УДК 539.3

О.В. Гуда
Луцький національний технічний університет

ВИВЕДЕННЯ РІВНЯНЬ РУХУ ТА РОЗРАХУНОК ВЛАСНИХ ЧАСТОТ ТРАНСТРОПНИХ ПЛАСТИН З УРАХУВАННЯМ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ, ДЕФОРМАЦІЙ ПОПЕРЕЧНОГО ОБТИСНЕННЯ ТА ПОПЕРЕЧНОГО НОРМАЛЬНОГО НАПРУЖЕННЯ

У даній роботі за допомогою варіаційного принципу виведено рівняння руху, які враховують деформації поперечного зсуву та обтиснення. На основі отриманих рівнянь досліджено поперечні коливання круглої пластинки. Наведено аналіз розрахунків власних частот пластинки.

Ключові слова: *ізотропні та транстропні пластини, поперечний зсув, поперечне обтиснення, згинальні моменти, поперечні сили, прогин, напруження, коливання.*

Форм. 20. Табл. 4. Літ. 7.

О.В. Гуда

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ТРАНСТРОПНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА, ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО ОБЖАТИЯ И ПОПЕРЕЧНОГО НОРМАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

В даной работе с помощью вариационного принципа выведены уравнения движения, которые учитывают деформации поперечного сдвига и обжатия. На основании полученых уравнений исследованы поперечные колебания круглой пластинки. Приведен анализ расчетов собственных частот пластинки.

Ключевые слова: *изотропные и транстропные пластины, поперечный сдвиг, поперечное обжатие, сгибальные моменты, поперечные силы, изгиб, напряжение, колебания.*

O.V. Guda

DISPLAY THE EQUATIONS OF MOTION AND THE CALCULATION OF NATURAL FREQUENCIES OF TRANSTROPIC PLATES, CONSIDERING TRANSVERSE SHEAR, DEFORMATIONS OF TRANSVERSE COMPRESSION AND TRANSVERSE NORMAL STRESS

In this work, using the variational principle, the equations of motion were derived. These equations take into account the deformations of transverse shear and compression. Based on the received equations the transverse vibrations of a circular plate were researched. The analysis of the calculation of natural frequencies of the plate is shown.

Keywords: *isotropic and transtropic plates, transverse shear, transverse compression, bending moments, transverse forces, deflection, stress, vibrations.*

Постановка проблеми. Виробництво нових конструкцій, елементами яких є пластини, спонукає до поглиблення досліджень широкого кола наукових задач і науково-технічних проблем, що стосуються розрахунків конструкцій або їх елементів на коливання та міцність. Проектування і розрахунок сучасних тонкостінних елементів конструкцій, якими є композитні балки та пластини середньої товщини, потребує підвищеної точності розрахунків для забезпечення міцності, довговічності та надійності їх в експлуатації. За таких розрахунків забезпечення елементів конструкції достатньою контактною міцністю та тріщиностійкістю є актуальною науково-технічною проблемою.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У більшості випадків, в основу некласичних (уточнених) моделей напружено-деформованого стану пластин середньої товщини, їх авторами покладаються кінетичні гіпотези для складових вектора переміщень, де тангенціальні складові переміщень змінюються лінійно (класична теорія тонких пластин, прикладні теорії типу С.П. Тимошенка, Е. Рейсснера) відносно поперечної координати або за законом кубічної параболи (теорії С.О. Амбарцумяна, В.З. Власова, Х.М. Муштарі, В.Г. Піскунова, О.О. Расказова, О.Ф. Рябова, Р. Крістенсена та ін.). Разом з тим, вплив поперечних деформацій у цих моделях (за виключенням В.Г. Піскунова) авторами враховувався частково. Пізніше вплив поперечного обтиснення почали враховувати в задачах про контактну взаємодію жорстких штампів із пластинками та оболонками. Впливу поперечного обтиснення на вищі частоти коливань пластин і оболонок присвячено значно менше робіт. У багатьох випадках такі дослідження проводились у постановках просторової задачі теорії пружності.

Метою дослідження є побудова нового варіанту моделі руху транстропних пластин середньої товщини, який враховує як ефекти поперечного зсуву, так і деформацію поперечного обтиснення, поперечне нормальне напруження та інерцію обертання поперечних перерізів.

