

УДК 514.18

В.П. Самчук*Луцький національний технічний університет***ЗГУЩЕННЯ КАРКАСІВ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНИХ ПОВЕРХОНЬ НА
ОСНОВІ ПЕРЕРОЗПОДІЛУ ФОРМУЮЧОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

Запропоновано алгоритм перерахунку параметрів функції розподілу формуючого навантаження залежно від кроку дискретизації поверхні зі збереженням вихідних умов формування моделі дискретної поверхні. Це дозволяє змінювати щільність вузлів каркасу поверхонь при побудові моделей різноманітних об'єктів в машинобудуванні та будівництві. Отримані результати дають можливість поширити алгоритм на довільні криволінійні системи координат.

Ключові слова: згущення, дискретні каркаси, дискретне геометричне моделювання.

Рис. 7. Форм. 8. Літ. 5.

В.П. Самчук**СГУЩЕНИЕ КАРКАСОВ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ
НА ОСНОВЕ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМИРУЮЩЕЙ НАГРУЗКИ**

Предложен алгоритм определения параметров функции распределения формообразующей нагрузки в зависимости от шага дискретизации поверхности при сохранении начальных условий формирования модели дискретной поверхности. Это позволит управлять плотностью распределения узлов каркаса поверхностей при построении моделей разнообразных объектов в машиностроении и строительстве. Полученные результаты дают возможность распространить алгоритм на любые криволинейные системы координат.

Ключевые слова: сгущение, дискретные каркасы, дискретное геометрическое моделирование.

V.P. Samchuk**THICKENING FRAMES DISCRETE REPRESENTATION OF THE SURFACE
THROUGH THE REALLOCATION OF FORMING LOAD**

Solving tasks of discrete geometric modeling of various objects and processes there is a problem in finished model of spot carcasses node density. This is necessary to get more accurate solution of the problem, to clarify the results received on certain local areas generated image or to reduce the amount of discrete information necessary to represent geometric models of structural constructions.

The purpose of work is to analyze the well-known methods of thickening carcasses discretely represented surfaces conversion and algorithm development and formative load to determine the new canon distribution by changing the discretization grid in an arbitrary coordinate system.

In general, the distribution of effort in forming the grid can be specified as an arbitrary functional dependence and arbitrary set of values, so the solution of the problem of condensation discretely presented a grid of rectangular cells in an arbitrary curvilinear coordinate system is to reallocate effort between the nodes of the new grid with a modified sampling.

To solve the problem using the principle of beam cell, whereby the efforts of arbitrary concentrated force gradually transferred first to the main beam, then the nodes leaning main beam on the secondary beams, and are transmitted to the nodes of a discrete grid cells. Nodes that are transmitted forming load cell of arbitrary rectangular form discrete structures.

The received results allow thickening frames of discrete surfaces represented in order to get a more accurate model or specify received results on certain local areas. They allow to expand nodes in discrete carcass and to reduce the amount of numerical data necessary for formed model.

Keywords: node density, discrete carcass, discrete geometric modeling.

Постановка проблеми. Під час вирішення задач дискретного геометричного моделювання різноманітних об'єктів та процесів виникає проблема згущення точкового каркасу моделі з метою отримання більш точного розв'язку або уточнення отриманих результатів на певних локальних ділянках сформованого образу.

Крім задач згущення важливою є і обернена задача, яка полягає у зменшенні густоти дискретної сітки, що дозволяє, у свою чергу, зменшити об'єм дискретної інформації, необхідної для представлення тієї чи іншої геометричної моделі особливо при формуванні структурних конструкцій.

Основним джерелом параметрів, за допомогою яких враховуються геометричні вимоги до дискретних моделей, виступає зовнішнє формуєтворююче навантаження [1]. Тому при вирішенні задач згущення каркасів, якими представляються модельовані об'єкти, виникає необхідність визначення закону, за яким необхідно змінити розподіл формуєтворюючого навантаження на вузли, для забезпечення зменшення кроку дискретизації і, як наслідок, для отримання більш точного розв'язку.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідженню згущення дискретних каркасів геометричних образів присвячені численні роботи вчених, що працюють у галузі дискретного геометричного моделювання, серед яких слід виділити публікації [2 – 5]. Проте в них не розглядалися задачі згущення сіток з комірками у формі довільних чотирикутників. В опублікованих працях відсутні дослідження, у яких крок дискретизації моделі визначається через параметри зовнішнього формоутворюючого навантаження у вузлах сітки.

Формування цілей роботи. Проаналізувати відомі методи згущення каркасів дискретно представлених поверхонь та розробити алгоритм перерахунку формоутворюючого навантаження з метою визначення нового закону його розподілу при зміні дискретизації сітки в довільній координатній системі.

