УДК 539.3

Г.В. Габрусєв
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОГО ШАРУ ІЗ КОНЦЕНТРИЧНИМИ КОЛОВИМИ ЛІНІЯМИ РОЗДІЛУ ГРАНИЧНИХ УМОВ

Запропоновано методику дослідження напруженого стану пружного шару при врахуванні теплообміну із навколишнім середовищем. Для демонстрації розробленої методики розв'язано задачу термопружності для трансверсально ізотропного шару при наявності на його граничних площинах колових ліній розділу граничних умов для температури та із врахуванням теплообміну між шаром і навколишнім середовищем за законом Ньютона.

Ключові слова: *напруження, трансверсально ізотропний шар, тепловий контакт, теплообмін за законом Ньютона.*

Рис. 4. Форм. 11. Літ. 8.

Г.В. Габрусев

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОГО СЛОЯ С КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ КРУГОВЫМИ ЛИНИЯМИ РАЗДЕЛА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Предложена методика исследования напряженного состояния упругого слоя при учете теплообмена с окружающей средой. Для демонстрации разработанной методики решена задача термоупругости для трансверсально изотропного слоя при наличии на его предельных плоскостях круговых линий раздела граничных условий для температуры и с учетом теплообмена между слоем и окружающей средой по закону Ньютона.

Ключевые слова: *напряжение, трансверсально изотропный слой, тепловой контакт, теплообмен по закону Ньютона.*

H.V. Habrusiev

METHODS OF SOLUTION PROBLEMS OF THERMOELASTICITY FOR TRANSVERSAL ISOTROPIC LAYER, WHEN CIRCLE LINES OF THE BOUNDARY CONDITIONS DISTRIBUTION ARE AVAILABLE

In modern engineering many constructions, machine parts and device units operate under sufficient heat loads. Thermal stresses, which occur, can be of critical values and be crucial while structural designing. That is why the problems of thermoelasticity, which became of special importance in the middle of the last century [1, 2] are actual nowadays. The objective of the paper in question is the development of the method for the investigation of the stress state in the axis-symmetric problems of thermoelasticity, when the distribution lines of the boundary conditions of the 3-d order are available for the temperature on the boundary planes of the transversal isotropic layer.

To demonstrate the developed method the problem of thermoelasticity for the transversal isotropic layer, when three circle lines of the boundary conditions distributions for the temperature are available, has been solved. Plane-parallel, transversal isotropic layer of the finite thickness $2h$ ***has been analyzed. The boundary plane of the layer are considered to be parallel to the isotropy and free from the external loads. Heat exchange according to the Newton law takes place between the points of the layer boundary planes and external environments, three lines of the boundary conditions distribution of the 3-d order for the temperature as the concentric circles being available on the upper layer boundary plane. The temperature of the external environment, which correspond different areas of the boundary planes, are different. Heat-exchange coefficients between the layer points and external environments are different too.***

To solve the problem the main equations and relations of the thermoelasticity theory for the transversal isotropic bodies obtained in the papers by W. Novatsky [3], has been used.

When the boundary conditions of the problem are provided, the system of integral equations is obtained. To solve it the unknown function as the segment of the generalized Fourier's series according to the Bessel's function is introduced. The system of linear equations relatively unknown coefficients has been obtained. The system was built so, that the more the number of its equations is, the more accurate the solution of the task is. That is, taking advantage of the developed method, the problem of thermoelasticity can be solved with the preliminary defined accuracy.

To demonstrate the developed method the numerical example has been analyzed. Expressions for the functions of temperature and stress distributions in the layer have been built. Using the obtained functions the effect of the environment temperature and conditions of contact with the layer on the temperature distribution in the layer, as well as on the value and nature of stresses inside the layer, has been analyzed.

Key words: *stresses, transversal isotropic layer, thermal contact, heat exchange according to the Newton law.*

Вступ. Цілий ряд задач у галузі будівництва та машинобудування призводять до необхідності розв'язання задач термопружності. У процесі визначення їх розв'язку необхідно з'ясувати питання про вплив температурних полів на розподіл напружень, на розміри області контакту тощо. Багато вітчизняних, та закордонних науковців розглядали задачі термопружності [1-6]. Великий інтерес до такого типу задач в першу чергу пояснюється тим, що температурні напруження, які виникають у пружних тілах під впливом значних температурних градієнтів,

© Г.В. Габрусєв

можуть набувати критичних значень і відігравати вирішальну роль при розрахунках на міцність. Окрім самостійної цінності, задачі термопружності відіграють важливу роль, як одна із складових широкого кола задач, зокрема контактних.

