, \dots, x^m; U^1, U^2, \dots, U^m$ так, щоб m перших координат перетворювались транзитивно між собою, а f наступних залишились інваріантними.

З врахуванням цих умов виконано геометричну побудову схеми рухів системи для знаходження груп перетворень, які зв'язані з заданим технологічним процесом і керуванням верстатом (рис. 1). Виходячи із такої побудови:

$$\vec{S}(E) = \vec{P} + \vec{G} + \vec{R} = \vec{P} + \vec{G} + \vec{Q} + \vec{R}_C, \tag{2}$$

де $\vec{Q} = U_Q \vec{i} + W_Q \vec{j} + V_Q \vec{k}; \vec{R} = U_C^k \vec{i} + W_C^k \vec{j} + V_C^k \vec{k}; \vec{S}(E) = U \vec{i} + W \vec{j} + V \vec{k};$

$\vec{P} = U_P \vec{i} + W_P \vec{j} + V_P \vec{k}; \vec{R}_C = (\Delta_1 x_C + \Delta_2 x) \vec{i} + (-\Delta_2 x + \Delta_1 x) \vec{j} + z_C^* \vec{k},$

де $\Delta_1 = \cos[\arctg(y/x) - \arctg(y_o/x_o)] = \cos(v'_t);$

$\Delta_2 = \sin[\arctg(y/x) - \arctg(y_o/x_o)] = \sin(v'_t).$

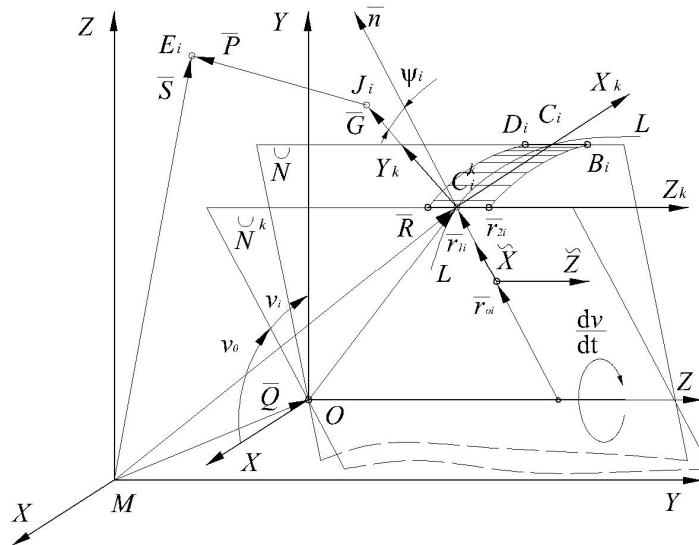


Рис. 1. Розрахункова схема для визначення координат розміщення виконавчих органів верстату і точки контакту інструменту з поверхнею навивної заготовки в процесі її формоутворення

Згідно умови (2.19) припустимо, що $\vec{G} \perp MW$, тоді вектор \vec{G} можна подати у вигляді:

$$\vec{G} = \rho_i \vec{n}_w = \rho_i \left(\frac{\text{grad}F(C_i)}{|\text{grad}F(C_i)|_{W=\cos}} \right) = \rho_i \left(-\frac{V'_{Ot} \vec{i}}{\sqrt{U'_{Ot}{}^2 + V'_{Ot}{}^2}} + \frac{\vec{k}}{\sqrt{1 + V'_{Ot}{}^2 / U'_{Ot}{}^2}} \right), \tag{3}$$

де ρ_i - характеристичний параметр інструменту;

\vec{n}_w - одиничний вектор: $\vec{n}_w \perp MW$.

Похідні по часу відповідних координат у точці контакту з інструментом визначаються із матричного перетворення:

$$\begin{pmatrix} U'_{Ot} \\ V'_{Ot} \\ W'_{Ot} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U'_t \\ V'_t \\ W'_t \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & 0 & 0 \\ -\Delta_2 & \Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Одиничний вектор \vec{n}_w вважається додатнім, якщо дивлячись із початку координат, спостерігач бачить, що при обході поверхні деталі зліва направо інструмент залишається з лівої сторони відносно поверхні і від'ємним – якщо з правої.

Величина характеристичного параметра інструменту ρ_i визначається розміщенням формоутворюючого інструменту у рухомій системі координат, за умови дотику контактної площини до оброблюваної поверхні. Однак в процесі формоутворення розташування інструменту

відносно рухомої системи координат змінюється в процесі відносного переміщення характеристичної лінії $L - L$, це дає підстави стверджувати, що $\rho_i = \rho_i(\xi)$. Ця умова особливо актуальна у випадках формоутворення поверхонь операціями різання та зміцнення.

Згідно побудови, вектор \vec{G} в напрямку співпадає з віссю $C_i Y_K$, а його значення у тій же системі координат слід визначати як функцію $Y_K = \rho_i(\xi)$, значення якої залежить від розташування формоутворюючого інструменту.