Основна частина. У загальному випадку розподіл формуючих зусиль у вузлах сітки може бути заданий як довільною функціональною залежністю так і множиною довільних значень, тому розв'язок задачі згущення дискретно представленої сітки з чотирикутними комірками у довільній криволінійній системі координат полягає у перерозподілі зусиль між вузлами нової сітки зі зміненою дискретизацією. Якщо навантаження розглядається як реальне, тоді його необхідно дискретизувати і звести до вузлового, враховуючи навантажені площі комірок та топологію дискретної сітки.

Для розв'язання поставленої задачі доцільно використати принцип балкової клітки, згідно з яким зусилля від довільної сили P (рис. 1) спочатку передається на балку настилу AB , потім у вузлах A та B – на головні балки 1 - 4 та 2 - 3 з яких розподілиться у точках 1, 2, 3 та 4. Вузли 1, 2, 3 та 4 формують чотирикутну комірку довільної дискретної структури.

Розглянемо елемент сітки в декартовій прямокутній системі координат (рис. 2). Нехай у межах комірки в точці O прикладена одинична сила $\bar{H}_0 = 1$. Замінімо систему (рис. 2) статично еквівалентною. Для цього у вузлах комірки прикладемо функції впливу реакцій $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3, \bar{H}_4$ (рис. 3).

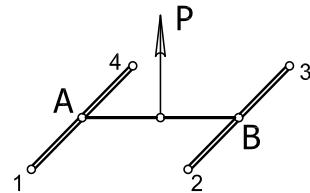


Рис. 1. Схема передачі зусилля за принципом балкової клітки

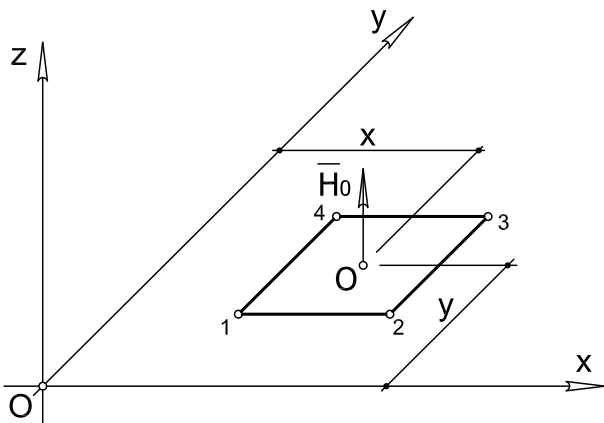


Рис. 2. Елемент сітки в декартовій системі координат

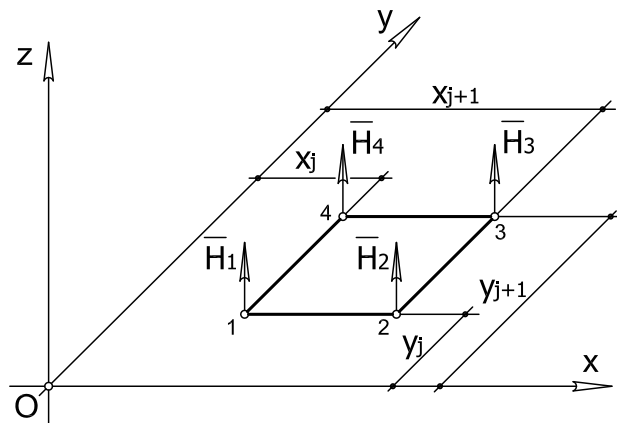


Рис. 3. Статично еквівалентна система

Щоб визначити невідомі функції $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3, \bar{H}_4$ необхідно на систему (рис. 3) накласти додаткові умови, які випливають з властивостей прямокутника. Розглянемо алгоритм знаходження \bar{H}_1 , та покладемо, якщо точка $O(x, y)$ прикладання сили $\bar{H}_0 = 1$ переміститься у вузол 1, тоді функція $\bar{H}_1 = 1$; якщо $\bar{H}_0 = 1$ переміститься на будь-яку пряму, що не проходить через точку 1 (точки 2 - 3 чи 3 - 4), тоді $\bar{H}_1 = 0$. Аналогічно формуються вимоги до функцій \bar{H}_2, \bar{H}_3 та \bar{H}_4 .

