

УДК 539.3

В.П. Ревенко

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ НАВАНТАЖЕНОГО НА ТОРЦЯХ ДВОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА

Розглянуто вісесиметричний напружено-деформований стан скінченного двошарового циліндра, навантаженого на торцях. Розроблено метод аналітично-числового розв'язання крайових задач для двошарового циліндра. Вперше теоретично встановлені числові критерії збіжності методу і показано, що точність задоволення крайових умов оцінюється одним числом – мінімумом узагальненої квадратичної форми.

Ключові слова: скінченний двошаровий циліндр, напружено-деформований стан, узагальнена квадратична форма.

Рис. 1 Форм. 20. Літ. 13.

В.П. Ревенко

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НАГРУЖЕННОГО НА ТОРЦАХ ДВУХСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРА

Рассмотрено осесимметричное напряженно-деформированное состояние конечного двухслойного цилиндра, нагруженного на торцах. Разработан метод аналитическо-численного решения крайевых задач для двухслойного цилиндра. Впервые теоретически установлены числовые критерии сходимости метода и показано, что точность удовлетворения крайевых условий оценивается одним числом – минимумом квадратичной формы.

Ключевые слова: двухслойный конечный цилиндр, напряженно-деформированное состояние, обобщенная квадратичная форма.

V.P. Revenko

DETERMINATION OF STRESS-STRAIN STATE OF TWO-LAYER CYLINDER OF LOADED ON THE ENDS

We consider axisymmetric stress-strain state of the finite two-layer cylinder on the ends loaded. The method of analytical and numerical solution of boundary value problems for two-layer cylinder is determined. For the first time theoretically established numerical criteria for convergence of the method and show that the accuracy of satisfaction of the boundary conditions is assessed by a single number – the minimum of a quadratic form.

Keywords: two-layer finite cylinder, the stress-strain state, generalized quadratic form.

Вступ. Багатошарові пружні циліндри, а особливо двошарові – поширені елементи будівельних та інженерних конструкцій. Огляд праць з розв'язування вісесиметричних задач для багатошарових циліндрів, напружено-деформований стан (НДС) яких залежать тільки від однієї просторової змінної, наведено у публікаціях [1, 2], а з врахуванням динамічних ефектів у [3, 4]. При розрахунку статичного напруженого стану двошарових циліндричних тіл широко використовують спрощені двовимірні моделі циліндричних оболонок [5, 6]. У працях [7–11] вивчалися задачі теорії пружності у циліндричній системі координат з використанням однорідних розв'язків (власних функцій).

Знайдемо вісесиметричний НДС шаруватого циліндра, який знаходиться в стані статичної рівноваги і має два шари: внутрішній шар $D_1 = \{(r, \varphi, z) \in ([R_0, R_1] \times [0, 2\pi] \times [-h, h])\}$ з характеристиками матеріалу E_1 , ν_1 , $R_0 = 0$; зовнішній – $D_2 = \{(r, \varphi, z) \in ([R_1, R_2] \times [0, 2\pi] \times [-h, h])\}$, E_2 , ν_2 , див. рис. 1. До торців циліндра прикладені неперервно-розподілені нормальні $\sigma_m^j(r)$ і дотичні $\tau_{zr}^j(r)$ навантаження.

$$\sigma_z^j(r, h_m) = \sigma_m^j(r), \quad \tau_{zr}^j(r, \pm h) = \tau_m^j(r). \quad (1)$$

де $h_1 = -h$, $h_2 = h$, нижній індекс m описує торці, верхній індекс $j = 1$ описує внутрішній, $j = 2$ – зовнішній шар циліндра. Бічна поверхня вільна від навантажень

$$\sigma_r(z, R_2) = 0, \quad \tau_{rz}(z, R_2) = 0. \quad (2)$$

На поверхні контакту шарів виконуються умови ідеального контакту:

$$u_r^2 = u_r^1, \quad u_z^2 = u_z^1, \quad \sigma_r^2 = \sigma_r^1, \quad \tau_{rz}^2 = \tau_{rz}^1, \quad r = R_1. \quad (3)$$

