УДК 514.8

С.І. Пустюльга, В.Р. Самостян, А.А. Хомич
Луцький національний технічний університет

ДИСКРЕТНЕ ФОРМУВАННЯ ЕКВІДИСТАНТ ДО МОДЕЛЕЙ ЗАМКНУТИХ КРИВИХ АПАРАТОМ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

У роботі запропоновано алгоритм формування дискретних моделей внутрішніх та зовнішніх еквідистант до замкнутих кривих з використанням математичного апарату числових послідовностей. Проведені дослідження по визначенню обмежень на параметри внутрішніх еквідистант для унеможливлення утворення на них петель та самоперетинів.

Ключові слова: *сипкі матеріали, дискретне моделювання, числові послідовності, еквідистанта.*
Рис. 6. Форм.8. Літ. 7.

С. И. Пустюльга, В.Р. Самостян, А.А. Хомич

ДИСКРЕТНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ЭКВИДИСТАНТ К МОДЕЛЯМ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ АППАРАТОМ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В работе предложен алгоритм формирования дискретных моделей внутренних и внешних эквидистант к замкнутым кривым с использованием математического аппарата числовых последовательностей. Проведены исследования по определению ограничений на параметры внутренних эквидистанта для предотвращения образования на них петель и самопересечений.

Ключевые слова: *сыпучие материалы, дискретное моделирование, числовые последовательности, эквидистанта.*

S.I. Pustiulga, V.R. Samostyan, A.A. Homuch

DISCRETE FORMATION OF AEQUIDISTANTS TO MODELS OF CLOSED CURVES BY MEANS OF MATHEMATICAL TOOLS OF NUMERICAL SEQUENCE

In the article it is considered the problem of construction of models of discrete trajectories of loading devices in the organization of open storage of bulk materials in specified areas which are bounded by complex curved contour of the given geometric properties. It is proposed an algorithm for formation of discrete models of internal and external aequidistants to closed curves using mathematical tools of numerical sequences. It was performed the research to determine restrictions on the parameters of the internal aequidistants to prevent the formation of loops and their self-crossings.

Future research will be related to the development of algorithms for the simulation of discrete surfaces of the same slope with certain geometric properties which are formed with the usage of mathematical tools of binary sequences of numbers in a certain time, for organization of bulk materials storage.

Keywords: *bulk material, mathematical tools, numerical sequences, aequidistant.*

Постановка проблеми. Дослідження внутрішнього тертя сипких матеріалів є актуальними для процесів проектування та експлуатації навантажувально-розвантажувальних пристроїв транспортуючих машин. Про трибологічні властивості сипких матеріалів прийнято судити по величині кута природного відкосу ϕ і відповідному йому коефіцієнту внутрішнього тертя f, а також за коефіцієнтами зовнішнього тертя спокою f^1 і руху f^2.

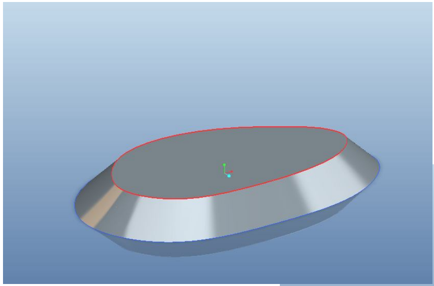
Рис. 1. **Приклади відкритих складів сипких матеріалів**

Основною характеристикою сипкості матеріалу, тобто здатності скочуватися по похилій поверхні є все таки кут природного укосу ϕ. Цей кут утворюється між площиною основи і твірною конуса при вільному падінні сипкого матеріалу на горизонтальну площину.

Найменшим кутом природного відкосу характеризуються сипкі матеріали із тіл з гладкою поверхнею. А при відхиленні форми окремих елементів від форми кулі сипкість матеріалу зменшується. Кут природного відкосу є основною характеристикою при проектуванні складів, а також навантажувальних пристроїв транспортуючих машин, так як відношення розмірів основи, її геометрії, а також висоти складування сипкого вантажу, його об’єму, маси прямо залежить від даного кута (рис. 1).