У зв'язку з цим задачі термопружності, які набули особливого розвитку в середині минулого століття, не втрачають актуальності досі, а тому потребують розробки нових і вдосконалення існуючих методик розв'язання.

Метою запропонованої роботи і є розроблення алгоритму дослідження напруженого стану пружного шару в задачах термопружності за наявності концентричних колових ліній розділу граничних умов для температури на його поверхні.

Постановка задачі. Для демонстрації розробленої методики розглянемо плоскопаралельний, трансверсально ізотропний шар скінченної товщини $2h$. Будемо вважати, що граничні площини шару паралельні до площин ізотропії і вільні від зовнішніх навантажень. Між точками граничних площин шару і зовнішнім середовищем здійснюється теплообмін за законом Ньютона. При цьому на обох граничних площинах шару є по три лінії розділу граничних умов для температури у вигляді концентричних кіл. Температура зовнішнього середовища, що відповідає різним областям граничних площин, які відокремлені лініями розділу – різна.

Зафіксуємо циліндричну систему координат (O, r, φ, z) так, щоб координатна площина $z = 0$ співпадала з серединною площиною шару. Вісь OZ направимо перпендикулярно до граничних площин, рівняння яких відносно вибраної системи матимуть вигляд $z = h$ та $z = -h$ (рис.1).

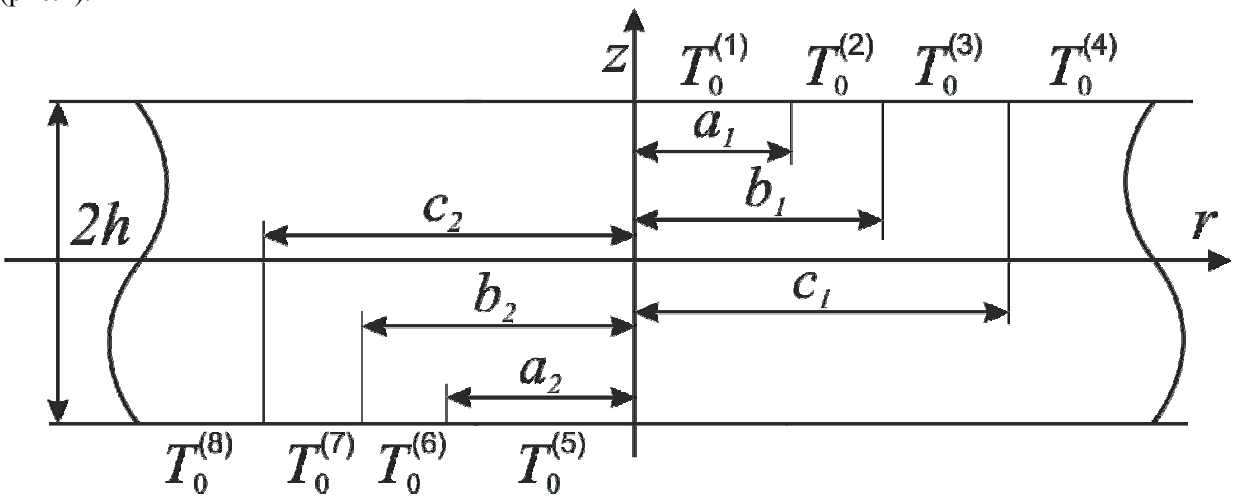

Рис. 1. **Розрахункова схема**

Граничні умови для температури на верхній граничній площині шару матимуть вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -k_i (T(r,h) - T_0^{(i)}),\ r_{i-1} \le r < r_i,$$

$$i = \overline{1,4},\ r_0 = 0,\ r_1 = a_1,\ r_2 = b_1,\ r_3 = c_1,\ r_4 = \infty. \quad (1)$$

На нижній –

$$\frac{\partial T}{\partial z} = k_j (T(r,-h) - T_0^{(j)}),\ r_{j-1} \le r < r_j,$$

$$j = \overline{5,8},\ r_4 = 0,\ r_5 = a_2,\ r_6 = b_2,\ r_7 = c_2,\ r_8 = \infty. \quad (2)$$

Оскільки граничні площини шару вільні від зовнішніх навантажень, матимемо:

$$\begin{aligned} &\sigma_{rz}(r, \pm h) = 0, 0 \le r < \infty; \\ &\sigma_{zz}(r, \pm h) = 0, 0 \le r < \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $T = T(r,z)$ є функцією розподілу температури в шарі; $T_0^{(i)}$ – температура зовнішнього середовища відносно областей граничних площин, відокремлених лініями розділу граничних умов; k_i – коефіцієнти теплообміну між шаром та навколишнім середовищем.

