УДК 536.2

Б.С. Окрепкий, І.Я. Новосад

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КРУГОВОГО ЦИЛІНДРА З УРАХУВАННЯМ ТЕПЛООБМІНУ ЧЕРЕЗ ТОНКИЙ ПРОМІЖКОВИЙ ШАР

Побудовано розв'язок осесиметричної температурної задачі для ізотропного циліндра з урахуванням теплообміну між циліндром і зовнішнім середовищем через тонкий проміжковий шар. Отримано формули для визначення температурного поля в кожній точці циліндра. Досліджено вплив коефіцієнтів теплопровідності і теплообміну, а також контактної провідності проміжкового шару на розподіл температури в циліндрі.

Ключові слова: *теплопровідність, осесиметрична температурна задача, круговий циліндр, тонкий проміжковий шар, неідеальний тепловий контакт, ізотропні матеріали, теплообмін.*

Рис. 5. Форм. 20. Літ. 7.

Б.С. Окрепкий, И.Я. Новосад

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА С УЧЕТОМ ТЕПЛООБМЕНА ЧЕРЕЗ ТОНКИЙ ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ СЛОЙ

Построено решение осесимметричной температурной задачи для изотропного цилиндра с учетом теплообмена между цилиндром и внешней средой через тонкий промежуточный слой. Получены формулы для определения температурного поля в каждой точке цилиндра. Исследовано влияние коэффициентов теплопроводности и теплообмена, а также контактной проводимости промежуточного слоя на распределение температуры в цилиндре.

Ключевые слова*: теплопроводность, осесимметричная температурная задача, круговой цилиндр, тонкий промежуточный слой, неидеальный тепловой контакт, изотропные материалы, теплообмен.*

B.S. Okrepkiy, I.Y. Novosad

PROBLEM OF THERMAL CONDUCTIVITY FOR CIRCULAR CYLINDER IN VIEW OF HEAT EXCHANGE THROUGH THIN INTERMEDIATE LAYER

The article suggests the solution to axially symmetrical thermal problem for an isotropic cylinder considering heat transfer between the cylinder and the environment through a thin intermediate layer. Formulas for determining the temperature field at each point of the cylinder have been received. The influence of thermal conductivity and heat transfer coefficient, as well as, contact conductance of the intermediate layer on the temperature distribution in the cylinder has been investigated.

Keywords: *thermal conductivity, axially symmetrical temperature problem, a circular cylinder, a thin intermediate layer, imperfect thermal contact, isotropic materials, heat transfer.*

Постановка проблеми. Визначення деформацій і напружень з урахуванням температурних факторів є важливим завданням для дослідження міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їхньої взаємодії, при розрахунку конструкцій на пружній основі для раціонального використання конструкції і несучої здатності основи.

Аналіз остатніх досліджень і публікацій. В праці [1] досліджено вплив температурних факторів на характер взаємодії тіл. В статтях [2,3] розв'язані осесиметричні температурні задачі для системи двох контактуючих циліндрів з урахуванням неідеального теплового контакту між тілами. Зокрема в праці [4] розв'язана задача теплопровідності для двох контактуючих циліндрів з урахуванням неідеального теплового контакту через тонкий проміжковий шар.

Проте недостатньо вивчені задачі теплопровідності для кругового циліндра з урахуванням теплообміну через тонкий проміжковий шар між циліндром і зовнішнім середовищем.

Мета роботи. Побудувати розв'язок осесиметричної температурної задачі для кругового ізотропного циліндра з урахуванням теплообміну через тонкий проміжковий шар між циліндром і зовнішнім середовищем. Дослідити вплив коефіцієнтів теплообміну і теплопровідності, а також контактної провідності проміжкового шару на розподіл температурного поля в циліндрі.

Постановка задачі. Нехай задано круговий ізотропний циліндр радіуса R і довжини L. На верхній основі і бічній поверхні циліндра здійснюється теплообмін із зовнішнім середовищем по закону Ньютона. На нижній поверхні циліндра здійснюється теплообмін із зовнішнім середовищем через тонкий проміжковий шар [6]. При заданих припущеннях необхідно визначити температурне поле в циліндрі.

Введемо циліндричну систему координат r, θ, z центр якої лежить на нижній поверхні циліндра, а вісь OZ спрямована вздовж осі циліндра. Таким чином запропонована задача розв'язується при наступних граничних умовах.