Якщо поставити завдання по проектуванню складу певного сипкого матеріалу на заданій площі, обмеженій криволінійним контуром складної геометрії, з визначеною висотою складування при максимальному об’ємі сипкого вантажу, то геометрично задача зводиться до побудови моделі поверхні однакового відкосу (рис. 2), для якої треба визначити траєкторію руху навантажувального пристрою машини в певному часі. Такою траєкторією є еквідистанта до замкнутого контуру основи сипкого вантажу, модель якої повинна враховувати ряд геометричних вимог до кінцевого об’єкту.

Проблема побудови еквідистантних ліній для плоских контурів має важливе значення також у інших практичних задачах, наприклад, при створенні програм для верстатів з числовим програмним управлінням (ЧПУ), у проектуванні трасування комп’ютерних плат, при розробці елементів моделей трубопроводів, при прогнозуванні розповсюдження пожеж та інших природних явищ і т.і. [1,2,3]. Відтак, розробка нових ефективних алгоритмів побудови еквідистантних замкнутих кривих ліній з певними геометричними властивостями, удосконалення вже відомих математичних апаратів побудови кривих даного класу залишається достатньо актуальним завданням.



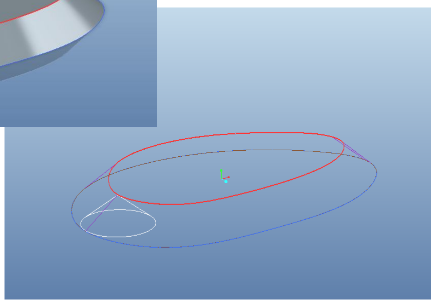


Рис. 2. **Моделювання поверхні однакового відкосу**

Аналіз останніх досліджень. У сучасній науковій літературі пропонується чимала кількість алгоритмів побудови еквідистантних та квазіеквідистантних кривих у неперервному вигляді [3,4], у тому числі алгоритмів, розроблених вченими, що працюють в галузі прикладної геометрії. В опублікованих роботах прийоми побудови еквідистантних кривих (або паралельних множин), як правило, вибиралися у відповідності до розв’язання конкретних практичних задач. Основною проблемою при цьому було видалення петель та самоперетинів, що утворювались в процесі моделювання, а від так розроблені алгоритми мають достатньо громіздкий опис.

Враховуючи, що більшість моделей складних за геометрією кривих, які використовуються у техніці мають кусково-лінійний характер, а також зважаючи на дискретний характер роботи сучасних математичних пакетів для ЕОМ актуальною є задача розробки дискретних алгоритмів моделювання еквідистантних кривих та дослідження геометричних параметрів, що впливають на нерегулярність їх геометричної форми, з метою запобігання небажаних ефектів процесу моделювання.

Формування цілей роботи. Метою даної роботи є розробка алгоритмів побудови дискретних моделей зрівноважених замкнутих еквідистантних кривих за допомогою математичного апарату числових послідовностей та дослідження геометричних обмежень, які унеможливлюють утворення на еквідистантах самоперетинів та петель.

Основна частина. Процес проектування відкритого складу для певного сипкого матеріалу будемо пов’язувати з наступними етапами. Перший – формування дискретної моделі замкнутого контуру із певними геометричними властивостями, серед яких: гладкість формованого об’єкту, проходження через ряд базових, реперних точок, забезпечення заданої площі модельованого контуру. Другий – аналіз дискретних аналогів кривини у точках дискретної моделі, кутів природного відкосу сипкого матеріалу і, як наслідок, визначення параметрів еквідистанти, яка слугуватиме траєкторією руху навантажувального пристрою для формування поверхні однакового відкосу на заданому замкнутому контурі. Третій – формування моделі поверхні однакового відкосу із підрахунком об’єму, маси та висоти модельованого відкритого складу сипкого матеріалу.