Виходячи з граничних умов задач, потрібно визначити розподіл температури, а також напружень, що виникли у шарі. Для цього використаємо співвідношення термопружності для трансверсально ізотропного тіла, запропоновані В. Новацьким в його роботі [7]. У результаті застосування до них інтегрального перетворення Ганкеля [8], отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}(r,z) &= \beta A_{33}A_{44}\int_0^\infty \alpha^2 \frac{d}{dz}\left(e^*\frac{d^2}{dz^2} - d^*\alpha^2\right)\overline{\psi}(\alpha,z)J_1(r\alpha)d\alpha, \\ \sigma_{zz}(r,z) &= -\beta A_{33}A_{44}\int_0^\infty \alpha^3 \left(e^*\frac{d^2}{dz^2} - d^*\alpha^2\right)\overline{\psi}(\alpha,z)J_0(r\alpha)d\alpha, \end{aligned} \tag{4}$$

$$T(r,z) = B\int_0^\infty \alpha^5[C_5(\alpha)sh\mu_5 z\alpha + D_5(\alpha)ch\mu_5 z\alpha]J_0(r\alpha)d\alpha, \tag{5}$$

В останніх співвідношеннях введено наступні позначення:

$$B = A_{33}A_{44}(\mu_5^2-\mu_1^2)(\mu_5^2-\mu_3^2),\ \beta = \frac{1+\nu}{EE'D}\left(\alpha+\nu'\alpha'\right),\ \beta' = \frac{1+\nu}{ED}\left(2\frac{\nu'\alpha}{E'}+\frac{1-\nu}{E}\alpha'\right),$$

$$A_{11} = \frac{1}{DE'}\left(\frac{1}{E}-\frac{\nu'^2}{E'}\right),\ A_{13} = \frac{\nu'(1+\nu)}{EE'D},\ A_{33} = \frac{1-\nu^2}{DE^2},\ A_{44} = \frac{E'}{2(1+\nu')},$$

$$D = \frac{1+\nu}{EE'}\left(\frac{1-\nu}{E}-\frac{2\nu'^2}{E'}\right),\ \varepsilon^4 = \frac{A_{11}}{A_{33}},\ e^* = \frac{\beta'}{\beta}\frac{A_{13}}{A_{33}}-1,\ d^* = \frac{A_{13}}{A_{33}}-\mu_1^2\mu_3^2\frac{\beta'}{\beta},$$

$$\mu_{1,3}^2 = \begin{cases} \varepsilon^2\left(\omega\pm\sqrt{\omega^2-1}\right), \omega>1, \\ \varepsilon^2,\ \omega=1, \\ \varepsilon^2\left(\sqrt{\frac{1+\omega}{2}}\pm i\sqrt{\frac{1-\omega}{2}}\right)^2, \omega<1, \end{cases} \qquad \mu_5^2 = \frac{\lambda}{\lambda'},\ \omega = \frac{A_{11}A_{33}-2A_{13}A_{44}-A_{13}^2}{2A_{44}\sqrt{A_{11}A_{33}}},$$

$\overline{\psi}(\alpha,z) = \sum_{j=1,3,5}\left[C_j(\alpha)sh(\mu_j z\alpha)+D_j(\alpha)ch(\mu_j z\alpha)\right]$ – трансформанта Ганкеля термопружного потенціалу, $C_j(\alpha)$, $D_j(\alpha)$ – невідомі функції, що визначаються граничними умовами задачі; $J_0(r\alpha), J_1(r\alpha)$ – функції Бесселя першого роду; E та ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона для площин ізотропії; E' та ν' – для напрямку Oz. Аналогічно α та α' – коефіцієнти лінійного температурного розширення, а λ та λ' – коефіцієнти теплопровідності.

Температурна частина. Вимагаючи виконання граничних умов задач для температури (1) та (2), отримаємо систему інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій $C_5(\alpha)$, $D_5(\alpha)$:

$$B\int_0^\infty \alpha^5\left(C_5(\alpha)Q_i(\alpha)+D_5(\alpha)R_i(\alpha)\right)J_0(r\alpha)d\alpha = k_iT_0^{(i)},\ r_{i-1}\le r<r_i;$$

$$i=\overline{1,4},\ r_0=0,\ r_1=a_1,\ r_2=b_1,\ r_3=c_1,\ r_4=\infty; \tag{6}$$

© Г.В. Габрусєв

$$B\int_0^\infty \alpha^5\left(C_5(\alpha)Q_j(\alpha)-D_5(\alpha)R_j(\alpha)\right)J_0(r\alpha)\,d\alpha=-k_jT_0^{(j)},\ r_{j-1}\le r<r_j;$$

$$j=\overline{5,8},\ r_4=0,\ r_5=a_2,\ r_6=b_2,\ r_7=c_2,\ r_8=\infty; \qquad (7)$$

$Q_i(\alpha)=\mu_5\alpha ch\mu_5 h\alpha+k_i sh\mu_5 h\alpha$, $R_s(\alpha)=\mu_5\alpha sh\mu_5 h\alpha+k_s ch\mu_5 h\alpha$.