Основні результати дослідження. Для виведення рівнянь руху та граничних умов у круглій плиті, скористаємося варіаційним принципом Лагранжа для повної енергії пружної системи [2, 5]

$$\delta \Pi = \delta A, \tag{1}$$

де

$$\delta\Pi = \iiint_{V_p} \left(\sigma_r \cdot \delta\varepsilon_r + \sigma_\theta \cdot \delta\varepsilon_\theta + \sigma_z \cdot \delta\varepsilon_z + \tau_{r\theta} \cdot \delta\gamma_{r\theta} + \tau_{rz} \cdot \delta\gamma_{rz} + \tau_{\theta z} \cdot \delta\gamma_{\theta z} \right) dV_p$$ – варіація потенціальної енергії деформації; $dV_p = rdrd\theta dz$ – елемент об'єму плити;

$$\delta A = \iiint_{V_p} \left(F_r \delta U + F_\theta \delta V + F_z \delta W \right) dV_p + \iint_S \left(q^- \delta W^- - q^+ \delta W^+ \right) dS$$ – варіація роботи об'ємних та поверхневих сил; $dS = rd\theta dr$ – елемент поверхні плити; U, V, W – переміщення пластинки в напрямку осей координат r, θ, z $W^\pm$ – компоненти вектора пружного переміщення на зовнішніх поверхнях $z = \pm h$ плити; $F_r = -\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$; $F_\theta = -\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$; $F_z = -\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ – проекції сил інерції на відповідні координатні осі, віднесені до одиниці об'єму, які формально виконують роль об'ємних сил; ρ – густина.

Здійснюючи варіювання з урахуванням формул інтегрування частинами і співвідношень типу $\delta\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}(\delta U)$ та використовуючи формули Коші для компонент деформації

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r},\ \varepsilon_\theta = \frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta},\ \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z},$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r},\ \gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r},\ \gamma_{z\theta} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta},$$

варіація потенціальної енергії буде

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = {} & \iiint_{V_p} \left[\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r \delta U) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\sigma_\theta}{r}\delta V\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_z \delta W) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\tau_{r\theta}}{r}\delta U\right) + \frac{\partial}{\partial r}(\tau_{r\theta}\delta V) + \right.\\
& \left. + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{rz}\delta U) + \frac{\partial}{\partial r}(\tau_{rz}\delta W) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{z\theta}\delta V) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\tau_{\theta z}}{r}\delta W\right) \right] dV_p - \\
& - \iiint_{V_p} \left(\frac{\tau_{r\theta}}{r}\delta V - \frac{\sigma_\theta}{r}\delta U + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}\delta U + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}\delta V + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\delta W + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}\delta U + \right.\\
& \left. + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}\delta V + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}\delta U + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}\delta W + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}\delta V + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}\delta W \right) dV_p = \\
& = \iint_{S_r} r\sigma_r \delta U d\theta dz + \iint_{S_\theta} \sigma_\theta \delta V drdz + \iint_{S_z} r\sigma_z \delta W drd\theta + \\
& + \iint_{S_\theta} \tau_{r\theta}\delta U drdz + \iint_{S_r} r\tau_{r\theta}\delta V d\theta dz + \iint_{S_z} r\tau_{rz}\delta U drd\theta + \iint_{S_r} r\tau_{rz}\delta W d\theta dz + \iint_{S_z} r\tau_{z\theta}\delta V drd\theta + \\
& + \iint_{S_\theta} \tau_{z\theta}\delta W drdz - \iiint_V \left(\frac{\sigma_r}{r}\delta U + \frac{\tau_{r\theta}}{r}\delta V + \frac{\tau_{rz}}{r}\delta W + \frac{\tau_{r\theta}}{r}\delta V - \right.\\
& - \frac{\sigma_\theta}{r}\delta U + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}\delta U + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}\delta V + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\delta W + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}\delta U + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}\delta V + \\
& \left. + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}\delta U + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}\delta W + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}\delta V + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}\delta W \right) dV_p,
\end{aligned} \tag{2}$$

а варіація потенціалу зовнішніх сил

$$\delta A = -\rho \iiint_{V_p} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\delta U + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\delta V + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\delta W \right) dV_p + \iint_S q_2 \delta\tilde{W} ds. \tag{3}$$

Підставляючи рівності (2) і (3) у варіаційне рівняння (1) та прирівнюючи до нуля в потрійному інтегралі вирази біля незалежних варіацій δU, δV, δW, отримаємо диференціальні рівняння руху елемента об'єму пластини в циліндричних координатах:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}++\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=\rho\frac{\partial^2U}{\partial t^2},\\ \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=\rho\frac{\partial^2V}{\partial t^2},\\ \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=\rho\frac{\partial^2W}{\partial t^2}.\end{gathered}\tag{4}$$