Граничні умови для температури мають вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial z}+H_1\left(T-T_{01}\right)=0 \qquad \left(z=L;\ 0\le r\le R\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}+H_2\left(T-T_{02}\right)=0 \qquad \left(0\le z\le L;\ z=R\right) \tag{2}$$

$$\lambda_0\left[\left(1+\frac{\alpha_0}{2h_0}\right)T-\frac{\lambda_z}{2h_0}\frac{\partial T}{\partial z}\right]+\lambda_z\left(1+\frac{\alpha_0}{h_0}\right)\frac{\partial T}{\partial z}+\alpha_0\left(T_c-T\right)=0 \qquad \left(z=0;\ 0\le r\le\ R\right) \tag{3}$$

Тут $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ - оператор Лапласа; λ_z - коефіцієнт теплопровідності циліндра, $\lambda_0,\ \alpha_0$ - коефіцієнти теплопровідності і теплообміну проміжкового шару; h_0- контактна провідність; $T_c,\ T_{01},\ T_{02}$ - температура зовнішнього середовища.

Розв'язування крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Відомо [7], що в осесиметричному випадку температурне поле для ізотропного тіла визначається із рівняння:

$$\nabla^2 T=0 \tag{4}$$

Температурне поле в циліндрі знаходимо методом Фур'є. Загальний розв'язок має вигляд:

$$T(r,z)=A_0z+B_0+D_0\left(r^2-2z^2\right)+\sum_{k=1}^{\infty}J_0\left(\beta_k r\right)\left(A_k sh\beta_k z+B_k ch\beta_k z\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}I_0\left(\gamma_k r\right)\left(C_k\sin\gamma_k z+D_k\cos\gamma_k z\right) \tag{5}$$

де $A_k,B_k,C_k,D_k,\left(k=\overline{0,\infty}\right)$ - довільні постійні; $J_o\left(\beta_k r\right)$ функція Бесселя першого роду дійсного аргументу; $I_0\left(\gamma_k r\right)$ функція Бесселя першого роду уявного аргументу; $\beta_k=\frac{\mu_k}{R},\ \gamma_k=\frac{k\pi}{L}$ - власні значення задачі, які являються коренями характеристичних рівнянь

$$\sin\gamma_k L=0, \qquad J_1\left(\beta_k R\right)=0 \tag{6}$$

В формулі (5) для поставленої задачі можна покласти $C_k=0\left(k=\overline{0,\infty}\right)$. Інші постійні необхідно визначити із граничних умов.

Задовольнивши граничній умові (1), маємо співвідношення які зв'язують невідомі A_k, B_k, D_k, $\left(k=\overline{0,\infty}\right)$:

$$A_0-4D_0lR+\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k J_0\left(\mu_k\rho\right)\left(A_k ch\mu_k l+B_k sh\mu_k l\right)+H_1\Big[A_0lR+B_0+D_0R^2\left(\rho^2-2l^2\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}J_0\left(\mu_k\rho\right)\left(A_k sh\mu_k l+B_k ch\mu_k l\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^k I_0\left(\frac{k\pi}{l}\rho\right)D_k\Big]=H_1T_{01} \tag{7}$$

де $l=\frac{L}{R},\quad \rho=\frac{r}{R}.$

Помноживши (7) на $\rho,,\rho\ J_0\left(\mu_n\rho\right)$ і про інтегрувавши їх по ρ в межах від 0 до 1 з урахуванням ортогональності функцій Бесселя :

а) $\int\limits_0^1 \rho\ J_0(\mu_k\rho)d\rho = 0$

б) $\int\limits_0^1 \rho\ J_0(\mu_n\rho)J_0(\mu_k\rho)d\rho = \begin{cases} 0 & ,\mu_k \neq \mu_n \\ \frac{1}{2}J_0^2(\mu_n), & \mu_k = \mu_n \end{cases}$

і значень інтегралів

в) $\int\limits_0^1 \rho\ I_0\left(\frac{k\pi}{l}\rho\right)d\rho = \frac{l}{k\pi}I_1\left(\frac{k\pi}{l}\right)$

$$(8)$$

г) $\int\limits_0^1 \rho\ J_0(\mu_n\rho)I_0\left(\frac{k\pi}{l}\right)d\rho = \frac{k\pi}{l}J_0(\mu_n)\frac{I_1\left(\frac{k\pi}{l}\right)}{\mu_n^2 + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}$