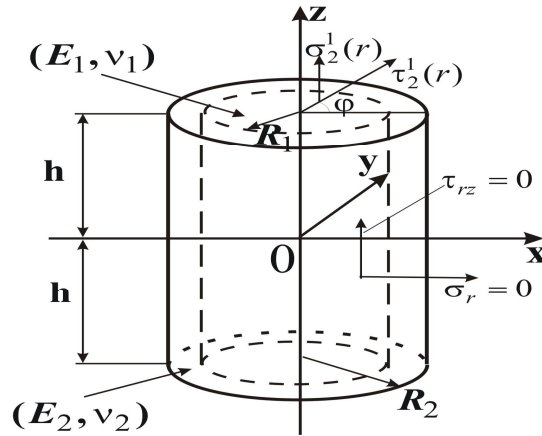


Рис. 1. Навантаження двошарового циліндра

Для визначення пружних переміщень u_r^j , u_z^j в j -шарі використаємо загальний розв'язок рівнянь Ляме [7, 11]:

$$u_r^j(r, z) = \frac{\partial P_j}{\partial r}, \quad u_z^j(r, z) = \frac{\partial P_j}{\partial z} - 4(1 - \nu_j)\Phi_j, \quad u_\varphi^j = 0, \quad (4)$$

де $P_j = z\Phi_j + \Psi_j$, а Φ_j , Ψ_j , $j = \overline{1, 2}$ – гармонічні функції переміщень, які залежать тільки від двох координат.

Використавши переміщення (5) і закон Гука [11], знайдемо напруження

$$\begin{aligned} \sigma_r^j(r, z) &= 2G_j \left[\frac{\partial^2 P_j}{\partial r^2} - 2\nu_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right], & \sigma_z^j &= 2G_j \left[\frac{\partial^2 P_j}{\partial z^2} - 2(2 - \nu_j) \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right], \\ \sigma_\varphi^j &= 2G_j \left[\frac{1}{r} \frac{\partial P_j}{\partial r} - 2\nu_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right], & \tau_{rz}^j &= 2G_j \left[\frac{\partial^2 P_j}{\partial z \partial r} - 2(1 - \nu_j) \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} \right], & \tau_{r\varphi}^j &= \tau_{z\varphi}^j = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

де G_j – модулі зсуву.

При задоволенні крайових умов потрібно із навантажень (1) виділити основний напружений стан, який відповідає заданим головним векторам сил і моментів [8, 11]. Це пов'язано з тим, що основний і самозрівноважений напружений стан мають різну фізичну природу [P20094R] і відповідно описуються різними функціями. При побудові загального виразу основного НДС у скінченному циліндрі використаємо працю [8]. Спочатку визначимо сили, прикладені до шарів на торцях циліндра

$$T_m^j = (-1)^m 2\pi \int_{R_{j-1}}^{R_j} r \sigma_m^j(r) dr, \quad m = \overline{1, 2}, \quad (6)$$

де індекс m відповідає торцям, а j – шарам циліндра. Нормальні T_m^j сили прикладені до середини відповідних торців циліндра, а їх напрямок співпадає з віссю Oz . Так як бічна поверхня вільна від навантажень, то сума проєкцій всіх зусиль на вісь Oz , рівна нулю

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 T_m^j = 0. \quad (7)$$

Згідно з [8] запишемо основний НДС: для внутрішнього $r \leq R_1$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{0,1} &= -\frac{T_1^1}{S_1} + \frac{T_2^1 + T_1^1}{2hS_1}(z+h), & \sigma_r^{0,1} &= 0, \\ \sigma_\varphi^{0,1} &= 0, & \tau_{rz}^{0,1} &= -\frac{T_1^1 + T_2^1}{4hS_1}r, \end{aligned} \quad (8)$$

і зовнішнього $R_1 \leq r \leq R_2$ шару

$$\begin{aligned} \sigma_z^{0,2} &= -\frac{T_1^2}{S_2} + \frac{T_2^2 + T_1^2}{2hS_2}(z+h), \quad \sigma_r^{0,2} = 0, \\ \sigma_\varphi^{0,2} &= 0, \quad \tau_{rz}^{0,2} = -\frac{T_1^2 + T_2^2}{4hS_2}r + \frac{A_2}{r}, \end{aligned} \quad (9)$$

де $S_1 = \pi R_1^2$, $S_2 = \pi(R_2^2 - R_1^2)$, $A_2 = \frac{T_1^2 + T_2^2}{4hS_2}R_2^2$, цифра 0 вверху відноситься до

компонентів тензора і напружень основного НДС. Відзначимо, що напруження (9) задовольняють крайові умови (2).

Із узагальненого закону Гука після інтегрування і перетворень знайдемо переміщення в шарах

$$\begin{aligned} u_z^{0,j} &= -\frac{T_1^j}{E_j S_j} z + \frac{T_2^j + T_1^j}{4hS_1 E_1} (z^2 - r^2 + 2hz) + \delta_j^2 \frac{A_j}{G_j} \ln r, \\ u_r^{0,j} &= \frac{\nu_j}{E_j} r \left[\frac{T_1^j}{S_j} - \frac{T_2^j + T_1^j}{2hS_j} (z+h) \right], \quad j = \overline{1,2}, \end{aligned} \quad (10)$$

де δ_j^2 – символ Кронекера, G_j – модулі зсуву.