Скористаємося представленням напружень через внутрішні зусилля та моменти, щоб отримати рівняння рівноваги через зусилля і моменти, а також граничні умови на краях пластинки:

$$\begin{aligned}&\sigma_r=\frac{N_r}{2h}+\frac{M_rz}{I}+\frac{(1-\alpha)\tilde E}{G'}f_0(z)\left(\frac{\partial Q_r}{\partial r}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta}+\frac{\nu}{r}Q_r\right)+\\ &+\frac{(1-\alpha)\tilde Eh^2}{2E'}f_0(z)\left(\frac{\partial^2q_2}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2q_2}{\partial\theta^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial q_2}{\partial r}\right)+A'\big(q_1+q_2\left(f_0(z)-1\right)\big)+zA'\rho\frac{\partial^2W}{\partial t^2};\\ &\sigma_\theta=\frac{N_\theta}{2h}+\frac{M_\theta z}{I}+\frac{(1-\alpha)\tilde E}{G'}f_0(z)\left(\nu\frac{\partial Q_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r}Q_r\right)+\\ &+\frac{(1-\alpha)\tilde Eh^2}{2E'}f_0(z)\left(\nu\frac{\partial^2q_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2q_2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial q_2}{\partial r}\right)+A'\big(q_1+q_2\left(f_0(z)-1\right)\big)+zA'\rho\frac{\partial^2W}{\partial t^2};\\ &\tau_{r\theta}=\frac{N_{r\theta}}{2h}+\frac{H_{r\theta}z}{I}+\frac{(1-\alpha)\tilde E}{G'}f_0(z)\left(\frac{\partial Q_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r}Q_\theta\right)+\\ &+\frac{(1-\alpha)\tilde Eh^2}{2E'}f_0(z)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial q_2}{\partial\theta}+\frac{\partial q_2}{\partial r}\right);\\ &\tau_{rz}=\frac{G'}{K'}\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)Q_r;\ \ \tau_{\theta z}=\frac{G'}{K'}\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)Q_\theta;\end{aligned}\tag{5}$$

де $f_0(z)=\dfrac{z}{4h^3}\left(0{,}6h^2-z^2\right)$, $K'=\dfrac{4}{3}G'h$, $A'=\dfrac{\nu''}{1-\nu}$, $\tilde E=\dfrac{E}{1-\nu^2}$.

Врахувавши розвинення переміщень пластинки U,V,W в напрямку осей координат r, θ, z у вигляді притятих степеневих рядів за поперечною координатою z, запишемо вирази для компонент пружних переміщень, у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}&U(r,\theta,z)=u+\gamma_rz+\psi_r\left(\frac{z}{5}-\frac{z^3}{3h^2}\right);\\ &V(r,\theta,z)=v+\gamma_\theta z+\psi_\theta\left(\frac{z}{5}-\frac{z^3}{3h^2}\right);\\ &W(r,\theta,z)=w+\frac{2\alpha_0}{E'}q_1z+\frac{3\alpha_0}{4hE'}\tilde q_2z^2\left(1-\frac{z^2}{6h^2}\right)-A'\left(z\theta_0+\frac{z^2\theta_1}{2}-\frac{z^4\theta_3}{4h^2}\right)=\\ &=w+\frac{2\alpha_0}{E'}q_1z+\frac{3\alpha_0}{4hE'}\tilde q_2z^2\left(1-\frac{z^2}{6h^2}\right)-A'z\theta_0+\frac{1}{2}A'z^2\theta_3\left(3h^2+\frac{z^2}{2h^2}\right)+\frac{1}{2}A'z^2\Delta w,\end{aligned}\tag{6}$$

Тут $\theta_n = \frac{\partial u_n}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_n}{\partial \theta} + \frac{u_n}{r}$, $(n = 1,3)$; $\theta_0 = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}$, $\alpha_0 = \frac{1}{2} - v'A'$, $\tilde{q}_2 = q_2 + 2h\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$, $q_1 = 0.5\left(q^+ - q^-\right)$, $q_2 = q^+ + q^-$, q^+, q^- – навантаження на зовнішніх поверхнях пластини ($z = \pm h$), що направлені вниз, у напрямку осі Oz; γ_r, γ_θ – узагальнені кути повороту; ψ_r, ψ_θ – деформації поперечного зсуву серединної поверхні пластинки.

Використовуючи формули (5-6), знаходимо вираз для варіації потенціальної енергії:

$$\delta\Pi = \iint_S \int_{-h}^{h} \left(\sigma_r \cdot \delta\varepsilon_r + \sigma_\theta \cdot \delta\varepsilon_\theta + \sigma_z \cdot \delta\varepsilon_z + \tau_{r\theta} \cdot \delta\gamma_{r\theta} + \tau_{rz} \cdot \delta\gamma_{rz} + \tau_{\theta z} \cdot \delta\gamma_{\theta z}\right) dz dS =$$

$$= \iint_S \left(N_r \delta\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) + M_r \delta\left(\frac{\partial \gamma_r}{\partial r}\right) + \frac{N_\theta}{r}\delta u + \frac{M_\theta}{r}\delta\gamma_r + N_\theta \delta\left(\frac{\partial v}{r\partial\theta}\right) + M_\theta \delta\left(\frac{\partial \gamma_\theta}{r\partial\theta}\right) + \right.$$