Запишемо визначники, які представляють подвоєні площі трикутників $\Delta O23$ та $\Delta O34$ (рис. 4):

$$S_2(x, y) = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}, \quad S_3(x, y) = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

кожен з яких є лінійною функцією від x та y . Добуток S_2 та S_3 формує функцію другого порядку і забезпечує умову належності точки $O(x, y)$ прямим 2 - 3 та 3 - 4. Таким чином забезпечується умова $\bar{H}_1 = 0$ при $\bar{H}_0 = 1 \in [2,3]$ або $\bar{H}_0 = 1 \in [3,4]$.

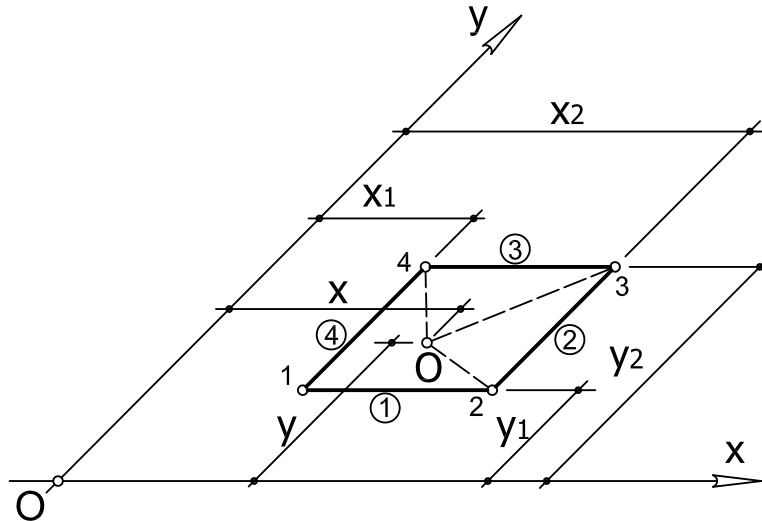


Рис. 4. Схема формування визначників S_i

Для забезпечення умови $\bar{H}_1 = 1$ при переміщенні одиничної сили в точку $O(x, y)$ вводиться нормуючий множник h_1 .

Отже, функція впливу \bar{H}_1 має вигляд:

$$H_1(x, y) = h_1 S_2(x, y) S_3(x, y). \quad (2)$$

Коефіцієнт h_1 знаходиться з поставленої умови:

$$h_1 S_2(x_1, y_1) S_3(x_1, y_1) = 1, \quad (3)$$

$$h_1 = \frac{1}{T_4 T_2}, \quad (4)$$

де $T_4 = S_2(x_1, y_1) = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$ та $T_2 = S_3(x_1, y_1) = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$ значення функцій у

точці (x_1, y_1) .

Рисунок 5 ілюструє випадки, коли одинична сили послідовно співпадає з вузлами комірки. Відповідні функції впливу стають рівними добуткам площ трикутників побудованих на основах що не проходять через точку $O(x, y)$. З рис. 5 легко зрозуміти принцип за яким прийнята нумерація констант T .

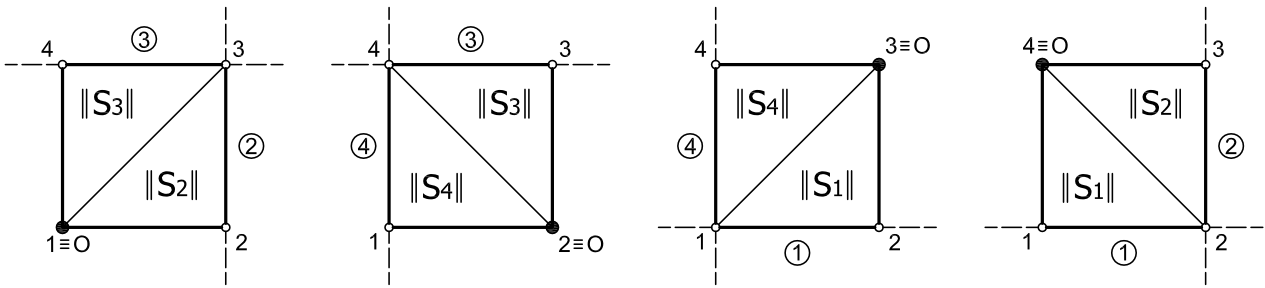


Рис. 5. Принцип формування нумерації констант T

Аналогічно знаходяться вирази для функцій впливу в точках 2, 3 та 4:

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(x, y) &= \frac{S_2(x, y)S_3(x, y)}{T_4 T_2}, & \bar{H}_2(x, y) &= \frac{S_3(x, y)S_4(x, y)}{T_1 T_3}, \\ \bar{H}_3(x, y) &= \frac{S_4(x, y)S_1(x, y)}{T_2 T_4}, & \bar{H}_4(x, y) &= \frac{S_1(x, y)S_2(x, y)}{T_3 T_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Кожна з функцій впливу (5) являє собою добуток двох лінійних функцій, який в загальному випадку представляється у виді:

$$\bar{H}_i(x, y) = (a_i + b_i x + c_i y)(d_i + e_i x + f_i y),$$

де i – номер функції впливу;

a, b, c, d, e, f – коефіцієнти які залежать від координат вузлів комірки.