Після виділення напружень основного НДС (8), (9), до торців циліндра будуть прикладені самозрівноважені навантаження, які мають нульові головні вектори сил і моментів. Отже, самозрівноважений стан буде зникати при віддаленні від торців.

У працях [7, 11, 12] наведено алгоритм знаходження самозрівноваженого напруженого стану для суцільного і товстостінного циліндрів. Використавши цей алгоритм, виразимо самозрівноважений напружений стан кожного шару циліндра через три набори функцій переміщень, які відповідно відповідають за задоволення умов на торцях, зовнішній і внутрішній бічні поверхні шарів циліндра

$$\begin{aligned} \Phi_{j,N}(r, \gamma) &= \sum_{k=1}^N \mu_k^{-1} \{ R J_0(\mu_k \alpha) [a_k^j \exp(-\frac{\mu_k}{c}(\gamma+1)) + a_{k+N}^j \exp(\frac{\mu_k}{c}(\gamma-1))] + \\ &\quad + h [a_{k+2N}^j \sin(\mu_k \gamma) + a_{k+3N}^j \cos(\mu_k \gamma)] I_0(c\mu_k \alpha) + \\ &\quad + h [a_{k+4N}^j \sin(\mu_k \gamma) + a_{k+5N}^j \cos(\mu_k \gamma)] K_0(c\mu_k \alpha) \}, \\ \Psi_{j,N}(r, \gamma) &= \sum_{k=1}^N \mu_k^{-1} \{ h R J_0(\mu_k \alpha) [b_k^j \exp(-\frac{\mu_k}{c}(\gamma+1)) + b_{k+N}^j \exp(\frac{\mu_k}{c}(\gamma-1))] + \\ &\quad + h^2 [b_{k+2N}^j \sin(\mu_k \gamma) + b_{k+3N}^j \cos(\mu_k \gamma)] I_0(c\mu_k \alpha) + \\ &\quad + h^2 [b_{k+4N}^j \sin(\mu_k \gamma) + b_{k+5N}^j \cos(\mu_k \gamma)] K_0(c\mu_k \alpha) \}, \end{aligned} \quad (11)$$

де N – довільне натуральне число, $\gamma = z/h$, $\gamma \in [-1, 1]$, $\alpha = r/R$, $\alpha \in [0, 1]$ – безрозмірні змінні; $\mu_k = k\pi d_1$, $d_1 < 0,4$; a_k^j , b_k^j – невідомі коефіцієнти, $c = R/h$, $J_n(r)$, $I_n(r)$, $K_n(r)$ – функції Бесселя і Макдональда [13]. Тут і надалі $a_k^1 = 0$, $b_k^1 = 0$, якщо $k > 4N$.

Використаємо подання функцій переміщень (11) і співвідношення (4) та знайдемо явний вираз переміщень у вигляді суми рядів:

$$\begin{aligned} u_r^j &= h \sum_{k=1}^N \{ -J_1(\mu_k \alpha) \exp(-\frac{\mu_k}{c}) [(a_k^j \gamma + b_k^j) \exp(-\frac{\mu_k}{c} \gamma) + (a_{k+N}^j \gamma + b_{k+N}^j) \times \\ &\quad \times \exp(\frac{\mu_k}{c} \gamma)] + [(a_{k+2N}^j \gamma + b_{k+2N}^j) \sin(\mu_k \gamma) + (a_{k+3N}^j \gamma + b_{k+3N}^j) \cos(\mu_k \gamma)] I_1(c\mu_k \alpha) - \\ &\quad - [(a_{k+4N}^j \gamma + b_{k+4N}^j) \sin(\mu_k \gamma) + (a_{k+5N}^j \gamma + b_{k+5N}^j) \cos(\mu_k \gamma)] K_1(c\mu_k \alpha) \}, \\ u_z^j &= h \sum_{k=1}^N \{ [-\gamma + (3-4\nu_j) c \mu_k^{-1}] a_k^j - b_k^j \} \exp(-\frac{\mu_k}{c}(\gamma+1)) + \\ &\quad + \{ [\gamma - (3-4\nu_j) c \mu_k^{-1}] a_{k+N}^j \gamma + b_{k+N}^j \} \exp(\frac{\mu_k}{c}(\gamma-1)) \} J_0(\mu_k \alpha) + \end{aligned} \quad (12)$$