$$+ N_{r\theta}\delta\left(\frac{\partial u}{r\partial\theta}\right) + H_{r\theta}\delta\left(\frac{\partial\gamma_r}{r\partial\theta}\right) + N_{r\theta}\delta\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) + H_{r\theta}\delta\left(\frac{\partial\gamma_\theta}{\partial r}\right) - \frac{N_{r\theta}}{r}\delta v - \frac{H_{r\theta}}{r}\delta\gamma_\theta +$$

$$\left. + Q_r \delta\gamma_r + Q_r \delta\left(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial r}\right) + Q_\theta\delta\gamma_\theta + Q_\theta\delta\left(\frac{\partial\tilde{w}}{r\partial\theta}\right)\right) dS .$$

Використовуючи формули інтегрування частинами та варіювання за незалежними змінними $u, v, \tilde{w}, \gamma_r, \gamma_\theta$, отримаємо для $\delta\Pi$ та δA:

$$\delta\Pi = -\iint_S \left[\left(\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r}\right)\delta u + \left(\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta} + \frac{2N_{r\theta}}{r}\right)\delta v + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta} + \frac{Q_r}{r} + q_2\right)\delta\tilde{w} + \left(\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r\right)\delta\gamma_r +$$

$$\left. + \left(\frac{\partial H_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta} + \frac{2}{r}H_{r\theta} - Q_\theta\right)\delta\gamma_\theta \right] dS + \int_L \left[\left(N_r l + N_{r\theta} m\right)\delta u + \right. \tag{7}$$

$$\left. + \left(N_{r\theta} l + N_\theta m\right)\delta v + \left(Q_r l + Q_\theta m\right)\delta\tilde{w} + \left(M_r l + H_{r\theta} m\right)\delta\gamma_r + \left(H_{r\theta} l + M_\theta m\right)\delta\gamma_\theta \right] dL.$$

$$\delta A = -2\rho h \iint_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v + \frac{h^2}{3}\frac{\partial^2\gamma_r}{\partial t^2}\delta\gamma_r + \frac{h^2}{3}\frac{\partial^2\gamma_\theta}{\partial t^2}\delta\gamma_\theta\right) dS + \iint_S \tilde{q}_2 \delta\tilde{w} dS.$$

Тут L – межа контуру області S, l та m – напрямні косинуси нормалі до контуру пластини.

Якщо прирівняти вирази біля незалежних варіацій в (7), одержимо систему рівнянь руху через внутрішні сили та моменти:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta} + \frac{2N_{r\theta}}{r} = 2\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r = \frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^2\gamma_r}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial H_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta} + \frac{2}{r}H_{r\theta} - Q_\theta = \frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^2\gamma_\theta}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta} + \frac{Q_r}{r} = -q_2 + 2\rho h\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{8}$$

де $\tilde{w} = w + \frac{1}{6}A'\Delta w h^2 + \frac{9\alpha_0 h A_2 q_2}{40E'}$; $\{N_r, N_\theta, N_{r\theta}, Q_r, Q_\theta\} = \int_{-h}^{h}\{\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}\}dz$;

$\{M_r, M_\theta, H_{r\theta}\} = \int_{-h}^{h}\{\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}\}zdz$; $Q_r = K'\cdot\psi_r$; $Q_\theta = K'\cdot\psi_\theta$; G' – модуль поперечного зсуву матеріалу пластинки.

Також рівняння (8) можна отримати з системи (4), якщо, наслідуючи С.О.Амбарцумяна [1], помножити всі рівняння системи (4) на dz, а перших два ще і на zdz та проінтегрувати їх в межах від $-h$ до h. Разом із тим, така методика не дозволяє отримати енергетично коректні граничні умови на краю пластинки.

Граничні умови отримаємо з контурного інтегралу, що входить у рівняння (7):

$$\left(N_r l + N_{r\theta} m\right)\delta u = 0;\quad \left(N_{r\theta} l + N_\theta m\right)\delta v = 0;\quad \left(Q_r l + Q_\theta m\right)\delta w = 0;$$

$$\left(M_r l + H_{r\theta} m\right)\delta\gamma_r = 0;\quad \left(H_{r\theta} l + M_\theta m\right)\delta\gamma_\theta = 0. \tag{9}$$

Із системи рівнянь (9) можна отримати статичні або геометричні граничні умови, в залежності від того який множник прирівняти до нуля.