У роботах [5,6] запропоновано алгоритми моделювання дискретно представлених зрівноважених замкнутих кривих, із визначеними геометричними властивостями, за допомогою математичного апарату числових послідовностей. Досліджено зв'язок між геометрією замкнутих кривих та вихідними умовами дискретного моделювання. Наведені обмеження щодо унеможливлення наявності у формованій ДПК точок самоперетину та петель на моделі. В основу алгоритму лягли системи лінійних рівнянь, складені на базі комплексу вихідних умов до числових послідовностей виду:

$$x_n = (1-\frac{n}{N})x_1 + \frac{n}{N}x_N + \frac{n}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v} kP_s^x - \sum_{v=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{v} kP_s^x,$$
$$y_n = (1-\frac{n}{N})y_1 + \frac{n}{N}y_N + \frac{n}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v} kP_s^y - \sum_{v=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{v} kP_s^y, \quad (1)$$

де x_1, x_N, y_1, y_N - крайові умови,

N - порядковий номер вузла замикання,

kP_s^x, kP_s^y - складові функціонально розподіленого навантаження у вузлах моделі.

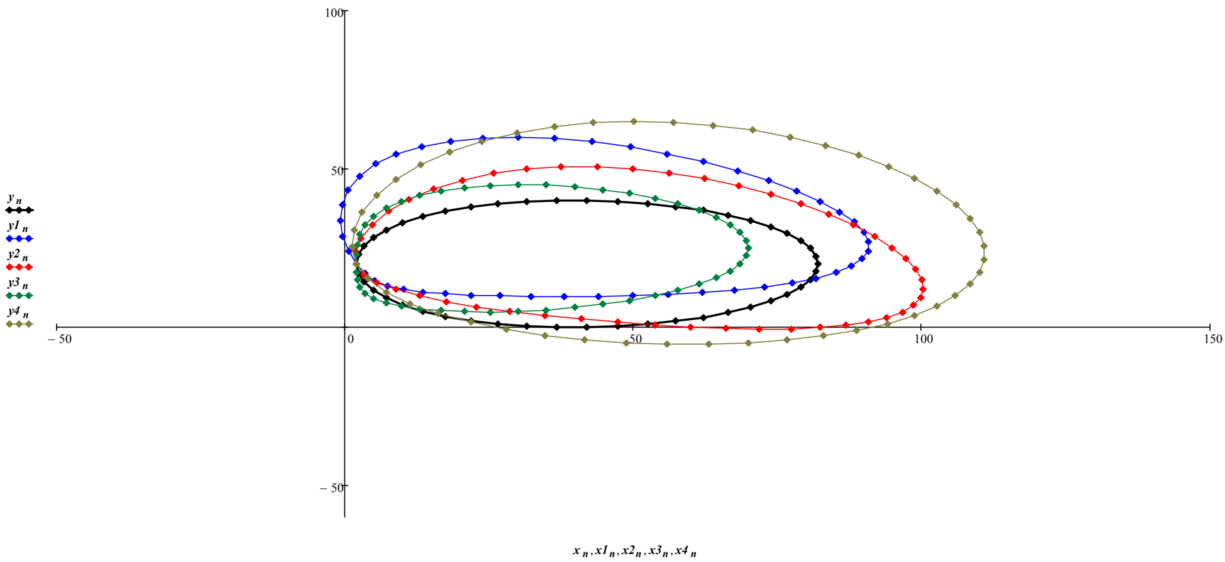


Рис. 3. **Дискретні моделі замкнутих кривих із заданими геометричними властивостями**