$$+ [a_{k+2N}^j \eta_1^j(\mu_k, \gamma) + b_{k+2N}^j \cos(\mu_k \gamma) + a_{k+3N}^j \eta_2^j(\mu_k, \gamma) - b_{k+3N}^j \sin(\mu_k \gamma)] I_0(c\mu_k \gamma) + \\ + [a_{k+4N}^j \eta_1^j(\mu_k, \gamma) + b_{k+4N}^j \cos(\mu_k \gamma) + a_{k+5N}^j \eta_2^j(\mu_k, \gamma) - b_{k+5N}^j \sin(\mu_k \gamma)] K_0(c\mu_k \gamma)\},$$

де

$$\eta_1^j(\mu_k, \gamma) = \gamma \cos(\mu_k \gamma) - (3 - 4\nu_j) \mu_k^{-1} \sin(\mu_k \gamma),$$

$$\eta_2^j(\mu_k, \gamma) = -\gamma \sin(\mu_k \gamma) - (3 - 4\nu_j) \mu_k^{-1} \cos(\mu_k \gamma).$$

Підставимо функції (11) у співвідношення (5) та знайдемо компоненти тензора напружень у вигляді таких сум рядів:

$$\begin{aligned} \sigma_r^j &= 2G_j \sum_{k=1}^N \left\{ -hJ_1'(\mu_k \alpha) \left[\exp\left(-\frac{\mu_k}{c}(\gamma+1)\right) b_k^j + \exp\left(\frac{\mu_k}{c}(\gamma-1)\right) b_{k+N}^j \right] + \right. \\ &+ U_{1,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_k^j + U_{1,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+N}^j + [b_{k+2N}^j \sin(\mu_k \gamma) + b_{k+3N}^j \cos(\mu_k \gamma)] \times \\ &\times hI_1'(c\mu_k \alpha) + U_{2,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+2N}^j + U_{2,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+3N}^j - [\sin(\mu_k \gamma) b_{k+4N}^j + \\ &+ \cos(\mu_k \gamma) b_{k+5N}^j] hK_1'(c\mu_k \alpha) + U_{3,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+4N}^j + U_{3,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+5N}^j \left. \right\}, \\ \sigma_\varphi^j(r, \gamma) &= 2G_j \sum_{k=1}^N \left\{ F_{1,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_k^j + F_{1,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+N}^j - \frac{1}{c\alpha} J_1(\mu_k \alpha) [b_k^j \times \right. \\ &\times \exp\left(-\frac{\mu_k}{c}(\gamma+1)\right) + b_{k+N}^j \left. \right\} \exp\left(\frac{\mu_k}{c}(\gamma-1)\right) + \frac{1}{c\alpha} I_1(c\mu_k \alpha) [\sin(\mu_k \gamma) b_{k+2N}^j + \\ &+ \cos(\mu_k \gamma) b_{k+3N}^j] + F_{2,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+2N}^j + F_{2,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+3N}^j + F_{3,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+5N}^j + \\ &+ F_{3,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+4N}^j - \frac{1}{c\alpha} K_1(c\mu_k \alpha) [\sin(\mu_k \gamma) b_{k+4N}^j + \cos(\mu_k \gamma) b_{k+5N}^j], \\ \sigma_z^j &= 2G_j \sum_{k=1}^N \left\{ S_{1,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_k^j + \frac{h\mu_k}{R} \left\{ \exp\left[-\frac{\mu_k}{c}(\gamma+1)\right] b_k^j + \exp\left[\frac{\mu_k}{c}(\gamma-1)\right] b_{k+N}^j \right\} \times \right. \\ &\times J_0(\mu_k \alpha) + S_{1,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+N}^j + S_{2,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+2N}^j + S_{2,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+3N}^j - \\ &- \mu_k [\sin(\mu_k \gamma) b_{k+2N}^j + \cos(\mu_k \gamma) b_{k+3N}^j] \left. \right\} I_0(c\mu_k \alpha) + S_{3,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+4N}^j + \\ &+ S_{3,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+5N}^j - \mu_k [\sin(\mu_k \gamma) b_{k+4N}^j + \cos(\mu_k \gamma) b_{k+5N}^j] K_0(c\mu_k \alpha) \left. \right\}, \\ \tau_{rz}^j &= 2G_j \sum_{k=1}^N \left\{ T_{1,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_k^j + T_{1,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+N}^j + \frac{h}{R} \mu_k [b_k^j \exp\left(-\frac{\mu_k}{c}(\gamma+1)\right) - \right. \\ &- b_{k+N}^j \exp\left(\frac{\mu_k}{c}(\gamma-1)\right)] J_1(\mu_k \alpha) + \mu_k [\cos(\mu_k \gamma) b_{k+2N}^j - \sin(\mu_k \gamma) b_{k+3N}^j] I_1(c\mu_k \alpha) + \\ &+ T_{2,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+2N}^j + T_{2,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+3N}^j + T_{3,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+4N}^j + \\ &+ T_{3,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) a_{k+5N}^j + \mu_k [\sin(\mu_k \gamma) b_{k+5N}^j - \cos(\mu_k \gamma) b_{k+4N}^j] K_1(c\mu_k \alpha), \end{aligned} \tag{13}$$