Якщо підставити в рівняння (4) замість внутрішніх сил та моментів їх вирази, отримаємо систему п'яти рівнянь руху в шуканих функціях $u, v, w_\tau, \gamma_r, \gamma_\theta, \Omega$:

$$\begin{gathered}
\Delta u + \frac{1+\nu}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{v}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(u + 2\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) = -\frac{\nu''(1+\nu)}{E}\frac{\partial q_1}{\partial r} + 2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};\\
\Delta v + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(v - 2\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = -\frac{2\nu''(1+\nu)}{E(1-\nu)}\frac{1}{r}\frac{\partial q_1}{\partial\theta} + 2\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2};\\
\Delta\gamma_r + \frac{1+\nu}{2r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\gamma_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\gamma_r}{\partial\theta} + \frac{\gamma_\theta}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\gamma_r + 2\frac{\partial\gamma_\theta}{\partial\theta}\right) =\\
= \frac{4\psi_r}{5\varepsilon_\tau} - \frac{3}{5}\frac{\nu''(1+\nu)}{hE}\frac{\partial q_2}{\partial r} + \frac{\rho}{\tilde{E}}\frac{\partial^2\gamma_r}{\partial t^2} - A'\frac{\rho}{\tilde{E}}\frac{\partial^3\widehat{W}}{\partial r\partial t^2};\\
\Delta\gamma_\theta + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\gamma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\gamma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\gamma_r}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\gamma_\theta - 2\frac{\partial\gamma_r}{\partial\theta}\right) =\\
= \frac{8\psi_\theta}{5\varepsilon_\tau(1-\nu)} - \frac{6}{5}\frac{\nu''(1+\nu)}{(1-\nu)hE'}\frac{1}{r}\frac{\partial q_2}{\partial r} + \frac{\rho}{\tilde{E}}\frac{\partial^2\gamma_\theta}{\partial t^2} - A'\frac{\rho}{r\tilde{E}}\frac{\partial^3\widehat{W}}{\partial\theta\partial t^2};\\
K'\Delta w_\tau = -q_2 + 2\rho h\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial t^2}.
\end{gathered}\tag{10}$$

Тут $\psi_r = \frac{\partial w_\tau}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}$; $\psi_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial w_\tau}{\partial\theta} + \frac{\partial\Omega}{\partial r}$; $\gamma_r = -\frac{\partial\overline{w}}{\partial r} - \frac{4}{5}\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}$; $\gamma_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{w}}{\partial\theta} + \frac{4}{5}\frac{\partial\Omega}{\partial r}$;

$\overline{w} = w - \frac{2.4+\chi_0}{3+\chi_0}w_\tau + \frac{q_2 h}{E_0}$; $E_0 = \frac{40}{9}\left(3+\chi_0\right)E'$; $\chi_0 = \frac{3\nu''}{2G/G' - \nu''}$;

$\widehat{W} = w + 0.3A'h^2\Delta w + 0.43\alpha_0 A_2 q_2 h/E'$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$.

До цих рівнянь мають бути приєднані граничні умови (9) та початкові умови при $t = 0$:

$$\begin{aligned}
w &= w_0(r,\theta), & \frac{\partial w}{\partial t} &= w_1(r,\theta),\\
u &= u_0(r,\theta), & \frac{\partial u}{\partial t} &= u_1(r,\theta),\\
v &= v_0(r,\theta), & \frac{\partial v}{\partial t} &= v_1(r,\theta),
\end{aligned}\tag{11}$$

де $w_0, v_0, u_0, u_1, v_1, w_1$ – задані компоненти початкового переміщення і початкової швидкості від точки (r,θ).

Систему рівнянь рівноваги (10), можна звести до більш звичного вигляду, якщо замість величин $\gamma_r, \gamma_\theta, \psi_r, \psi_\theta$ підставити їх вирази через функції w, w_τ, Ω:

$$D\Delta^2 w_q = \left(1 - \varepsilon_1\Delta + \frac{\varepsilon'\rho h^4}{4G}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)q_2 - m\left(1-\varepsilon_1 h^2\Delta\right)\frac{\partial^2 \tilde{w}(r,t)}{\partial t^2} - m\varepsilon'\frac{\rho h^2}{4G}\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial t^4};$$

$$K'\Delta w_\tau = -q_2 + m\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2}; \quad \Delta\Omega - k^2\Omega = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}, \tag{12}$$

де $\varepsilon_1 = \dfrac{h^2}{10(1-\nu)}\left(8\dfrac{G}{G'} - 3\nu''\right)$; $D = \dfrac{2}{3}\dfrac{Eh^3}{1-\nu^2}$; $m = 2\rho h$ – маса одиниці поверхні пластинки; $\varepsilon' = 0.1\left(8\dfrac{G}{G'} + \nu''\right)$; $w_q = w + \varepsilon_2 q_2 / D$; $k^2 = \dfrac{5}{2}\dfrac{G'}{G}h^{-2}$; $\varepsilon_2 = \dfrac{h^4}{20\left(1-\nu^2\right)}\left(1-\alpha\right)\left(\dfrac{E}{E'} + A'\dfrac{E}{G'}\right)$; $\alpha = \dfrac{\nu''\cdot G'}{2G}$.