Проектуючи рівняння (2.19) на осі координат верстату, отримаємо:

$$\begin{aligned} U &= U_C^K \pm \left(U_P + \rho_i(\xi) V_i' / \sqrt{U_i'^2 + V_i'^2} \right); \\ W &= W_C^K + W_P; \\ V &= V_C^K \pm \left(V_P + \rho_i(\xi) / \sqrt{1 + (V_i'/U_i')^2} \right), \end{aligned} \tag{5}$$

де U, W, V - координати точки E , яка визначає розміщення виконавчих органів верстату; $\rho_i(\xi)$, $V_i' / \sqrt{U_i'^2 + V_i'^2}$ - функції кутів нахилу контактної площини формоутворюючого інструменту.

U_P, W_P, V_P - координати вектора P_E , величина якого визначається конструктивними особливостями технологічного устаткування. У багатьох випадках визначення його величини пов'язане зі значними труднощами, тому можна прийняти $U_P = W_P = V_P = 0$.

У рівнянні (4) верхні знаки -, "+", використовуються при додатньому значенні одиничного вектора, "-" при від'ємному.

Аналіз запропонованих рівнянь (5) показує, що існують поверхні, в процесі формоутворення яких не забезпечується змінний кут нахилу контактної площини. Для забезпечення цього зв'язку необхідно переміщувати формоутворюючий інструмент, розглядаючи його у просторі як жорстко зв'язаний з рухомою системою координат $CX_K Y_K Z_K$ і як рухоме тіло відносно цієї системи. В результаті такого підходу зв'язок між робочими переміщеннями можна виразити у вигляді рівнянь в переміщеннях:

$$\begin{aligned} \Delta U_E &= \left[1 - \frac{\rho_i(\xi) \varepsilon_{1i}}{(1 + \varepsilon_2^2)^{3/2}} + \frac{\rho_i(\xi) \xi_i' \varepsilon_2}{x_i' (1 + \varepsilon_2^2)^{1/2}} \right]; \\ \Delta W_E &= \rho_i(\xi) \xi_i' \text{ctg} \xi \Delta U_C^K; \\ \Delta V_E &= \left[\varepsilon_2 - \frac{\rho_i(\xi) \varepsilon_{1i} \varepsilon_2}{(1 + \varepsilon_2^2)^{3/2}} - \frac{\rho_i(\xi) \xi_i'}{x_i' (1 + \varepsilon_2^2)^{1/2}} \right], \end{aligned} \tag{6}$$

де $\varepsilon_1 = \left| \begin{matrix} U_i' & V_i' \\ U_i'' & V_i'' \end{matrix} \right| / (U_i')^3$; $\varepsilon_2 = V_i' / U_i'$; $\Delta U_E, \Delta W_E, \Delta V_E$ - величини переміщень

виконавчих органів верстату; $\varepsilon_{1i} / (1 + \varepsilon_2^2)^{3/2}$ - кривина координатної лінії оброблюваної поверхні ГЗ.

В процесі формоутворення поверхонь вказаних заготовок в багатьох випадках має місце умова: $\psi = \psi(t)$. Тоді у рівнянні (2) вектор $\vec{G} = \vec{G}(\psi, C)$. Причому

$$\vec{G}(\psi, C) = \rho \zeta(\psi) \left(\frac{\text{grad } F(C)}{|\text{grad } F(C)|} \right)_{W=\cos t}, \tag{7}$$

де $\zeta(\psi)$ - матриця Верзора: $\zeta(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$.

Підставивши вираз (5) у рівняння (2) та спроектувавши його на осі координат, отримаємо:

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= U_C^K \pm \left(U_P + \rho_i(\theta) V_t' / \sqrt{U_t'^2 + V_t'^2} \right); \\ W &= W_C^K + \left(W_P + \rho_i(\theta) \sin \psi / \sqrt{1 + (V_t'/U_t')^2} \right); \\ V &= V_C^K \pm \left(V_P + \rho_i(\theta) \cos \psi / \sqrt{1 + (V_t'/U_t')^2} \right).\end{aligned}\quad (8)$$

Розкладемо вираз (2.19), підставивши в нього залежність (2.22) у ряд Тейлора в околі довільної точки E_0 в момент часу t_0 :

$$\overline{S(E)} = \overline{S(E_0)} + \overline{S(E_0)'} + \overline{S(E_0)''} / 2 + \dots, \quad (9)$$

де E_0 - початкове положення точки E .