де

$$U_{1,m}^j(\mu_k, \alpha) = [-h\gamma J_1'(\mu_k \alpha) + (-1)^m 2\nu_j J_0(\mu_k \alpha)] \exp\left[\frac{\mu_k}{c}((-1)^m \gamma - 1)\right], \quad m = \overline{1, 2},$$

$$U_{2,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) = h\gamma I_1'(c\mu_k \alpha) \sin(\mu_k \gamma) - 2\nu_j I_0(c\mu_k \alpha) \cos(\mu_k \gamma),$$

$$U_{2,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) = h\gamma I_1'(c\mu_k \alpha) \cos(\mu_k \gamma) + 2\nu_j I_0(c\mu_k \alpha) \sin(\mu_k \gamma),$$

$$U_{3,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) = -h\gamma K_1'(c\mu_k \alpha) \sin(\mu_k \gamma) - 2\nu_j K_0(c\mu_k \alpha) \cos(\mu_k \gamma),$$

$$U_{3,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) = -h\gamma K_1'(c\mu_k \alpha) \cos(\mu_k \gamma) + 2\nu_j K_0(c\mu_k \alpha) \sin(\mu_k \gamma),$$

$$F_{1,m}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) = [-(-1)^m 2\nu_j J_0(\mu_k \alpha) - \frac{\gamma}{c\alpha} J_1(\mu_k \alpha)] \exp\left(\frac{\mu_k}{c}((-1)^m \gamma - 1)\right), \quad m = \overline{1, 2},$$

$$F_{2,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) = \frac{\gamma}{c\alpha} \sin(\mu_k \gamma) I_1(c\mu_k \alpha) - 2\nu_j \cos(\mu_k \gamma) I_0(c\mu_k \alpha),$$

$$\begin{aligned}
 F_{2,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) &= \frac{\gamma}{c\alpha} \cos(\mu_k \gamma) I_1(c\mu_k \alpha) + 2v_j \sin(\mu_k \gamma) I_0(c\mu_k \alpha), \\
 F_{3,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) &= -\left[\frac{\gamma}{c\alpha} \sin(\mu_k \gamma) K_1(c\mu_k \alpha) + 2v_j \cos(\mu_k \gamma) K_0(c\mu_k \alpha) \right], \\
 F_{3,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) &= \left[-\frac{\gamma}{c\alpha} \cos(\mu_k \gamma) K_1(c\mu_k \alpha) + 2v_j \sin(\mu_k \gamma) K_0(c\mu_k \alpha) \right], \\
 S_{1,m}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) &= \left[\frac{h\mu_k}{R} \gamma - 2(-1)^m (1 - v_j) \right] \exp\left[\frac{\mu_k}{c} ((-1)^m \gamma - 1) \right] J_0(\mu_k \alpha), \quad m = \overline{1, 2}, \\
 S_{2,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) &= \varphi_1^j(\mu_k, \gamma) I_0(c\mu_k \alpha), \quad S_{2,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) = \varphi_2^j(\mu_k, \gamma) I_0(c\mu_k \alpha), \\
 S_{3,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) &= \varphi_1^j(\mu_k, \gamma) K_0(c\mu_k \alpha), \quad S_{3,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) = \varphi_2^j(\mu_k, \gamma) K_0(c\mu_k \alpha), \\
 \varphi_1^j(\mu_k, \gamma) &= -\mu_k \gamma \sin(\mu_k \gamma) - 2(1 - v_j) \cos(\mu_k \gamma), \\
 \varphi_2^j(\mu_k, \gamma) &= 2(1 - v_j) \sin(\mu_k \gamma) - \mu_k \gamma \cos(\mu_k \gamma), \\
 T_{1,m}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) &= \left[(1 - v_j) - (-1)^m \frac{h\mu_k}{R} \gamma \right] \exp\left[\frac{\mu_k}{c} ((-1)^m \gamma - 1) \right] J_1(\mu_k \alpha), \quad m = \overline{1, 2}, \\
 T_{2,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) &= \psi_1^j(\mu_k, \gamma) I_1(c\mu_k \alpha), \quad T_{2,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) = \psi_2^j(\mu_k, \gamma) I_1(c\mu_k \alpha), \\
 T_{3,1}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) &= -\psi_1^j(\mu_k, \gamma) K_1(c\mu_k \alpha), \quad T_{3,2}^j(\mu_k, \alpha, \gamma) = -\psi_2^j(\mu_k, \gamma) I_1(c\mu_k \alpha), \\
 \psi_1^j(\mu_k, \gamma) &= \mu_k \gamma \cos(\mu_k \gamma) + (2v_j - 1) \sin(\mu_k \gamma), \\
 \psi_2^j(\mu_k, \gamma) &= (2v_j - 1) \cos(\mu_k \gamma) - \mu_k \gamma \sin(\mu_k \gamma).
 \end{aligned}$$