д) $\int\limits_0^1 \rho^3 J_0(\mu_n\rho)d\rho = \frac{2J_0(\mu_n)}{\mu_n^2}$

одержимо зв'язок між невідомими постійними $B_k\left(k = \overline{0,\infty}\right)$ і $A_k, D_k\left(k = \overline{0,\infty}\right)$

$$B_0 = T_{01} - \left(\frac{1}{k_1} + l\right)A_0R - D_0R^2\left(\frac{1}{2} - 2l^2 - \frac{4l}{k_1}\right) - \frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k I_1\left(\frac{k\pi}{l}\right)}{k}D_k, \tag{9}$$

$$B_n = \frac{k_1}{\mu_n sh\mu_n l + k_1 ch\mu_n l}\left\{-\left(\frac{\mu_n}{k_1}ch\mu_n l + sh\mu_n l\right)A_n - \frac{4R^2D_0}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} - \frac{2\pi}{l\ J_0(\mu_n)}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k\ t_{n,k}I_1\left(\frac{k\pi}{l}\right)D_k\right\}$$

$$\left(n = \overline{1,\infty}\right)$$

де $k_1 = H_1R,$ $\qquad t_{n,k} = \frac{1}{\mu_n^2 + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}.$

Задовольнивши граничній умові (2), маємо:

$$2D_0R + \frac{\pi}{l\ R}\sum_{k=1}^{\infty}k\ I_1\left(\frac{k\pi}{l}\right)\cos\frac{k\pi}{l}\zeta\ D_k + H_2\Big[A_0R\zeta + B_0 + D_0R^2\left(1 - 2\zeta^2\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}J_0(\mu_k)(A_k sh\mu_k\zeta + B_k ch\mu_k\zeta) + \sum_{k=1}^{\infty}I_0\left(\frac{k\pi}{l}\right)\cos\frac{k\pi}{l}\zeta\ D_k\Big] = H_2T_{02} \qquad (0 \le \zeta \le l) \tag{10}$$

Помноживши (10) на $\cos\frac{\pi\ n}{l}\zeta$ $\left(n = \overline{1,\infty}\right)$ і про інтегрувавши по ζ.в межах від 0 до l з урахуванням ортогональності тригонометричних функцій і формул (9), одержимо співвідношення, які зв’язують невідомі A_k і $D_k\left(k = \overline{0,\infty}\right)$:

$$e_{0,0}D_0R^2 - \frac{2l^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k I_1\left(\frac{k\pi}{l}\right)}{k}D_k - \frac{2\pi k_1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}e(\mu_k)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m m\ I_1\left(\frac{m\ \pi}{l}\right)t_{k,m}D_m -$$

$$- A_0R\ l\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{2}l\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_k)\ u_{k,0}}{\mu_k}A_k = l\ (T_{02} - T_{01}), \tag{11}$$

$$e_{n,0}R^2D_0+\left[\frac{\pi}{2k_2}n\ I_1\left(\frac{\pi\ n}{l}\right)+\frac{1}{2}l\ I_0\left(\frac{\pi\ n}{l}\right)\right]D_n-\frac{2\pi}{l}k_1(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2e(\mu_k)\ l(\mu_k)t_{k,n}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m m\ I_1\left(\frac{m\ \pi}{l}\right)\ t_{k,m}D_m+A_0R\frac{l^2}{\pi^2n^2}\left[(-1)^n-1\right]-\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k u_{k,n}t_{k,n}J_0(\mu_k)A_k=0$$

де $k_2=H_2R,\quad e_{0,0}=\dfrac{2l}{k_2}+\dfrac{1}{2}l+\dfrac{4}{3}l^3+\dfrac{4l}{k_1}-4k_1\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e(\mu_k)}{\mu_k^2},\ e(\mu_k)=\dfrac{th\mu_k l}{\mu_k(\mu_k th\mu_k l+k_1)},$

$$u_{k,0}=1-\frac{k_1}{\mu_k sh\mu_k l+k_1ch\mu_k l},\quad u_{k,n}=1-\frac{(-1)^nk_1}{\mu_k sh\mu_k l+k_1ch\mu_k l},$$

$$e_{n,0}=-\frac{4\ l^3(-1)^n}{\pi^2n^2}-4(-1)^nk_1\sum_{k=1}^{\infty}e(\mu_k)\ t_{k,n} \qquad (12)$$

Задовільнивши граничну умову (3) і врахувавши формули (9), одержимо співвідношення, які зв’язують невідомі $D_k\left(k=\overline{0,\infty}\right)$, і $A_k\left(k=\overline{0,\infty}\right)$.