Продовжимо співвідношення (6) при $i=4$ та (7) при $j=8$ на всю додатну піввісь $0\le r<+\infty$. Для цього введемо дві невідомі функції $x(r)$ та $y(r)$:

$$B\int_0^\infty \alpha^5\left[C_5(\alpha)Q_4(\alpha)+D_5(\alpha)R_4(\alpha)\right]J_0(r\alpha)\,d\alpha=$$

$$=k_4T_0^{(4)}\left[\eta(r-c_1)+x(r)\eta(c_1-r)\right],\ \ 0\le r<+\infty; \qquad (8)$$

$$B\int_0^\infty \alpha^5\left[C_5(\alpha)Q_8(\alpha)-D_5(\alpha)R_8(\alpha)\right]J_0(r\alpha)\,d\alpha=$$

$$=-k_8T_0^{(8)}\left[\eta(r-c_2)+y(r)\eta(c_2-r)\right],\ \ 0\le r<+\infty. \qquad (9)$$

Тут $\eta(x)$ – функція Гевісайда.

Виберемо невідомі функції у вигляді відрізків ряду:

$$x(r)=1+\sum_{n=1}^{N}a_nJ_0\left(\frac{r}{c_1}\gamma_n\right),\ 0\le r<c_1;\ y(r)=1+\sum_{n=1}^{N}b_nJ_0\left(\frac{r}{c_2}\gamma_n\right),\ 0\le r<c_2, \qquad (10)$$

де γ_n – додатні корені рівняння $J_0(x)=0$; a_n та b_n – невідомі коефіцієнти.

Застосовуючи до співвідношення (8) та (9) формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля, отримаємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій $C_5(\alpha)$ та $D_5(\alpha)$. Розв'язавши отриману систему, будемо мати:

$$C_5(\alpha)=\frac{R_8(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}X^{(T)}(\alpha)+\frac{R_4(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}Y^{(T)}(\alpha),$$

$$D_5(\alpha)=\frac{Q_8(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}X^{(T)}(\alpha)-\frac{Q_4(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}Y^{(T)}(\alpha), \qquad (11)$$

$$X^{(T)}(\alpha)=\frac{k_4T_0^{(4)}}{B\alpha^5}\left[\delta(\alpha)-\sum_{n=1}^{N}a_n\gamma_nJ_1(\gamma_n)c_1^2\frac{\alpha J_0(c_1\alpha)}{(c_1\alpha)^2-\gamma_n^2}\right],$$

$$Y^{(T)}(\alpha)=-\frac{k_8T_0^{(8)}}{B\alpha^5}\left[\delta(\alpha)-\sum_{n=1}^{N}b_n\gamma_nJ_1(\gamma_n)c_2^2\frac{\alpha J_0(c_2\alpha)}{(c_2\alpha)^2-\gamma_n^2}\right].$$

Тут $\Delta_0(\alpha)=Q_4(\alpha)R_8(\alpha)+Q_8(\alpha)R_4(\alpha)$, $\delta(\alpha)$ – дельта функція Дірака.

Коефіцієнти розкладу (10) будемо шукати, вимагаючи виконання співвідношень (6) при $i=\overline{1,3}$, та (7) при $j=\overline{5,7}$. Помноживши їх обидві частини на $rJ_0(\gamma_q r)$, $q=\overline{1,N}$ і проінтегрувавши отримані співвідношення по r від 0 до c_1 та від 0 до c_2 відповідно, отримаємо систему відносно невідомих a_n та b_n.