Тут і надалі штрих вверху позначає похідну по r .

Підставимо компоненти вектора переміщень (12) і тензора напруження (13) в крайові умови (1)–(3) та після математичних перетворень одержимо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^M c_k A_{m,k}(\alpha) &= P_m(\alpha), \quad m = \overline{1, 4}, \quad \alpha \in [0, 1], \\
 \sum_{k=1}^M c_k A_{m,k}(\gamma) &= P_m(\gamma), \quad m = \overline{5, 10}, \quad \gamma \in [-1, 1],
 \end{aligned} \tag{14}$$

де

$$\begin{aligned}
 M &= 20N, \quad c_k = a_k^1, \quad c_{k+4N} = b_k^1, \quad k = \overline{1, 4N}, \quad c_{k+8N} = a_k^2, \quad c_{k+14N} = b_k^2, \quad k = \overline{1, 6N}, \\
 P_{2m-1}(\alpha) &= \frac{\sigma_m^1(R_2\alpha)}{2G_1}, \quad P_{2m}(\alpha) = \frac{\tau_m^1(R_2\alpha)}{2G_1}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{R_1}{R_2}, \quad P_{2m-1}(\alpha) = \frac{\sigma_m^2(R_2\alpha)}{2G_2}, \\
 P_{2m}(\alpha) &= \frac{\tau_m^2(R_2\alpha)}{2G_2}, \quad \frac{R_1}{R_2} \leq \alpha \leq 1, \quad m = \overline{1, 2}, \quad P_m(\gamma) = 0, \quad m = \overline{5, 10}.
 \end{aligned}$$

Значення функцій $A_{m,k}$ легко визначається із умов (1)–(3).

Зведення проблеми розв'язку системи рівнянь (14) до пошуку мінімуму узагальненої квадратичної форми. Виражені через функції $\Phi_{j,N}$, $\Psi_{j,N}$ переміщення (4) і напруження (5) точно задовольняють співвідношення вісесиметричної теорії пружності. Для оцінки похибки наближеного розв'язку скінченної системи рівнянь (14), яка описує крайові умови на бічній поверхні і умови контакту шарів, запишемо нев'язки для заданого $N > 1$

$$|f_{m,N}(\alpha) - P_m(\alpha)|, \quad m = \overline{1, 4}, \quad |f_{m,N}(\gamma) - P_m(\gamma)|, \quad m = \overline{5, 10}, \tag{15}$$

де $f_{m,N}(\alpha) = \sum_{k=1}^M c_k A_{m,k}(\alpha)$, $m = \overline{1, 4}$; $f_{m,N}(\gamma) = \sum_{k=1}^M c_k A_{m,k}(\gamma)$, $m = \overline{5, 10}$. У працях [7, 8, 11]

розроблено метод, використання якого дозволяє одночасно мінімізувати всі нев'язки (15).

Використаємо його і зведемо процес числового задоволення умов (14) до пошуку мінімуму такої узагальненої квадратичної форми:

$$\begin{aligned} \Omega_N \{c_1, \dots, c_M\} &= \sum_{m=1}^4 \|f_{m,N}(\alpha) - P_m(\alpha)\|^2 + \sum_{m=5}^{10} \|f_{m,N}(\gamma) - P_m(\gamma)\|^2 = \\ &= \sum_{k,j=1}^M c_k c_j W_{kj} - 2 \sum_{k=1}^M c_k V_k + P^2, \end{aligned} \quad (16)$$