$$\left[4\gamma_2+\gamma_0\left(\frac{1}{2}-\rho^2-2l^2-\frac{4l}{k_1}\right)+4k_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\gamma_0+\gamma_3\mu_k^2)J_0(\mu_k\rho)}{\mu_k^2J_0(\mu_k)(\mu_k sh\mu_k l+ch\mu_k l)}\right]D_0R^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2l(-1)^kI_1\left(\frac{k\pi}{l}\right)}{\pi\ k}\gamma_0+\frac{2\pi}{l}k_1(-1)^kk\ I_1\left(\frac{k\pi}{l}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{\infty}t_{m,k}(\gamma_2\mu_m^2+\gamma_0)J_0(\mu_m\rho)+\left(\frac{\pi^2}{l^2}\gamma_2k^2-\gamma_0\right)I_0\left(\frac{k\ \pi}{l}\rho\right)\right\}D_k+\left[\gamma_1+\left(\frac{1}{k_1}+l\right)\gamma_0\right]A_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mu_k^3+\gamma_1\mu_k+k_1(\gamma_2\mu_k^2+\gamma_0)\frac{\mu_k-th\mu_k l}{\mu_k th\mu_k l+k_1}\right]J_0(\mu_{k\rho})A_k=\gamma_0[T_{01}-T_c] \qquad (13)$$

де, $\quad\gamma_0=2\ h_0^1\ r_1,\qquad \gamma_1=2\left(r_0\ h_0^1+r_1\right),\qquad h_0^1=\dfrac{h_0R}{\lambda_z},\qquad r_0=\dfrac{\lambda_z}{\lambda_0^*}=\dfrac{\lambda_zR}{\lambda_0},$

$$r_1=\frac{\alpha_0}{\lambda_0^*}=\frac{\alpha_0R}{\lambda_0},\qquad \gamma_2=2\left(h_0^1+\frac{1}{2\ r_0}\right),\qquad \gamma_3=2\left(1+h_0^1+\frac{1}{r_0}\right).$$

Помноживши обидві частини рівності (13) на $\rho,\ \rho\ J_0(\mu_n\rho)$, і проінтегрувавши їх по ρ, в межах від 0 до 1, з урахуванням ортогональності функцій Бесселя і значень інтегралів(8), знайдемо співвідношення, які зв’язують невідомі A_k і $D_k\left(k=\overline{0,\infty}\right)$:

а) $$\left[2\gamma_2-\gamma_0\left(l^2+\frac{2l}{k_1}\right)\right]R^2D_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{l}{\pi}\gamma_0\frac{\left[(-1)^k-1\right]}{k}+\frac{\pi}{l}\gamma_2k\right\}I_1\left(\frac{k\ \pi}{l}\right)D_k+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\gamma_1+\left(\frac{1}{k_1}+l\right)\gamma_0\right]A_0=\frac{1}{2}\gamma_0[T_{01}-T_c]. \qquad (15)$$

б) $$\left[-\frac{2\gamma_0}{\mu_n^2}J_0(\mu_n)R^2+2k_1\frac{(\gamma_0+\gamma_2^*\mu_n^2)J_0(\mu_n)}{\mu_n^2(\mu_n sh\mu_n l+ch\mu_n l)}\right]D_0R^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2\pi\ k_1}{l}\left(\gamma_2\mu_n^2+\gamma_0\right)\frac{J_0^2(\mu_n)}{2}\ t_{n,k}+\left(\frac{\pi^2}{l^2}\gamma_2 k^2-\gamma_0\right)\frac{\pi}{l}J_0(\mu_n)\frac{1}{\mu_n^2+\left(\frac{k\ \pi}{l}\right)^2}\right\}k\ I_1\left(\frac{k\ \pi}{l}\right)D_k+$$

$$+\left(\mu_n^3+\gamma_1\mu_n+k_1\left(\gamma_2\mu_n^2+\gamma_0\right)\right)\frac{\mu_n-th\mu_n l}{\mu_n th\mu_n l+k_1}\frac{J_0^2(\mu_n)}{2}A_n=0$$

Ввівши позначення $A_0=C_0^1\ T_{01}$, $A_k=C_k^1\ T_{01}$, $D_0R^2=T_{01}C_0^{(2)}$, $k^2I_1\left(\frac{k\ \pi}{l}\right)D_k=T_{01}C_k^{(2)}$ (16)