Реакції у вузлах однієї комірки від повного навантаження $q(x, y)$ обчислюються як подвійний інтеграл по її площі:

$$H_i = \iint_{\Omega} \bar{H}_i(x, y) q(x, y) d\Omega, \quad (6)$$

де i – номер вузла комірки;

$\bar{H}_i(x, y)$ – функції впливу у відповідних точках;

$q(x, y)$ – функція формоутворюючого навантаження;

$d\Omega$ – елемент площі.

Щоб отримати значення навантаження в кожному вузлі дискретної сітки необхідно просумувати значення реакцій, знайдених за формулою (6) для одного і того ж вузла сусідніх комірок (рис. 6).

Для внутрішніх вузлів сітки з чотирикутними комірками навантаження обчислюється за формулою:

$$P_{i,j} = H_{i-1,j-1}^3 + H_{i,j-1}^4 + H_{i,j}^1 + H_{i-1,j}^2, \quad (8)$$

де верхній індекс – це номер вузла окремої комірки i, j .

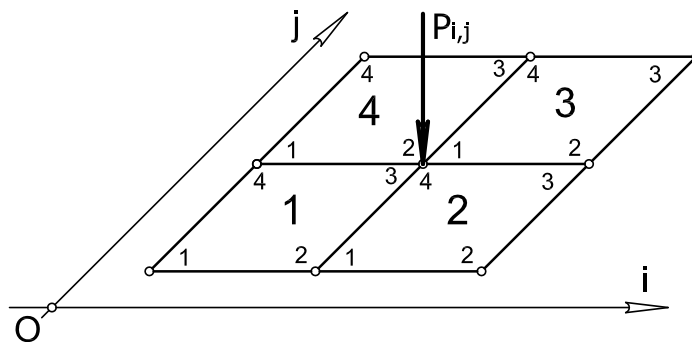


Рис. 6. Формування повного навантаження у вузлі сітки

Легко переконатись, що усе залишається справедливим і для довільної чотирикутної комірки у якої три точки не лежать на одній прямій. Тому даний спосіб можна поширити на криволінійні системи координат для дискретизації функції навантаження та приведення його до вузлового.

Вирішуючи задачі формоутворення поверхонь на планах сформованих в криволінійних системах координат, для обчислення функцій впливу найпростіше використати формули переходу між декартовою та відповідною криволінійною системою. Наприклад, для деяких криволінійних системи координат:

полярної – $x = \rho \cos(\varphi)$, $y = \rho \sin(\varphi)$,

еліптичної – $x = a \operatorname{ch}(\xi) \cos(\eta)$, $y = a \operatorname{sh}(\xi) \sin(\eta)$,

параболічної – $x = \xi \eta$, $y = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$.

В багатьох випадках подвійний інтеграл (6) простіше обчислювати не в прямокутній системі координат, а в криволінійній яка відповідає закону формування горизонтальної проекції поверхні. Якщо дискретна сітка співпадає з координатними лініями криволінійної системи координат, тоді суттєво спрощується вид області інтегрування та весь процес інтегрування вцілому.

Елемент площі $d\Omega$ для основних криволінійних систем координат:

полярна – $d\Omega = \rho d\rho d\varphi$,

еліптична – $d\Omega = a^2(\operatorname{sh}^2(\xi) + \sin^2(\eta))d\xi d\eta$,

параболічна – $d\Omega = (\xi^2 + \eta^2)d\xi d\eta$.

Приклад. Нехай на полярній дискретній сітці з заданим опорним контуром (рис. 7) необхідно сформулювати модель елемента конструкції у формі кільцевого сектора під дією формуючого навантаження виду $q(\rho, \varphi) = 3 + 2\rho - \varphi$.

Параметри дискретизації: $\rho \in [1; 4]$, $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

Крок дискретної сітки в радіальному та коловому напрямках: $\delta = 1$, $\varepsilon = \frac{\pi}{12}$.

Перед тим, як описувати модель сітки системою скінчено-різницевих рівнянь, необхідно дискретизувати формуюче навантаження, привівши його до вузлового.