Обмежившись величиною малості другого порядку у формулі (8), слід відзначити, що закон переходу із будь-якого кінематичного стану верстату у сусідній в першому наближенні можна завжди характеризувати криволінійним переміщенням точки E по дотичній до траєкторії еквідистантної кривої, визначеній в околі цієї точки. Тоді вектор абсолютного переміщення точки E : $\overline{dS} = \overline{\Delta S(E)} = \overline{S(E)} - \overline{S(E_0)}$. Диференціюючи вираз (2.19), отримаємо:

$$\begin{aligned}\overline{dS} &= \overline{dR_{C_i}} + \overline{dP_i} + \rho \zeta'(\psi) d \left(\frac{\overline{\text{grad } F(C_i)}}{|\overline{\text{grad } F(C_i)}|} \right)_{W=\text{const}} + \\ &+ \rho \left(\frac{\overline{\text{grad } F(C_i)}}{|\overline{\text{grad } F(C_i)}|} \right)_{W=\text{const}} d\zeta'(\psi).\end{aligned}\quad (10)$$

Прийнявши, що $\vec{P} = 0$, а останній член цього виразу суттєво не впливає на кінематику розглядуваного процесу, тоді процес формоутворення буде здійснюватись поєднанням декількох елементарних рухів. Розглядаючи одні з них як переносні, а інші як відносні, можна реалізувати їх взаємодією кінематичних ланцюгів механізмів верстату, які визначатимуть переміщення інструменту у відповідності з обертанням оправи.

Отже, взаємозалежні рухи кінематичних ланцюгів визначимо із проекцій векторів рівняння (2.27) на координатні вісі:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{U}_E &= \left(1 - \frac{\rho_i(\xi) \varepsilon_1 (1 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_2)}{(1 + \varepsilon_2^2)^{3/2}} \right) \Delta U - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3 \rho_i(\xi) (1 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_2)}{(1 + \varepsilon_2^2)^{3/2}} \Delta W; \\ \Delta \tilde{W}_E &= \left(1 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3 \rho_i(\xi) \sin \psi}{(1 + \varepsilon_2^2)^{3/2}} \right) \Delta W + \frac{\rho_i(\xi) \varepsilon_1 \sin \psi}{(1 + \varepsilon_2^2)^{3/2}} \Delta U; \\ \Delta \tilde{V}_E &= \left(\frac{V_t'}{W_t'} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3 \rho_i(\xi) \cos \psi}{(1 + \varepsilon_2^2)^{3/2}} \right) \Delta W + \left(\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3 \rho_i(\xi) \cos \psi}{(1 + \varepsilon_2^2)^{3/2}} \right) \Delta U,\end{aligned}\quad (11)$$

де $\Delta \psi = d\psi$;

$\varepsilon_3 = x_t'/y_t'$.

Таким чином, абсолютна криволінійна траєкторія руху виконавчих органів верстату описуватиметься формулою:

$$S_{TP} = \sum_{i=1}^{\lambda} d\tilde{U}_i, d\tilde{W}_i, d\tilde{V}_i, d\psi_i, \quad (12)$$

де λ - кількість опорних точок характеристичної лінії контура поверхні навивної заготовки.

У випадку дослідження процесів формоутворення НЗ, ширина стрічки яких змінюється за відомою залежністю $B = B(t)$, можна розглядати рівняння оправи, як функцію, що диференціюється, а параметр інструменту $\rho_i = \rho_i(\xi) + B(t)$.

Таким чином, поданий метод розрахунку дає можливість:

- а) Визначити послідовність злагоджених переміщень ланок виконавчих механізмів, які забезпечують реалізацію заданих питань вихідного технологічного завдання;
- б) Розрахувати траєкторію переміщень формоутворюючого інструменту і підготувати необхідну документацію;
- в) Використовувати одержані формули для розрахунку і проектування необхідного технологічного устаткування та формоутворюючого інструменту.
- г) В процесі проектування нового обладнання правильно вибрати кінематику виконавчих органів верстату.
- е) Здійснювати попередні дослідження вказаних процесів в режимі аналітичного 3D-моделювання.

Висновки:

1. Розроблена математична модель формоутворення навивних заготовок;
2. Виведені аналітичні залежності для розрахунку траєкторії переміщень формоутворюючого інструменту і силових та динамічних характеристик.

1. Карпусь В.Є. Технологічні основи машинобудування. – Харків, 2007. – 290 с.
2. Кіндрацький Б. Концепція і алгоритм багатокритеріального структурного параметричного синтезу машинобудівних конструкцій // Вісник Тернопільського державного технічного університету . – 2003. – Т.8, число 1. – С. 80 – 82.
3. Кожевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями. – К.: Академия наук УССР, 1961. – 160 с.
4. Аверкиев Ю.А. Характер формоизменения и силовые усилия при гибке полосы на ребро // Вестн. Машиностроения, 1981. – №1. – С. 64-66.
5. Макаров А.Д. Оптимизация процессов резания. // М.: Машиностроение – 1976 – 278 с.
6. Комаров М.С. Динамика механизмов и машин . – М.: Машиностроение, 1969. – 296 с.

Стаття надійшла до редакції 04.09.2013.