безмежні системи лінійних алгебраїчних рівнянь (11), (15) приймуть вигляд:

$$\alpha_{0,0}^{(1)}\ C_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}C_k^{(1)}\ \alpha_{0,k}^{(1)}+\alpha_{0,0}^{(2)}\ C_0^{(2)}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{0,k}^{(2)}\ C_k^{(2)}=b_0^{(1)}$$

$$\alpha_{n,0}^{(1)}\ C_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{n,k}^{(1)}\ C_k^{(1)}+\alpha_{n,0}^{(2)}\ C_0^{(2)}+\alpha_{n,n}^{(2)}\ C_n^{(2)}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{n,k}^{(2)}\ C_k^{(2)}=b_n^{(1)} \qquad (17)$$

$$\beta_{0,0}^{(1)}\ C_0^{(1)}+\beta_{0,0}^{(2)}\ C_0^{(2)}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{0,k}^{(2)}\ C_k^{(2)}=b_0^{(2)}$$

$$\beta_{n,n}^{(1)}\ C_n^{(1)}+\beta_{n,0}^{(2)}\ C_0^{(2)}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{n,k}^{(2)}\ C_k^{(2)}=b_n^{(2)}$$

де $\alpha_{0,0}^{(1)}=\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{2}l\right)$, $\alpha_{0,k}^{(1)}=\frac{J_0(\mu_k)\ u_{k,0}}{l\ \mu_k}$, $\alpha_{0,0}^{(2)}=-\frac{e_{0,0}}{l}$, $b_0^1=1-\frac{T_{02}}{T_{01}}$,

$$\alpha_{0,k}^{(2)}=\frac{2\ l}{\pi}\frac{(-1)^k}{k^3}+\frac{2\pi k_1(-1)^k}{l^2k}\sum_{m=1}^{\infty}t_{m,k}e(\mu_m).$$

$$\alpha_{n,0}^{(1)}=\frac{l^2}{\pi^2n^2}\left[(-1)^n-1\right],\qquad \alpha_{n,k}^{(1)}=-\mu_k\ u_{k,n}\ t_{k,n}J_0(\mu_k) \qquad (18)$$

$$\alpha_{n,0}^{(2)}=e_{n,0},\quad \alpha_{n,n}^{(2)}=\frac{\pi}{2k_2}\left[1+\frac{1}{2}l\ \frac{I_0\left(\frac{\pi\ n}{l}\right)}{nI_1\left(\frac{\pi\ n}{l}\right)}\right]\frac{1}{n}$$

$$\alpha_{n,k}^{(2)}=-\frac{2\pi}{l}\frac{k_1(-1)^{n+k}}{k}\sum_{m=1}^{\infty}t_{m,k}\mu_m^2e(\mu_m)\ t_{m,n}$$

$b_n^{(1)}=0$;

$$\beta_{0,0}^{(1)}=\frac{1}{2}\left[\gamma_1+\left(\frac{1}{k1}+l\right)\ \gamma_0\right],\quad \beta_{0,0}^{(2)}=2\gamma_2-\gamma_0\left(l^2+\frac{2\ l}{k_1}\right)\quad \beta_{0,k}^{(2)}=\frac{l}{\pi}\gamma_0\frac{\left[(-1)^k-1\right]}{k^3}+\frac{\pi}{l}\frac{\gamma_2}{k},$$

$$b_{0,2}=\frac{1}{2}\gamma_0\left(1-\frac{T_c}{T_{01}}\right)$$

$$\beta_{n,n}^{(1)}=\mu_n^3+\gamma_1\mu_n+k_1\left(\gamma_2\ \mu_n^2+\gamma_0\right)\frac{\mu_n-th\mu_n l}{\mu_n th\mu_n l+k_1}\frac{J_0^2(\mu_n)}{2}$$

$$\beta_{n,0}^{(2)}=-\frac{2\gamma_0}{\mu_n^2}J_0(\mu_n)+2k_1\frac{\left(\gamma_0+\gamma_3\mu_n^2\right)}{\mu_n^2\left(\mu_n sh\mu_n l+ch\mu_n l\right)}$$

$$\beta_{n,k}^{(2)} = \frac{2\pi k_1}{l}\left(\gamma_2\mu_n^2+\gamma_0\right)\frac{t_{n,k}}{k}\left(-1\right)^k\frac{J_0^2\left(\mu_n\right)}{2}+\left(\frac{\pi^2}{l^2}\gamma_2k^2-\gamma_0\right)\frac{\pi}{k\ l}J_0\left(\mu_n\right)\frac{1}{\mu_n^2+\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2},$$