де норму в L_2 позначатимемо $\|f(\gamma)\| = \sqrt{\int_{-1}^1 f^2(\gamma) d\gamma}$, або $\|f(\alpha)\| = \sqrt{\int_0^1 \alpha f^2(\alpha) d\alpha}$;

$$W_{kj} = \int_0^1 \alpha \sum_{m=1}^4 A_{m,k}(\alpha) A_{m,j}(\alpha) d\alpha + \int_{-1}^1 \sum_{m=5}^{10} A_{m,k}(\gamma) A_{m,j}(\gamma) d\gamma, \quad W_{kj} = W_{jk};$$

$$V_k = \sum_{m=1}^4 \int_0^1 \alpha A_{m,k}(\alpha) P_m(\alpha) d\alpha, \quad k, j = \overline{1, M}; \quad P^2 = \sum_{m=1}^4 \int_0^1 \alpha P_m(\alpha)^2 d\alpha.$$

Там же запропонована методика аналітичного обчислення інтегралів W_{kj} , V_k , які визначають коефіцієнти узагальненої квадратичної форми, що дозволяє знайти значення невідомих змінних c_k з високою точністю і підвищити швидкодію методу.

За своїм означенням узагальнена квадратична форма (16) є невід'ємна. Її мінімум позначимо $F(N)$, а змінні, на яких він досягається – c_k^N . Із умови мінімуму квадратичної форми одержимо систему лінійних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^M c_k^N W_{kj} = V_j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (17)$$

Із рівнянь (17) обчислимо змінні c_k^N , $k = \overline{1, M}$, визначимо коефіцієнти a_k^j , b_k^j і знайдемо шукані функції переміщень $\Phi_{j,N}$, $\Psi_{j,N}$, через які виразимо компоненти вектора переміщень і тензора напружень у двошаровому циліндрі.

Встановлення умов збіжності наближеного розв'язку. Покажемо, що для побудованих функцій $\Phi_{j,N}$, $\Psi_{j,N}$ і знайденого мінімуму квадратичної форми (16) вірні наступні твердження:

Лема. Функція $F(N)$ є невід'ємна і не зростає.

Доведення леми подібне, як в [11].

Теорема. Якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує N , таке, що $F(N) < \frac{\varepsilon^2}{4}$, то існують межі послідовностей

$$\Phi_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_{j,N}, \quad \Psi_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_{j,N}, \quad j = \overline{1, 2},$$

а знайдені переміщення та напруження точно задовольняють крайові умови (1)–(3) у метриці L_2 .

Відзначимо, що квадратична форма (16) вибрана таким чином, що для її мінімуму $F(N)$ і знайдених невідомих коефіцієнтів c_k^N буде виконуватись рівність

$$F(N) = \sum_{m=1}^4 \int_0^1 [f_{m,N}(\alpha) - P_m(\alpha)]^2 \alpha d\alpha + \sum_{m=5}^{10} \int_{-1}^1 [f_{m,N}(\gamma) - P_m(\gamma)]^2 d\gamma. \quad (18)$$

Доведення. Розглянемо послідовність малих додатних чисел ε_N , яка збігається до нуля. Згідно з умовою теореми ця послідовність існує і їй відповідає послідовність натуральних чисел $N \rightarrow \infty$. Відповідно з лемою і умовою теореми для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке N і $\varepsilon_N < \varepsilon$, що виконується

$$F(N+k) \leq F(N) < \frac{\varepsilon_N^2}{4}$$

для будь-якого натурального k , а отже, якщо спрямувати $\varepsilon \rightarrow 0$, то одержимо в границі

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 0.$$

Покажемо, що при зменшенні ε_N , $\varepsilon \geq \varepsilon_N \geq 0$ і відповідно збільшенні N , переміщення і напруження побудовані з використанням коефіцієнтів c_k^N і функцій (11) задовольнятимуть умови (14) з заданою похибкою ε у метриці простору L_2 . Дійсно, з умови (18) і нерівності трикутника слідує, що послідовності функцій $f_{m,N}(\gamma) \in$ фундаментальними, оскільки

$$\|f_{m,j} - f_{m,k}\| \leq \|f_{m,j} - P_m\| + \|f_{m,k} - P_m\| \leq 2\sqrt{F(N)} < \varepsilon_N < \varepsilon, \quad m = \overline{1,10}$$

для будь-яких $k, j \geq N$. Отже, існують границі функцій $f_{m,N}(\alpha)$, $f_{m,N}(\gamma)$, які позначимо

$$f_m(\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{m,N}(\alpha), \quad m = \overline{1,4}, \quad f_m(\gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{m,N}(\gamma), \quad m = \overline{5,10}.$$