За допомогою співвідношень (5) та (11) отримуємо функцію розподілу температури в шарі

© Г.В. Габрусєв

$$T(r,z)=-k_4T_0^{(4)}\sum_{n=1}^{N}a_n\gamma_nJ_1(\gamma_n)c_1^{\,2}\int_0^\infty K_1(\alpha,z)\frac{\alpha J_0(c_1\alpha)J_0(r\alpha)}{(c_1\alpha)^2-\gamma_n^2}d\alpha+$$

$$+k_8T_0^{(8)}\sum_{n=1}^{N}b_n\gamma_nJ_1(\gamma_n)c_2^{\,2}\int_0^\infty K_2(\alpha,z)\frac{\alpha J_0(c_2\alpha)J_0(r\alpha)}{(c_2\alpha)^2-\gamma_n^2}d\alpha+$$

$$+\frac{k_4T_0^{(4)}\left[k_8(z+h)+1\right]+k_8T_0^{(8)}\left[k_4(z-h)+1\right]}{2hk_4k_8+k_4+k_8},$$

\

$$K_1(\alpha,z)=\frac{R_8(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}sh(\mu_5\alpha z)+\frac{Q_8(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}ch(\mu_5\alpha z),$$

$$K_2(\alpha,z)=\frac{R_4(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}sh(\mu_5\alpha z)-\frac{Q_4(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}ch(\mu_5\alpha z).$$

Силова частина. Вимагаючи виконання граничних умов (3) отримаємо систему чотирьох лінійних рівнянь відносно невідомих $C_1(\alpha)$, $D_1(\alpha)$, $C_3(\alpha)$, $D_3(\alpha)$, розв'язавши яку матимемо:

$$C_1(\alpha)=-C_5(\alpha)\frac{\left(e^*\mu_5^2-d^*\right)}{\left(e^*\mu_1^2-d^*\right)}\frac{f(\mu_3,\mu_5,\alpha)}{f(\mu_3,\mu_1,\alpha)},\ C_3(\alpha)=-C_5(\alpha)\frac{\left(e^*\mu_5^2-d^*\right)}{\left(e^*\mu_3^2-d^*\right)}\frac{f(\mu_5,\mu_1,\alpha)}{f(\mu_3,\mu_1,\alpha)},$$

$$D_1(\alpha)=-D_5(\alpha)\frac{\left(e^*\mu_5^2-d^*\right)}{\left(e^*\mu_1^2-d^*\right)}\frac{\varphi(\mu_3,\mu_5,\alpha)}{\varphi(\mu_3,\mu_1,\alpha)},\ D_3(\alpha)=-D_5(\alpha)\frac{\left(e^*\mu_5^2-d^*\right)}{\left(e^*\mu_3^2-d^*\right)}\frac{\varphi(\mu_5,\mu_1,\alpha)}{\varphi(\mu_3,\mu_1,\alpha)},$$

$$f(\mu_i,\mu_j,\alpha)=\mu_i ch(\mu_i\alpha h)sh(\mu_j\alpha h)-\mu_j ch(\mu_j\alpha h)sh(\mu_i\alpha h),$$

$$\varphi(\mu_i,\mu_j,\alpha)=\mu_i sh(\mu_i\alpha h)ch(\mu_j\alpha h)-\mu_j sh(\mu_j\alpha h)ch(\mu_i\alpha h).$$

Використовуючи співвідношення (11), отримаємо формули для обчислення компонент тензора напружень:

$$\sigma_{zz}(r,z)=\frac{\beta\left(e^*\mu_5^{\,2}-d^*\right)}{(\mu_5^2-\mu_1^2)(\mu_5^2-\mu_3^2)}\times$$

$$\times\left[k_4T_0^{(4)}\sum_{n=1}^{N}a_n\gamma_nJ_1(\gamma_n)\int_0^\infty\left[\frac{R_8(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}F_1(\alpha,z)+\frac{Q_8(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}\Phi_1(\alpha,z)\right]\frac{c_1^2\alpha J_0(c_1\alpha)J_0(r\alpha)}{(c_1\alpha)^2-(\gamma_n)^2}d\alpha+\right.$$

$$\left.+k_8T_0^{(8)}\sum_{n=1}^{N}b_n\gamma_nJ_1(\gamma_n)\int_0^\infty\left[\frac{R_4(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}F_1(\alpha,z)-\frac{Q_4(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}\Phi_1(\alpha,z)\right]\frac{c_2^2\alpha J_0(c_2\alpha)J_0(r\alpha)}{(c_2\alpha)^2-(\gamma_n)^2}d\alpha\right],$$

$$\sigma_{rz}(r,z)=-\frac{\beta\left(e^*\mu_5^{\,2}-d^*\right)}{(\mu_5^2-\mu_1^2)(\mu_5^2-\mu_3^2)}\times$$