Складові функціонально розподіленого навантаження дають можливість прогнозувати динаміку зміни геометрії моделі, виражати необхідні геометричні характеристики формованого образу через параметри складових навантаження, змінювати значення навантаження на вузли образу у процесі можливих ітерацій. При цьому, якщо розподіл навантаження є дискретним аналогом неперервної функції то, відповідно до цього, буде забезпечуватись і гладкість моделі. При наявності особливих точок на графіку навантаження втрачається гладкість між сформованими вузлами модельованого контуру, а при наявності стрибків навантаження у точках формованої моделі - з'являться точки розривів. Вектори навантаження слугують крім того вільними параметрами для врахування практично необмеженої кількості вихідних даних та умов при дискретному моделюванні замкнутих одновимірних образів. Приклади формування дискретних моделей зрівноважених замкнутих кривих із заданими геометричними властивостями наведено на рисунку 3.

Дискретною моделлю еквідистанти до, таким чином, дискретно представленої кривої будемо називати множину кінців рівних відрізків, відкладених від кожної точки в певному напрямку на дискретних аналогах нормалей до заданої ДПК.

Графічно, для опуклого дискретно представленого контуру, провести еквідистанту досить нескладно. Необхідно лише знайти перпендикуляри у кожній точці моделі до дискретних аналогів дотичних у цих же точках, на яких відкласти рівні відстані. Зовнішня еквідистанта при цьому завжди буде являти собою таку ж опуклу дискретну модель без особливих точок, при довільно вибраній відстані точок еквідистанти від базової дискретної моделі. Зовсім інша ситуація буде при спробі побудови внутрішньої еквідистанти до ДПК. При заданні довільної відстані до точок, дискретна модель еквідистанти може утворювати петлі, що є неприйнятним для практичного застосування даного алгоритму.

Нехай за допомогою одновимірних числових послідовностей знайдено дискретний аналог замкнутого базового контуру із n точками (рис. 4). Задамо множину дискретних аналогів дотичних $\left[n-1, n+1\right]$ у n вузлах моделі і побудуємо до них нормалі. Для побудови множини точок внутрішньої еквідистанти n_e розглянемо подібні трикутники ($\Delta(5A7) \sim \Delta(6eB6)$).

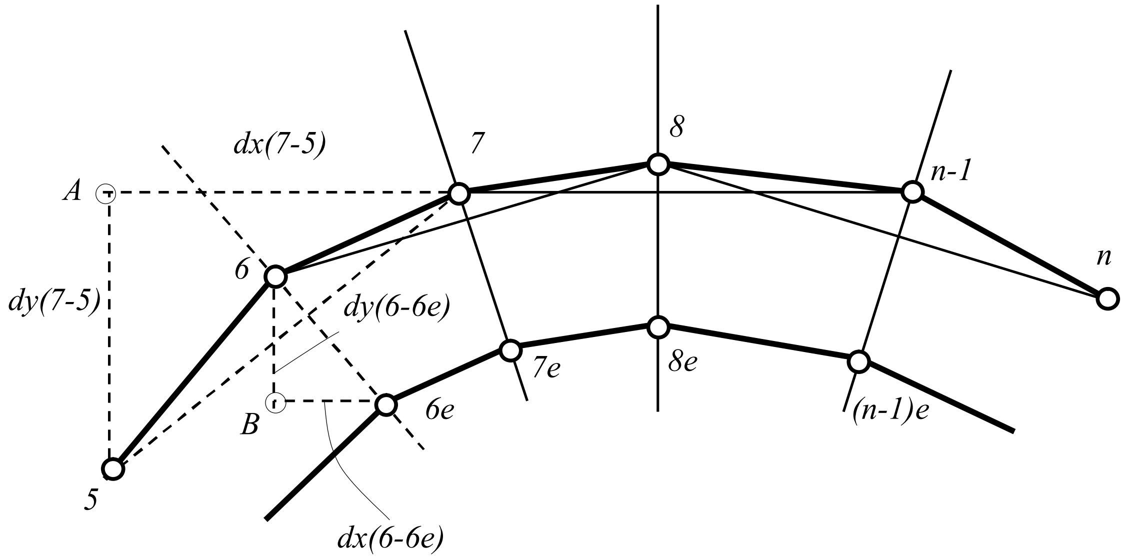


Рис. 4. **Фрагмент дискретної моделі базової кривої та її внутрішньої еквідистанти**