Крайові умови (14) також задовольняються із заданою похибкою $\varepsilon_N > 0$ у метриці L_2 , оскільки згідно з (18) одержимо наступні оцінки

$$\|f_{m,N}^n - P_m^n\| \leq \sqrt{F(N)} < \varepsilon_N/2, \quad m = \overline{1,10}. \quad (19)$$

Спрямуємо в нерівностях (19) $\varepsilon_N \rightarrow 0$, і в границі одержимо, що функції $f_m^n(\gamma)$ точно задовольняють крайові умови (14) у метриці простору L_2 . Отже, маємо

$$\|f_m^n - P_m^n\| = 0, \quad m = \overline{1,10}. \quad (20)$$

Ми показали, що у випадку виконання умов теореми, напруження які визначають функції

$$\Phi_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_{j,N}, \quad \Psi_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_{j,N}, \quad j = \overline{1,2}$$

точно задовольняють всі рівняння і співвідношення вісесиметричної теорії пружності та умови (14) у метриці L_2 . Умови (14) повністю еквівалентні крайовим умовам (1)–(3). Кінець доведення.

Відзначимо, що у випадку коли функції $P_m(\gamma)$ будуть неперервними, то умови (20) будуть задовольнятися у нормі простору $C[0,1]$ або $C[-1,1]$.

Висновки. Обґрунтовано новий аналітично-числовий метод розрахунку НДС скінченного двошарового циліндра. Встановлено, що напружено-деформований стан двошарового циліндра з навантаженими торцями розділяється на основний напружений стан, який відповідає заданим головним векторам сил прикладеним на торцях, і самозрівноважений стан. Самозрівноважений стан описується трьома наборами базових функцій, які зникають при віддаленні від торців або бічної поверхні циліндра. Розроблена методика апроксимації умов ідеального контакту прилеглих шарів і крайових умов скінченною кількістю базових функцій. Знаходження вісесиметричного напруженого стану циліндра зведено до розв'язання скінченної системи одновимірних рівнянь. Дослідження розв'язку одержаних систем рівнянь зведено до знаходження мінімуму узагальненої квадратичної форми, коефіцієнти якої виражаються через тригонометричні і бesselеві функції. Вперше встановлено, що числове значення мінімуму узагальненої квадратичної форми визначає збіжність розв'язку і дає оцінку похибки задоволення всіх крайових умов на поверхні двошарового циліндра і умов ідеального контакту.

1. Tam J.Q., Wang, Y.M. Laminated composite tubes under extension, torsion, bending, shearing and pressuring: a state space approach // Int. J. Solids Struct. – 2001. – 38. – P. 9053-9075.
2. Tsukrov I., Drach B. Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers // Int. J. Solids Struct. – 2010. – 47. – P. 25-33.
3. Саврук М.П., Онишко Л.Й., Сенюк М.М.. Плоска динамічна осесиметрична задача для порожнього циліндра // Фіз.-хім. механіка матеріалів. Там же. – 2008. – 44, № 1. – С. 7-14.
4. Yin X. C., Yue Z. Q. Transient plane-strain response of multilayered elastic cylinders to axisymmetric impulse // J. Appl. Mech. – 2002. – 69, № 6. – P. 825-835.

5. Liu S., Soldatos K.P. Extension of a new approach towards accurate stress analysis of laminates subjected to thermomechanical loading // J. Eng. Math. – 2008. – 61. – P. 185-200.
6. Soldatos K. P. General solutions for the statics of anisotropic, transversely inhomogeneous elastic plates in terms of complex functions/ K. P. Soldatos // Math Mech Solids. – 2006. – 11. – P. 596-628.
7. Ревенко В.П. О решении трехмерных уравнений линейной теории упругости // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 7. – С. 52-65.
8. Ревенко В.П. Дослідження напруженого стану навантаженого скінченного циліндра з використанням власних функцій // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2009. – Вип. 7. – С. 183-190.
9. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1979. – 261 с.
10. Robert M., Keer L.M. Stiffness of an elastic circular cylinder of finite length // J. Appl. Mech. – 1988. – 55, № 3. – P. 560-565.
11. Ревенко В.П. Знаходження напруженого стану вісесиметрично навантаженого на боковій поверхні циліндра // Вісник Дніпропетр. Ун-ту. Механіка. – 2009. – № 5. – Вип. 13, т. 2. – С. 158-166.
12. Ревенко В.П. Знаходження тривимірного тензора напружень у циліндричній системі координат і побудова власних функцій // Доп. НАН України – 2006. – 9. – С. 50-56.
13. Корн Г, Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн. – М., 1974. – 831 с.

Стаття надійшла до редакції 27.03.2014.