$$\times\left[k_4T_0^{(4)}\sum_{n=1}^{N}a_n\gamma_nJ_1(\gamma_n)\int_0^\infty\left[\frac{R_8(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}F_2(\alpha,z)+\frac{Q_8(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}\Phi_2(\alpha,z)\right]\frac{c_1^2\alpha J_0(c_1\alpha)J_0(r\alpha)}{(c_1\alpha)^2-(\gamma_n)^2}d\alpha+\right.$$

$$+k_8T_0^{(8)}\sum_{n=1}^{N}b_n\gamma_nJ_1(\gamma_n)\int_0^{\infty}\left[\frac{R_4(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}F_2(\alpha,z)-\frac{Q_4(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)}\Phi_2(\alpha,z)\right]\frac{c_2^2\alpha J_0(c_2\alpha)J_0(r\alpha)}{(c_2\alpha)^2-(\gamma_n)^2}d\alpha\Bigg],$$

$$F_1(\alpha,z)=sh(\mu_5z\alpha)-\frac{f(\mu_3,\mu_5,\alpha)}{f(\mu_3,\mu_1,\alpha)}sh(\mu_1z\alpha)-\frac{f(\mu_5,\mu_1,\alpha)}{f(\mu_3,\mu_1,\alpha)}sh(\mu_3z\alpha),$$

$$\Phi_1(\alpha,z)=ch(\mu_5z\alpha)-\frac{\varphi(\mu_3,\mu_5,\alpha)}{\varphi(\mu_3,\mu_1,\alpha)}ch(\mu_1z\alpha)-\frac{\varphi(\mu_5,\mu_1,\alpha)}{\varphi(\mu_3,\mu_1,\alpha)}ch(\mu_3z\alpha),$$

$$F_2(\alpha,z)=\mu_5ch(\mu_5z\alpha)-\frac{f(\mu_3,\mu_5,\alpha)}{f(\mu_3,\mu_1,\alpha)}\mu_1ch(\mu_1z\alpha)-\frac{f(\mu_5,\mu_1,\alpha)}{f(\mu_3,\mu_1,\alpha)}\mu_3ch(\mu_3z\alpha),$$

$$\Phi_2(\alpha,z)=\mu_5sh(\mu_5z\alpha)-\frac{\varphi(\mu_3,\mu_5,\alpha)}{\varphi(\mu_3,\mu_1,\alpha)}\mu_1sh(\mu_1z\alpha)-\frac{\varphi(\mu_5,\mu_1,\alpha)}{\varphi(\mu_3,\mu_1,\alpha)}\mu_3sh(\mu_3z\alpha).$$

Числові приклади. Проведемо дослідження впливу наявності стаціонарного температурного поля, яке діє на граничні площини шару, на величину та характер розподілу напружень та температури в шарі на прикладі трансверсально ізотропного магнію. Коефіцієнти μ_i, $i=1,3$, для даного матеріалу, мають такі значення: $\mu_1=1.388395$, $\mu_3=0.705194$.

Параметри температурного поля виберемо наступними:

$a_1=0.4, b_1=0.6, c_1=1, a_2=0.5,\ b_2=0.8,\ c_2=1, h=1, T_0=100;$

$k_1=k_3=1, k_4=5, k_2=k_5=k_6=k_7=k_8=0.01;$

$T_0^{(1)}=T_0^{(4)}=T_0^{(5)}=T_0^{(6)}=T_0^{(7)}=T_0^{(8)}=0.8\cdot T_0, T_0^{(2)}=T_0, T_0^{(3)}=0.1\cdot T_0.$