$$b_n^{(2)} = 0.$$

Температурне поле в циліндрі, згідно формул (5, 9) і позначень (16), обчислюємо за формулою

$$T\left(\rho,\zeta\right)=T_0^{(1)}\left\{1+\Phi_0^{(1)}\left(\rho,\zeta\right)C_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k^{(1)}\left(\zeta\right)\ J_0\left(\mu_k\rho\right)C_k^{(1)}+\Phi_0^{(2)}\left(\rho,\zeta\right)\ C_0^{(2)}+\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k^{(2)}\left(\zeta\right)\ C_k^{(2)}\right\} \quad (19)$$

$$\left(0\le\zeta\le l,\quad 0\le\rho\le1\right)$$

де $\Phi_0^{(1)}\left(\zeta\right)=\frac{1}{k_1}+l-\zeta$, $\quad \Phi_k^{(1)}\left(\zeta\right)=\frac{k_1sh\mu_k\left(\zeta-l\right)-\mu_kch\mu_k\left(\zeta-l\right)}{\mu_ksh\mu_k\ l+k_1ch\mu_k\ l}$,

$$\Phi_0^{(2)}\left(\rho,\zeta\right)=\rho^2-2\zeta^2-\frac{1}{2}+2\ l^2+\frac{4\ l}{k_1}-4k_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_{k\rho}\right)ch\mu_k\zeta}{\mu_k^2J_0\left(\mu_k\right)\left(\mu_ksh\mu_k\ l+k_1ch\mu_k\ l\right)}$$

$$\Phi_k^{(2)}\left(\rho,\zeta\right)=-\frac{2\ l}{\pi}\frac{\left(-1\right)^k}{k^3}-\frac{2\pi}{l}\frac{\left(-1\right)^k}{k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_m\rho\right)\ t_{m,k}ch\mu_m\zeta}{J_0\left(\mu_m\right)\left(\mu_msh\mu_m\ l+k_1ch\mu_m\ l\right)}+\frac{I_0\left(\frac{k\ \pi}{l}\rho\right)}{k^2I_1\left(\frac{k\ \pi}{l}\right)}\cos\frac{k\pi}{l}\zeta \quad (20)$$

Розглянуто числовий приклад.

На основі викладеного вище видно, що в кінцевому результаті,розв’язок температурної задачі зводиться до визначення деяких постійних із безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через які знаходяться температурне поле в любій точці циліндра. Дана система рівнянь є квазірегулярна при любих співвідношеннях теплофізичних характеристиках тіла. Враховуючи це, розв’язок її знаходимо методом редукції із усіченої системи.

Для числових підрахунків розв’язувались системи 30-ти лінійних алгебраїчних рівнянь з 30-ма невідомими для $T_{01}=T_0,\quad T_{02}=0,\quad T_c=0,\quad k_1=\infty,\quad k_2=0,\quad l=1$.

На рис.1 показано розподіл безрозмірної темпера тури $\alpha_1=\frac{T}{T_0}$ по товщині циліндра при фіксованому $h_0^1=\frac{h_0R}{\lambda_z}=1,\quad r_1=\frac{\alpha_0R}{\lambda_0}=1,$ і різних значеннях $r_0=\frac{\lambda_zR}{\lambda_0}$ (цифри біля кривих).

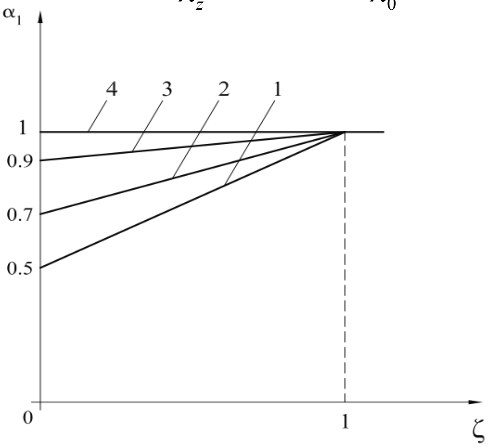

Рис. 1. **Розподіл температури по товщині циліндра при фіксованому $h_0^1=1$, $r_1=1$ і різних значеннях r_0: крива $1-r_0=0$; $2-r_0=1$; $3-r_0=10$; $4-r_0=\infty$**