Із подібності трикутників можна записати співвідношення:

$$\frac{dy(7-5)}{dx(6-6e)} = \frac{dx(7-5)}{dy(6-6e)} = \frac{l(7-5)}{l(6-6e)}, \tag{2}$$

де: $l(6-6e)$ задана величина відстані до дискретної множини точок еквідистанти.

Звідки шукані невідомі величини визначаються:

$$dx(6-6e) = x_6 \pm \frac{dy(7-5) \cdot l(6-6e)}{l(7-5)} \tag{3}$$

$$dy(6-6e) = y_6 \pm \frac{dx(7-5) \cdot l(6-6e)}{l(7-5)} \tag{4}$$

Вирази (3) та (4) однозначно дозволяють визначити дискретну множину точок шуканої еквідистанти із заданими геометричними параметрами.

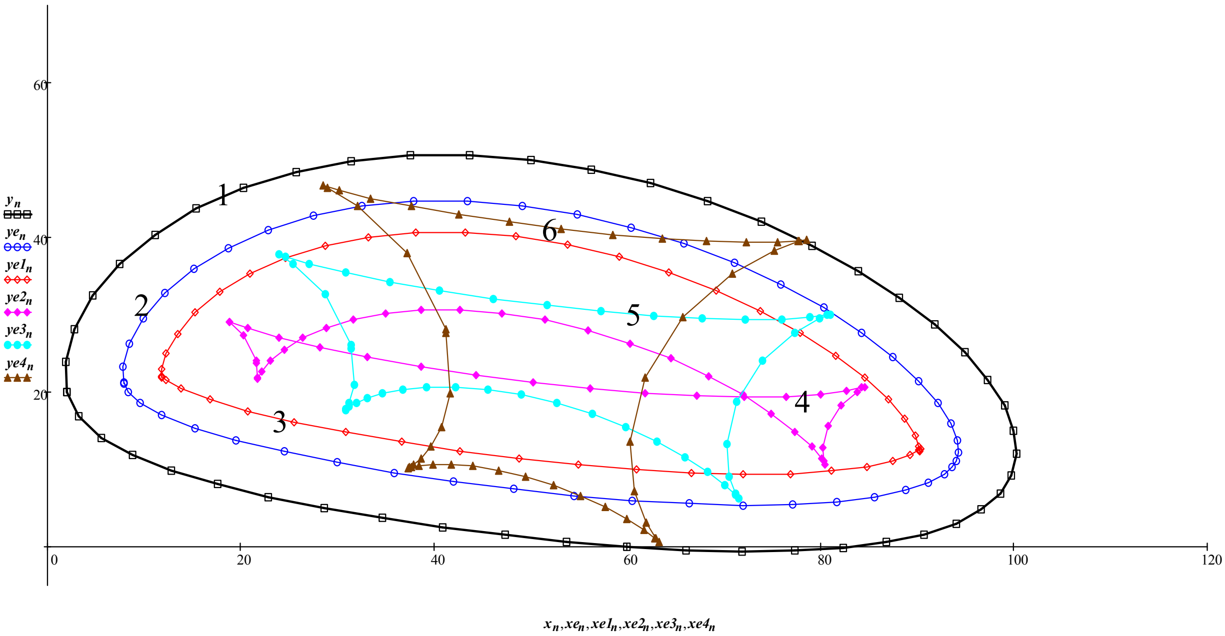
Однак для побудови дискретної моделі поверхні однакового відкосу за допомогою системи подвійних числових послідовностей необхідно дискретну модель еквідистанти до розрахованого контуру основи теж подати у вигляді системи одновимірних числових послідовностей у замкнутому вигляді. Враховуючи вирази (1),(3) та (4), одновимірні числові послідовності, що описують дискретну модель шуканої еквідистанти можна подати у вигляді:

$$xe_n = x_n \pm \frac{le \cdot dy_n}{\sqrt{(dx_n)^2 + (dy_n)^2}} \tag{5}$$

$$ye_n = y_n \pm \frac{le \cdot dx_n}{\sqrt{(dx_n)^2 + (dy_n)^2}} \tag{6}$$

де: l_e - задана відстань точок еквідистанти від замкнутої кривої опорного контуру.

За результатами запропонованого алгоритму була створена програма для дискретного формування як замкнутого опорного контуру із заданими геометричними властивостями, так і множини дискретно представлених еквідистант, приклади яких наведено на рисунку 5.



1 – базова замкнута крива, 2 – еквідистанта $l_e = 6$, 3 – еквідистанта $l_e = 10$, 4 – еквідистанта $l_e = 20$, 5 – еквідистанта $l_e = 30$, 6 – еквідистанта $l_e = 40$

Рис. 5. **Дискретна модель базової кривої та її еквідистант з особливими точками**

Із рисунка 5 видно, що базова крива є дискретною моделлю опуклої регулярної кривої із заданими геометричними властивостями. Ряд побудованих на основі одновимірних числових послідовностей (5), (6) дискретних моделей внутрішніх еквідистантних кривих, в залежності від параметру l_e, мають різні геометричні властивості. Дискретна модель еквідистанти 2 має такі ж геометричні властивості, як і базова крива, тобто є опуклою і регулярною, дискретні моделі еквідистант 3,4,5,6 мають особливі точки, петлі та самоперетини, що є неприйнятним з точки зору їх використання як траєкторії руху навантажувального пристрою. Очевидно, треба визначити обмеження для параметру l_e, який унеможливить утворення нерегулярних точок на дискретних моделях формованих еквідистант.

Для визначення обмежень скористаємось дискретним аналогом кривини у точках змодельованої базової кривої.

Згідно роботи [7] дискретний аналог кривини у точках моделі можна подати у вигляді:

$$k_n = \frac{2\sin\alpha}{[n-1, n+1]} \tag{7}$$

Точка або ряд точок, де кривина буде найбільшою є базовими для розрахунку максимально можливого значення радіусу кривини, який і встановить обмеження на максимальну відстань точок еквідистанти від дискретної моделі базової кривої, сформованої за допомогою одновимірних числових послідовностей (1).

$$l_e^{\max} \le \frac{1}{k_n^{\max}} \tag{8}$$

Приклад роботи алгоритму побудови дискретних моделей внутрішніх еквідистант із забезпеченням умови відсутності на них нерегулярних точок математичним апаратом числових послідовностей наведено на рисунку 6.