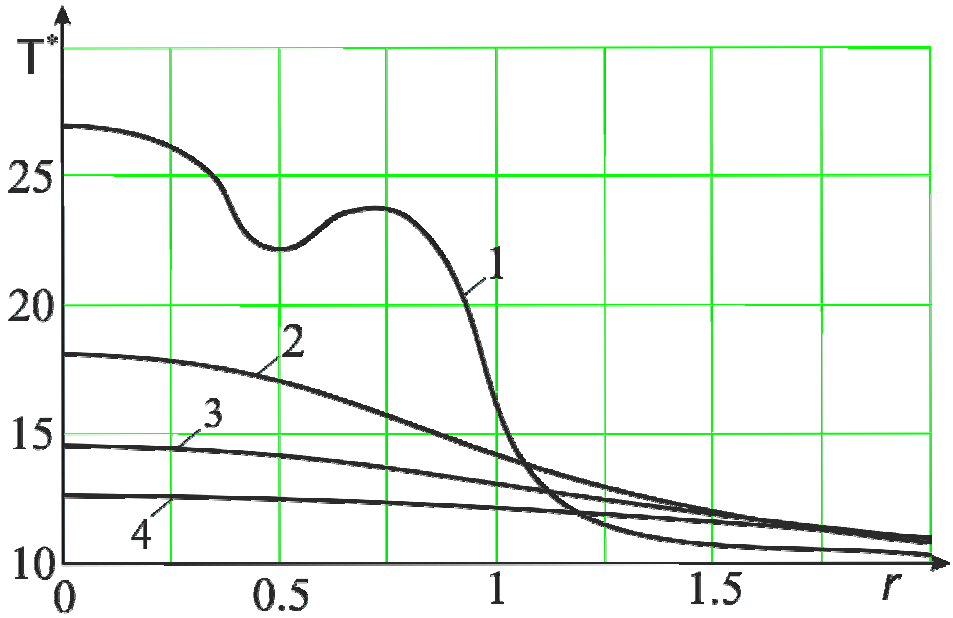

Рис. 2. **Розподіл температури в шарі**

На рис.2 зображено розподіл температури в шарі. Криві 1 та 4 відповідають верхній та нижній граничним площинам шару, 3 – серединній площині, а 2 – площині шару при $z=\frac{1}{2}h$.

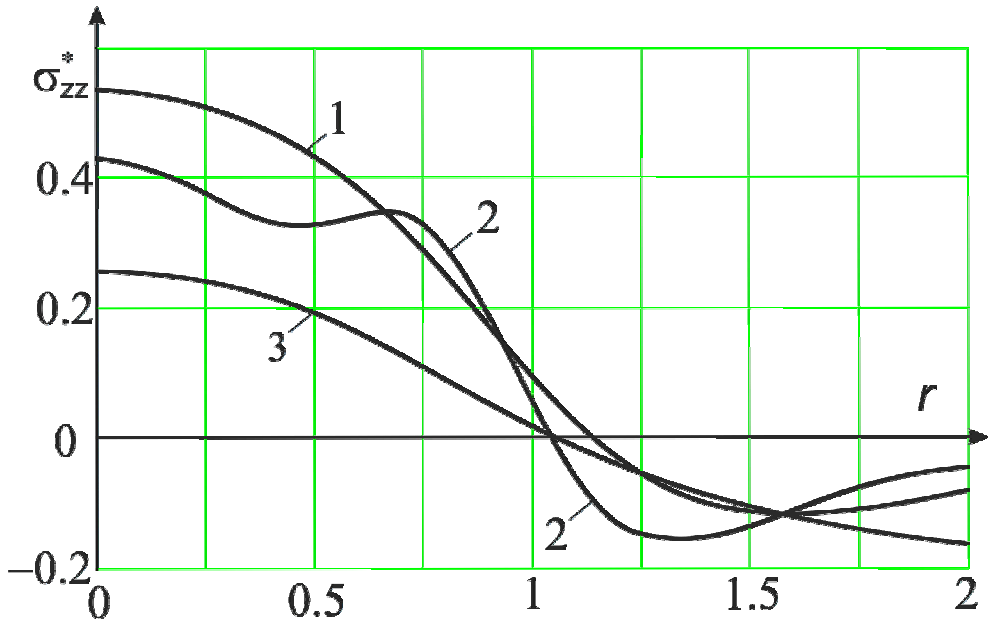

Рис. 3. **Розподіл напружень σ_{zz}^* в шарі**

На рис.3 зображено графік безрозмірної величини $\sigma_{zz}^* = \dfrac{(\mu_5^2-\mu_1^2)(\mu_5^2-\mu_3^2)}{\beta\left(e^*\mu_5{}^2-d^*\right)k_4T_0^{(4)}}\sigma_{zz}\left(r,z\right)$, що ілюструє розподіл нормальних напружень всередині шару. Крива 1 відповідає серединній площині шару, 2 та 3 – площинам шару при $z=\dfrac{1}{2}h$ та $z=-\dfrac{1}{2}h$ відповідно.