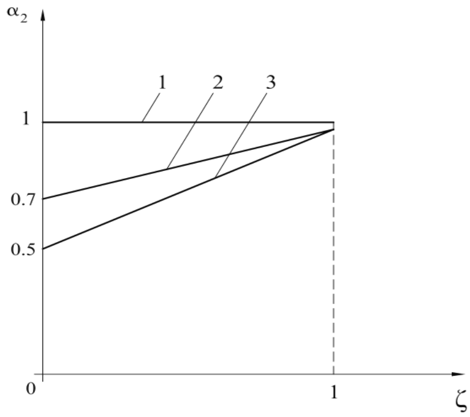

Рис. 2. **Розподіл температури по товщині циліндра при фіксованому $r_0=1$, $r_1=1$ і різних значеннях $h_0^{(1)}$: крива $1-h_0^1=0$; $2-h_0^1=1$; $3-h_0^1=\infty$**

На рис. 2 показано розподіл безрозмірної температури $\alpha_2 = \dfrac{T}{T_0}$, по товщині циліндра при фіксованому $r_0 = 1$, $r_1 = 1$ і різних значеннях $h_0^{(1)}$ (цифри біля кривих).

На рис.3 показано розподіл безрозмірної температури $\alpha_3 = \dfrac{T}{T_0}$, в циліндрі при $\zeta = 0$ $r_1 = 1$ і різних значеннях $h_0^{(1)}$ (цифри біля кривих).

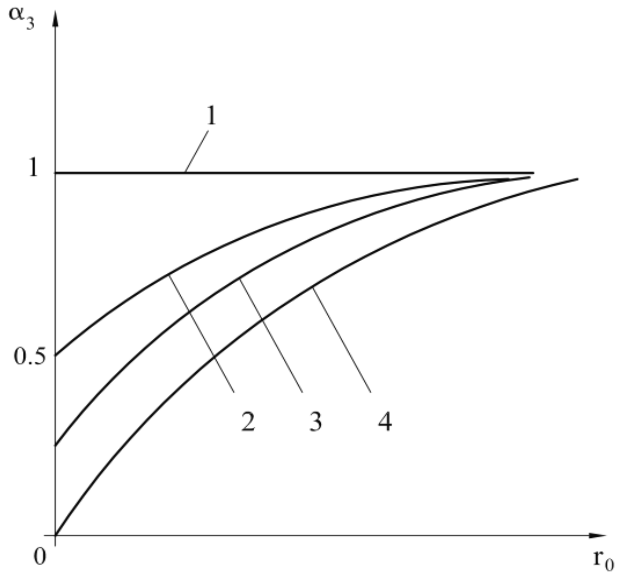

Рис. 3. **Розподіл температури в циліндрі при $\zeta = 0$, $r_1 = 1$ і значеннях h_0^1: крива $1 - h_0^1 = 0;\ 2 - h_0^1 = 1;\ 3 - h_0^1 = 5;\ 4 - h_0^1 = \infty$.**

На рис. 4 показано розподіл безрозмірної температури $\alpha_4 = \dfrac{T}{T_0}$, в циліндрі при $\zeta = 0$ $r_1 = 1$ і різних значеннях параметра r_0 (цифри біля кривих).

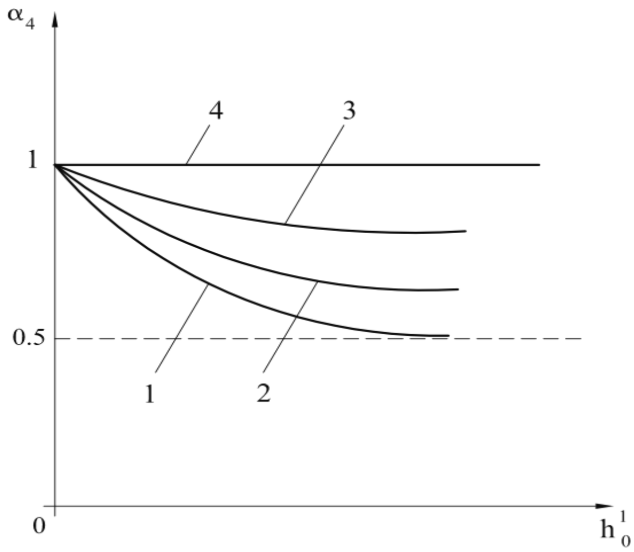

Рис. 4. **Розподіл температури в циліндрі при $\zeta = 0$, $r_1 = 1$ і різних значеннях параметра r_0: крива $1 - r_0 = 0;\ 2 - r_0 = 1;\ 3 - r_0 = 10;\ 4 - r_0 = \infty$**

На рис. 5 показано розподіл безрозмірної температури $\alpha_5 = \dfrac{T}{T_0}$, в циліндрі при $\zeta = 0$, $h_0^1 = 1$ і різних значеннях параметра r_0 (цифри біля кривих).