Отримані рівняння (12) цілком співпадають за формою з відповідними умовами та рівняннями для пластин класичної теорії. Відмінність вносять лише коефіцієнти, що враховують поперечний зсув та обтиснення. Дані рівняння враховують додатково інерцію обертання поперечних перерізів пластини та вплив нормального напруження. Якщо покласти нулю параметри ε' та A', а також $\Delta' \equiv 1 - \varepsilon\Delta$, то ці фактори в рівняннях (12) враховуватись не будуть. Неврахування інерції веде до втрати правої частини в рівнянні Гельмгольца.

Розглянемо вільні поперечні коливання трансверсально-ізотропної пластинки. Система диференціальних рівнянь вільних поперечних коливань трансверсально-ізотропної пластинки (12), у випадку $q_2 = 0$ буде мати вигляд:

$$\begin{gathered} D\Delta^2\tilde{w}(r,\theta,t) + m\left(1-\varepsilon_1\Delta\right)\frac{\partial^2\tilde{w}(r,\theta,t)}{\partial t^2} + m\varepsilon'\frac{\rho}{4G}\frac{\partial^4\tilde{w}(r,\theta,t)}{\partial t^4} = 0, \\ \Delta\Omega - k^2\Omega = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}, \end{gathered} \tag{13}$$

де $\Delta = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]$.

Записавши розв'язки системи рівнянь (13) для вільних коливань пластинки у вигляді:

$$w(r,\theta,t) = w(r)\cos n\theta\cos\omega_i t,\ \Omega(r,\theta,t) = f(r)\sin n\theta\cos\omega_i t, \tag{14}$$

одержимо рівняння для власних форм коливань, знехтувавши в першому рівнянні (13) членом з четвертою похідною за змінною t, вважаючи його малим по відношенню до інших членів з похідними нижчого порядку, одержимо

$$D\Delta_n\Delta_n w(r) + m\left(1+\varepsilon\Delta_n\right)\omega_i^2 w(r) = 0,\ \Delta_n f\left(r\right) - k^2 f\left(r\right) = 0, \tag{15}$$

де ω_i – кругова частота власних коливань пластинки, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ – кількість хвиль серединної площини пластинки в кільцевому напрямку, $\Delta_n = \dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr} - \dfrac{n^2}{r^2}$.

Загальний розв'язок системи (2.22) можна подати в вигляді:

$$\begin{gathered} w(r) = C_1 J_n(\alpha_i r) + C_2 Y_n(\alpha_i r) + C_3 I_n(\beta_i r) + C_4 K_n(\beta_i r), \\ f(r) = C_5 I_n(k_i r) + C_6 K_n(k_i r), \end{gathered} \tag{16}$$

де J_n, Y_n, I_n, K_n –функції Бесселя дійсного та уявного аргументу, C_i – сталі, які знаходимо з початкових та граничних умов.

З характеристичного рівняння для першого диференціального рівняння (15) маємо:

$$\alpha_i = \left(\sqrt{\omega_i^2 \frac{m}{D} + \left(\frac{\varepsilon_1 \omega_i^2 m}{2D} \right)^2} + \varepsilon_1 \omega_i^2 \frac{m}{2D} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_i = \left(\sqrt{\omega_i^2 \frac{m}{D} + \left(\frac{\varepsilon_1 \omega_i^2 m}{2D} \right)^2} - \varepsilon_1 \omega_i^2 \frac{m}{2D} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Використовуючи рівняння (17), отримаємо вираз для знаходження частоти власних коливань пластинки:

$$\omega_i = \alpha_i^2 \sqrt{\frac{D}{m}} \left(1 + \varepsilon_1 \alpha_i^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Якщо розглядається суцільна пластинка радіуса R, то в цьому випадку слід прийняти $C_2 = C_4 = C_6 = 0$. Тоді, врахувавши (14) та (16), отримаємо:

$$\begin{aligned} w(r,\theta,t) &= \left(C_1 J_n(\alpha_i r) + C_3 I_n(\beta_i r)\right) \cos n\theta \cos \omega_i t, \\ \Omega(r,\theta,t) &= C_5 I_n(k_i r) \sin n\theta \cos \omega_i t. \end{aligned} \quad (18)$$

У випадку шарнірного опертя по контуру $r = R$ граничні умови запишемо наступним чином:

$$w(R,\theta,t) = 0, \; M_r = 0, \; Q_\theta = 0, \quad (19)$$

де $M_r = -D\left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \theta^2} \right) - \varepsilon_0 h^2 q_2 + 0.8D(1-\nu)\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\Omega - \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right),$