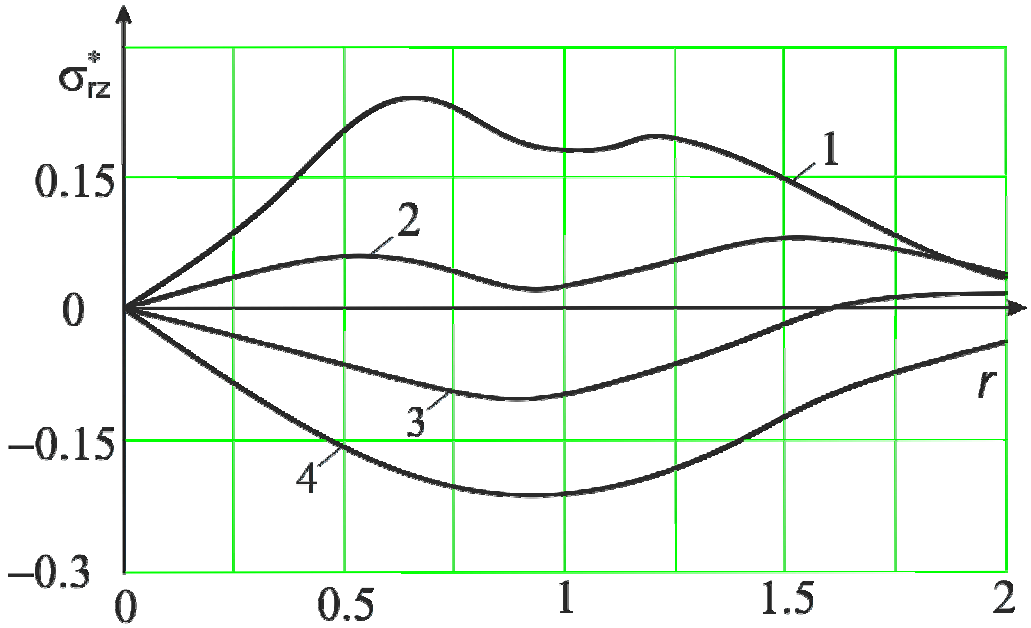

Рис. 4. **Розподіл напружень σ_{rz}^* в шарі**

На рис.4 зображено графік безрозмірної величини $\sigma_{rz}^* = \dfrac{(\mu_5^2-\mu_1^2)(\mu_5^2-\mu_3^2)}{\beta\left(e^*\mu_5{}^2-d^*\right)k_4T_0^{(4)}}\sigma_{rz}\left(r,z\right)$, що ілюструє розподіл дотичних напружень всередині шару. Крива 3 відповідає серединній площині шару, 1, 2 та 4 – площинам шару при $z=\dfrac{1}{2}h$, $z=\dfrac{1}{4}h$ та $z=-\dfrac{1}{2}h$ відповідно.

Висновки. Із проведених розрахунків випливає, що як різниця в температурних показниках, так і різниця в умовах теплового контакту значно впливають на напружений стан у шарі. Тому, температурні напруження, виникаючі при цьому, обов'язково потрібно враховувати при проведенні розрахунків на міцність.

Описаний алгоритм можна успішно застосовувати для розв'язання задач термопружності при різній кількості концентричних колових ліній розділу граничних умов на поверхні шару. Їх збільшення призведе лише до зміни рівнянь (6) – (7) і не вплине на складність подальших викладок. Характерною особливістю даної наближеної методики є те, що збільшення кількості доданків у співвідношеннях (10) приводить до підвищення точності одержаного наближення.

Враховуючи відносну простоту та можливість реалізації запропонованої методики на ПК, вважаю доцільним її використання при проведенні інженерних розрахунків.

1. Боли, Б. Теория температурных напряжений [Текст] / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – Мир, 1962.
2. Гриліцький, Д.В. Деякі випадки осесиметричної задачі термопружності для трасверсально ізотропного шару [Текст] / Д. В. Гриліцький, В. Г. Габрусєв, О. П. Піддубняк // Вісник ЛДУ, серія мех.-мат. – 1971. – № 6.
3. Кизыма, Я.М. Осесиметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости [Текст] / Я.М. Кизыма, Д.В. Грилицкий. – Львов : Изд-во при Львов. ун-те, 1981. – 136 с.
4. Максимович, В.Н. Численно-аналитические решения задачи термопластичности для локального нагрева пологих оболочек [Текст] / В.Н. Максимович, Л.В. Хомляк // Известия АН СССР. Механика тверд. тела. – 1988. – № 5. – С. 126–132.
5. Подстригач, Я.С. Неустановившееся температурные поля и напряжения в тонких пластинках [Текст] / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. – К. : Наукова думка, 1972. – 308 с.
6. Sinh H., Sinh A. Thermoelastic stresses in an anisotropic slab. Proc. Indian Acad. Sci., A. 171, №4, 1970.
7. Новацкий, В. Вопросы термоупругости [Текст] / В. Новацкий. – Изд-во АН СССР, 1962. – 365 с.
8. Снеддон, И.Н. Преобразования Фурье [Текст] / И.Н. Снеддон – М.: Изд-во ИЛ, 1955. – 668 с.

Стаття надійшла до редакції 11.03.2014.

© Г.В. Габрусєв