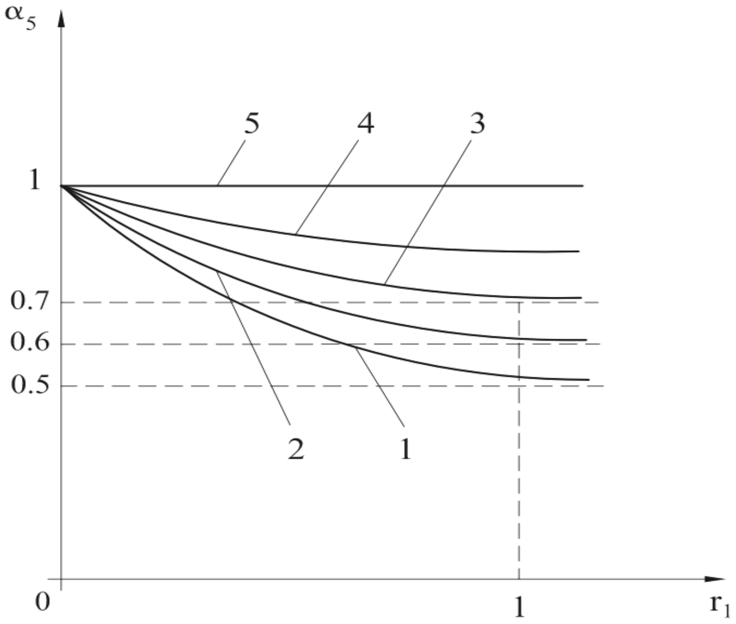

Рис. 5. **Розподіл температури в циліндрі при $\zeta = 0$, $r_1 = 1$ і різних значеннях параметра r_0: крива** $1 - r_0 = 0{,}1$; $2 - r_0 = 1$; $3 - r_0 = 5$; $4 - r_0 = 10$; $5 - r_0 = \infty$

Висновок. Застосовуючи метод Фур'є, розв'язок температурної задачі зведено до визначення деяких постійних із нескінченої системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через які знаходимо температурні поля в любій точці циліндра.

Числові підрахунки і аналіз розвязку показують, що коефіцієнти теплообміну і теплопровідності, а також контактна провідність тонкого проміжкового шару значно впливають на розподіл температури в циліндрі.

1. Грилицкий Д.В. Осесиметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости /Д.В. Грилицкий, Я.М. Кизыма. – Львов: Изд.-во при Львов. ун.те, 1981, – 135 с.
2. Окрепкий Б.С., Новосад І.Я. Осесиметрична температурна задача для системи двох контактуючих циліндрів. // Міжвузівський збірник за напрямом «Інженерна механіка». – ЛНТУ. – Вип. №28, – Луцьк. – 2010. – С. 367-379.
3. Окрепкий Б.С., Новосад І.Я. Задача теплопровідності для системи двох контактуючих трансверсально-ізотропних циліндричних тіл. // Міжвузівський збірник за напрямком «Інженерна механіка» «Наукові нотатки», ЛНТУ, Вип. №30. Луцьк, 2011. – С. 131-140.
4. Окрепкий Б.С., Новосад І.Я. Осесиметрична температурна задача для системи двох циліндричних тіл при неідеальному тепловому контакті з урахуванням тонкого проміжкового шару. // Міжвузівський збірник за напрямком «Інженерна механіка» «Наукові нотатки», ЛНТУ, Вип. №42. – Луцьк, 2013. – С. 202-207.
5. Подстригач Я.С. Температурное поле в системе твердых тел сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя. – ИФЖ., 1963, т.6, №16.
6. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. О влияниях поверхностных слоев на процесс диффузии и на обусловленное им напряженное состояние в твердых телах. – ФХММ. – 1967., т.3, №5.
7. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / – К.: Наук. думка, 1970, – 304 с.

Стаття надійшла до редакції 24.02.2014.