$Q_\theta = K'\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_\tau}{\partial \theta} + \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) = -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\Delta \tilde{w}\right) - \frac{\varepsilon_1 h^2}{r}\frac{\partial q_2}{\partial \theta} + K'\frac{\partial \Omega}{\partial r},$

$q_2 = -m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha_i^2 \beta_i^2 D\left(C_1 J_n(\alpha_i r) + C_3 I_n(\beta_i r)\right)\cos n\theta \cos \omega_i t,$

$\tilde{w} = w + \frac{\varepsilon_2 q_2 h^4}{D}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{20(1-\nu)}\left(4\frac{E}{G'} - \nu''(7-\nu) \right), \quad \varepsilon_1 = \frac{2}{5}\left(1 - 0,75\nu^*\right)\frac{\tilde{E}}{G'}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{20}\left(1-\nu^*\right)\frac{\tilde{E}}{E'};$

$\tilde{E} = E/\left(1-\nu^2\right); \qquad \nu^* = 0,5\nu'' G'/G; \qquad w_\tau = -\frac{5}{4}\varepsilon_\tau h^2 \Delta w - \frac{\varepsilon_1 h^2}{r} q_2 - \frac{\varepsilon_2 h^4}{r}\Delta q_2, \qquad \varepsilon_\tau = 0.4\frac{\tilde{E}}{G'},$

$K' = \frac{4}{3}G'h$, $k^2 = 2.5h^{-2}\, G'/G$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – оператор Лапласа, $D = \frac{2}{3}\frac{Eh^3}{\left(1-\nu^2\right)}$; R і $2h$ – радіус і товщина пластинки.

З граничних умов (19) отримуємо систему трьох однорідних рівнянь відносно сталих інтегрування C_1, C_3, C_5. Розв'язуючи дану систему, отримаємо наступне трансцендентне рівняння:

$$\left(\alpha_{0i}^2 + \beta_{0i}^2\right)\left(\frac{0,4n^2 E}{G'\left(1+\nu\right)}\left(\frac{h}{R}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{k_{0i}\frac{I_{n-1}(k_{0i})}{I_n(k_{0i})} - n} \right) - 1 \right) = \left(1-\nu\right)\left(\alpha_{0i}\frac{J_{n-1}(\alpha_{0i})}{J_n(\alpha_{0i})} - \beta_0 \frac{I_{n-1}(\beta_{0i})}{I_n(\beta_{0i})} \right). \quad (20)$$

Тут $\alpha_{0i} = R\alpha_i$, $\beta_{0i} = R\beta_i$, $k_{0i} = Rk_i$. Між коренями α_i та β_i існує зв'язок: $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{1+\varepsilon\alpha_i^2}}$.

На основі наведених вище формул та рівнянь знайдено корені рівняння (20) та відповідні їм частоти $\tilde{\omega}_i = \sqrt{\frac{m}{D}}\omega_i$. Отримані результати, залежно від відношень G/G' та товщини пластини, подані в таблицях 1–3:

*Таблиця 1.***Перші частоти вільних коливань пластинки за різних матеріалів ($h/R = 0.05$)**

n	G/G', $h/R = 0.05$							
	0		1		2		5	
	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$
0	2,262	5,102	2,2619	5,065	2,2618	5,029	2,2614	4,924
	5,4579	29,304	5,4577	28,165	5,4574	27,148	5,4567	24,654
	8,6126	71,278	8,6122	65,179	8,6118	60,418	8,6108	50,659
1	3,727	13,784	3,727	13,522	3,726	13,268	3,725	12,595
	6,9606	47,188	6,961	44,369	3,96	41,988	6,959	36,65
	10,1353	97,285	10,135	86,553	10,134	78,725	10,133	63,903
2	5,0596	25,241	5,0587	24,38	5,0578	23,602	5,055	21,645
	8,3715	67,486	8,3708	61,968	8,37	57,611	8,3677	48,565
	11,586	125,163	11,5852	108,378	11,5845	96,926	11,5823	76,606

Таблиця 2. **Перші частоти вільних коливань пластинки за різних матеріалів ($h/R = 0.1$)**

n	G/G', $h/R = 0.1$							
	0		1		2		5	
	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$
0	2,2603	5,052	2,2598	4,911	2,2594	4,782	2,258	4,448
	5,4544	27,948	5,4535	24,505	5,4526	22,083	5,4502	17,656
	8,6077	64,206	8,6065	50,19	8,6055	42,584	8,6027	31,385
1	3,724	13,457	3,722	12,54	3,720	11,788	3,716	10,15
	6,9563	43,871	6,955	36,365	6,953	31,73	6,946	24,206
	10,1297	84,942	10,1282	63,236	10,127	52,588	10,1229	37,89
2	5,0558	24,213	5,0521	21,256	5,0484	19,567	5,0364	15,844
	8,3664	61,079	8,3635	48,126	8,3606	40,972	8,3518	30,304
	11,5802	106,008	11,5777	75,742	11,5713	62,027	11,568	44,009