Висновки. У роботі розглядається проблема побудови дискретних моделей траєкторій

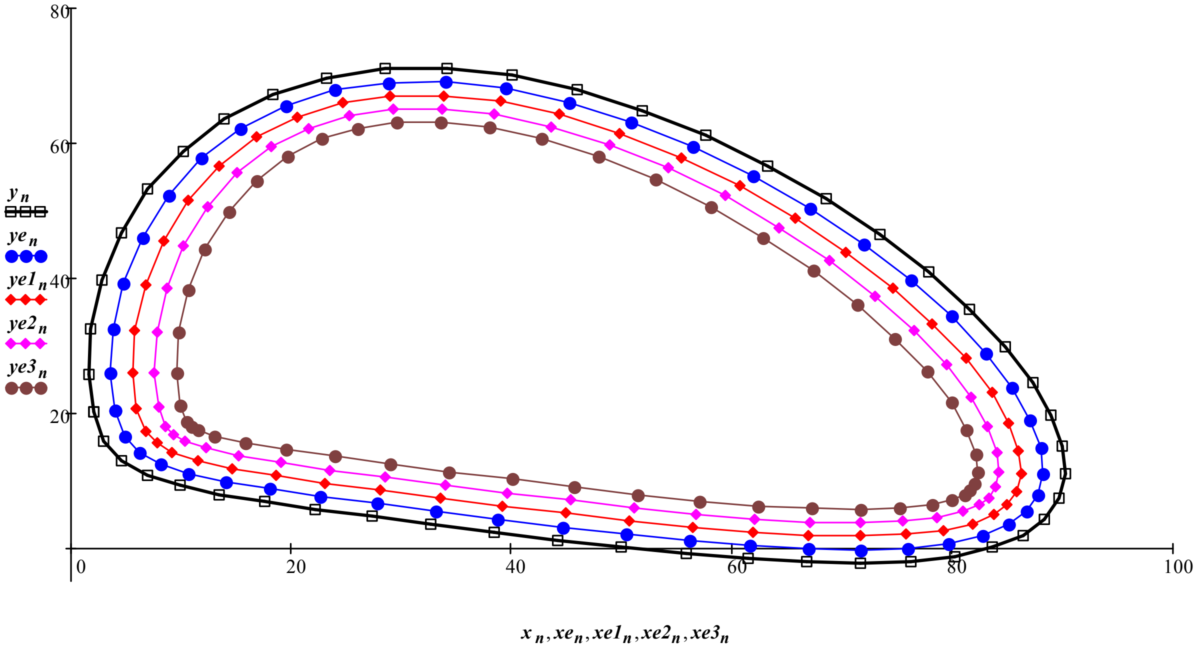


Рис. 6. **Приклад побудови множини дискретних моделей еквідистант**

руху навантажувальних пристроїв при організації відкритих складів сипких матеріалів на заданих площах, обмежених складним криволінійним контуром із заданими геометричними властивостями. Запропоновано алгоритм формування дискретних моделей внутрішніх та зовнішніх еквідистант до замкнутих кривих з використанням математичного апарату числових послідовностей. Проведені дослідження по визначенню обмежень на параметри внутрішніх еквідистант для унеможливлення утворення на них петель та самоперетинів. Майбутні дослідження пов'язані з розробкою алгоритмів дискретного моделювання поверхонь однакового відкосу з певними геометричними властивостями, формованих за допомогою математичного апарату подвійних числових послідовностей у певному часі, для організації складів сипких матеріалів.

1. Клейн Г.К. Строительная механика сыпучих тел. – Москва: Стройиздат, 1977. – 256 с.
2. Бойцов Ю.А., Карталис Н.И. Определение внутреннего и внешнего трения сыпучих грузов. Санкт-Петербург НИУИТ. – 9 с.
3. Лигун А., Шумейко А. Асимптотические методы восстановления кривых. / Институт математики. / – К.: 1997, – 357 с.
4. Шоман О.В. Паралельні множини в геометричному моделюванні явищ і процесів: Монографія. – Харків: НТУ «ХПІ», 2007. – 288 с.
5. Пустюльга С.І., Самостян В.Р. Дискретне геометричне моделювання зрівноважених замкнутих кривих числовими послідовностями. Прикладна геометрія та інженерна графіка": Зб. наук. пр. – К.: 2011. – Вип. 87. – С. 314-319.
6. Пустюльга С.І., Самостян В.Р., Клак Ю.В., Хомич А. Дискретне моделювання замкнутих траєкторій числовими послідовностями. Наукові нотатки ЛНТУ. – Луцьк: ЛНТУ, 2011. – Вип. 31. – С. 295-298.
7. Найдиш В.М. Про гладкість дискретної інтерполяції. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: 2003, Вип. 73, – С. 8-12.

Стаття надійшла до редакції 27.03.2014.