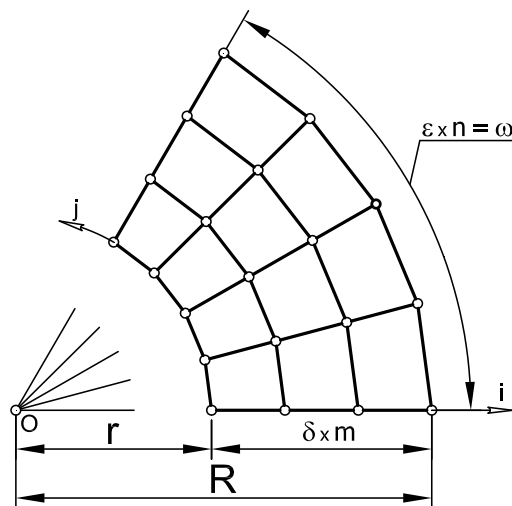


Рис. 7. План поверхні в полярній системі координат

Алгоритм обчислень:

1. Послідовно для чотирьох вершин кожної з комірок сітки знаходяться функції впливу (5), використовуючи формули переходу від полярної до прямокутної системи координат:

$$\begin{aligned}\bar{H}_{i,j}^1(x_i, y_j) &= \frac{S_2(x_i, y_j)S_3(x_i, y_j)}{T_4 T_2}, & \bar{H}_{i,j}^2(x_i, y_j) &= \frac{S_3(x_i, y_j)S_4(x_i, y_j)}{T_1 T_3} \\ \bar{H}_{i,j}^3(x_i, y_j) &= \frac{S_4(x_i, y_j)S_1(x_i, y_j)}{T_3 T_4}, & \bar{H}_{i,j}^4(x_i, y_j) &= \frac{S_1(x_i, y_j)S_2(x_i, y_j)}{T_3 T_1}\end{aligned}$$

де i, j – нумерація комірок сітки в глобальній системі координат (за номером лівої нижньої точки), $i \in [0; 3]$, $j \in [0; 4]$.

2. За формулою (6) для кожної комірки окремо обчислюються інтерпольовані реакції у її вузлах від навантаження, розподіленого по площі комірки:

$$H_{i,j}^k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^4 \bar{H}_{i,j}^k(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)) q(\rho, \varphi) \rho d\rho \right) d\varphi,$$

де k – номер вузла окремої комірки, $k \in [1; 4]$;

i, j – нумерація комірок сітки в глобальній системі координат (за номером лівої нижньої точки), $i \in [0; 3]$, $j \in [0; 4]$.

3. За формулою (8) обчислюються значення навантаження у внутрішніх вузлах сітки, сумуючи інтерпольовані реакції у спільних вузлах суміжних комірок сітки:

$$P_{i,j} = H_{i-1,j-1}^3 + H_{i,j-1}^4 + H_{i,j}^1 + H_{i-1,j}^2,$$

де $i \in [1; 2]$, $j \in [1; 3]$.

На контурі сітки:

при $i = 0$, $j \in [1; 3]$: $P_{i,j} = H_{i,j-1}^4 + H_{i,j}^1$, при $i = m$, $j \in [1; 3]$: $P_{i,j} = H_{i-1,j-1}^3 + H_{i-1,j}^2$,

при $i \in [1; 2]$, $j = 0$: $P_{i,j} = H_{i,j}^1 + H_{i-1,j}^2$, при $i \in [1; 2]$, $j = n$: $P_{i,j} = H_{i-1,j-1}^3 + H_{i,j-1}^4$.

Висновки. В роботі запропоновано алгоритм перерахунку формоутворюючого навантаження з метою визначення нового закону його розподілу при зміні дискретизації сітки в довільній координатній системі. Це дозволяє здійснювати згущення каркасів дискретно представлених поверхонь з метою отримання більш точної моделі або розрідження вузлів у дискретному каркасі з метою зменшення об'єму числових даних, необхідних для опису сформованої моделі.

1. Ковалев С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. Дисс. докт. техн. наук. – М.: 1986. – 348 с.
2. Пустюльга С.І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями. Дис. докт. техн. наук. 05.01.01. / К.: КНУБА, 2006. – 320с.
3. Найдыш В. М. Формирование загущения точечного ряда на основе разностных схем // Прикладная геометрия и инженерная графика. К.: Будівельник. – 1992. Выпуск 53. – С. 21-23.
4. Верещага В.М. Загальний метод згущення точкового ряду ДПК // Прикладна геометрія та інженерна графіка. К.: КНУБА. – 2002. Вип. 71. – С. 63-67.
5. Ахматшина О.І. Локальне загущення приконтурних чарунок дискретної сітки // Прикладна геометрія та інженерна графіка. К.: КНУБА. – 2003. Вип. 73. – С. 207-211.

Стаття надійшла до редакції 20.02.2014.