Таблиця.3. **Перші частоти вільних коливань пластинки за різних матеріалів ($h/R = 0.2$)**

n	G/G', $h/R = 0.2$							
	0		1		2		5	
	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$
0	2,2538	4,863	2,2521	4,41	2,251	4,065	2,2457	3,367
	5,4434	23,951	5,4411	17,435	5,439	14,376	5,4336	10,262
	8,5963	48,483	8,5944	30,94	8,5927	24,513	8,5891	16,844
1	3,7136	12,35	3,707	10,038	3,701	8,667	3,684	6,511
	6,9441	35,325	6,939	23,887	6,936	19,228	6,925	13,394
	10,1188	60,829	10,116	37,341	10,113	29,302	10,106	19,963
2	5,0439	21,087	5,0282	15,654	5,0103	12,973	4,9258	9,184
	8,3544	46,534	8,3439	29,879	8,3322	23,687	8,2807	16,207
	11,5702	72,634	11,5623	43,362	11,5536	33,803	11,516	22,849

Якщо в рівнянні (20) покласти величини $\frac{E}{G'} = 0$, $\nu'' = 0$, та виконати граничний перехід при $k_{0i} \to \infty$,то отримаємо відповідне трансцендентне рівняння класичної теорії тонких пластин:

$$I_{n-1}(\alpha_{0i})J_n(\alpha_{0i}) - I_n(\alpha_{0i})J_{n-1}(\alpha_{0i}) = \frac{2\alpha_{0i}}{I_n(\alpha_{0i})J_n(\alpha_{0i})},$$

розв'язки якого подані в наступній табл. 4:

Таблиця 4. **Перші частоти вільних коливань пластинки в класичній теорії**

$n=0$		$n=1$		$n=2$	
α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$	α_i	$\tilde{\omega}_i$
2,2215	4,9350	3,7280	13,898	5,0729	25,734
5,4516	29,7199	6,9627	48,479	8,3776	70,184
8,6114	74,1562	10,1377	102,773	11,59074	134,345

Розроблено за [1]

Висновки. Аналіз числових даних, наведених у таблицях 1–3, дозволяє зробити наступні висновки:

1. При збільшенні товщини пластинки від $h/R = 0.05$ до $h/R = 0.2$ усі перші три частоти мають стійку тенденцію до зниження порівняно з результатами класичної теорії тонких пластинок. Наприклад, для випадку $n=1$ (табл. 4) частоти $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ і $\tilde{\omega}_3$, пораховані за рівняннями теорії Кірхгофа-Лява, відповідно дорівнюють 13,9; 48,5 та 102,8. Тоді, як за уточненими рівняннями для ізотропної пластинки ($G/G' = 1, \nu = 0.3$) відповідні результати (табл. 3, $h/R = 0.2$) будуть: 10,0; 23,9 та 37,3. Для транстропної плити ($G/G' = 5$) тієї ж самої товщини відповідні частоти зменшуються ще більше – до величин: 6,5; 13,4; 20,0, тобто перша частота зменшується більше ніж удвічі, друга в 3,6 рази, а третя – більше ніж у 5 раз порівняно із класичною теорією.

2. У випадку трансверсально-ізотропних пластин явище резонансу може виникнути значно швидше, ніж це передбачається класичною теорією Кірхгофа-Лява, яка фактично не може виявити першу частоту.

3. Тенденція завищення значень перших частот класичною теорією була підтверджена Г.Т. Грінченком [4] за допомогою тривимірних рівнянь теорії пружності.

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания / С.А. Амбарцумян. – 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Наука, 1987. – 360 с.
2. Васильев В.В. Механика конструкций из композитных материалов / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
3. Гершунов Е.М. Расчет круглых и кольцевых пластинок на действие произвольной динамической загрузки / Е.М. Гершунов // Отделение математики, механики. Известия АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – №6. – С. 89–95.
4. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т. Гринченко. К.: Наукова думка, 1978. – 264 с.
5. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости / А.И. Лурье. – М.: Гостехиздат, 1955. – 491 с.
6. Мелконян А.П. О колебаниях трансверсально-изотропных круглых пластинок / А.П. Мелконян, А.А. Хачатрян // Известия АН Армянской ССР. Механіка. – 1966. – Т. 19. – №3. – С. 26–34.
7. Швабюк В.И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально-изотропных плит / В.И. Швабюк // Прикладная механика. – 1980. – Т. 16. – №9. – С. 71–77.

Стаття надійшла до редакції 27.03.2014.