УДК 539.375

В.В.Божидарнік, В.М.Садівський
Луцький національний технічний університет

ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ГРАНИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ, ЩО ВИКЛИКАЮТЬ ЛОКАЛЬНЕ РУЙНУВАННЯ ПОБЛИЗУ ВЕРШИН ГОСТРОКІНЦЕВИХ ВИРІЗІВ В АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИНАХ

Розглядається задача про граничну рівновагу анізотропної пластини, що ослаблена початково розкритою тріщиною. Пластина розтягається на безконечності монотонно зростаючими зусиллями. Матеріал пластини має в кожній точці при взаємно перпендикулярній площини пружної і міцнісної симетрії. Визначається граничне навантаження, що викликає початковий ріст тріщини, а також напрямок початкового поширення тріщини.

Ключові слова: *анізотропія, гранична рівновага, напружено-деформований стан.*
Форм 4. Літ 25.

В.В. Божидарник, В.М. Садивский

О ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОГРАНИЧНЫХ НАГРУЗОК, КОТОРЫЕ ВЫЗОВУТ ЛОКАЛЬНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ОСТРОКОНЕЧНЫХ ВЫРЕЗОВ В АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНАХ

Рассматривается задача о предельном равновесии анизотропной пластины, которая ослаблена первоначально раскрытой трещиной. Пластина растягивается до бесконечности монотонно растущими усилиями. Материал пластины имеет в каждой точке при взаимно перпендикулярной плоскости упругой и прочностной симметрии. Определяется предельная нагрузка, вызывающая начальный рост трещины, а также направление первоначального распространения трещины.

Ключевые слова: *анизотропия, предельное равновесие, напряженно-деформированное состояние.*

V.Bozhidarnik, V.Sadivskyy

DETERMINATION OF THE MAXIMUM LOAD, PERFORMING LOCAL DESTRUCTION NEAR THE PEAKS OF POINTED INCLUSIONS IN ISOTROPIC PLATE

The task is examined about the border balance of anisotropic plate, broken originally with a crack. A plate stretches droningly to endlessness with increasing effort. Material of plate has three mutually perpendicular planes of resilient and strengthen symmetry in every point. Maximum effort is determined for initial growth of a crack and the direction of initial distribution of the crack.

An isotropic plate is examined which contains the resilient curvilinear inclusion with return points on the contour and stretches on endlessness mutually perpendicular droningly increasing efforts. The efforts for a crack near the return points are examined. Possibility of usage the methods of destruction mechanics is estimated to the calculation of fragile durability of compositions, consisting of matrix and pointed inclusion with other resilient properties.

Keywords: *anisotropy, limit equilibrium, the stress-strain state*.

Постановка проблеми.

На короткочасну і тривалу міцність композиційних матеріалів, що працюють в різних умовах навантаження, суттєвий вплив в першу чергу виявляють різного роду дефекти структури, такі як розриви волокон і розрихлення матриці, неповне зчеплення між матрицею і волокнами, поверхневі дефекти (подряпини, вм’ятини), а також спеціально створені концентратори напружень: отвори, вирізи, болтові з’єднання і т.д. Багато композиційних матеріалів і, зокрема, склотекстоліти, руйнуються крихко, тобто шляхом поширення тріщини. Причиною руйнування композиційних матеріалів також може бути неузгодженість фізико – хімічних і хімічних властивостей складових, що можуть привести до порушення адгезії, розшарування , появу тріщин, зон перед руйнування і т.д.

Оскільки добитися повної сумісності всіх компонентів композиційного матеріалу практично неможливо, оскільки неможливо створити абсолютно бездефектну матрицю чи волокна, то стає досить актуальним вести розрахунок на міцність композиційних матеріалів з позицій механіки крихкого руйнування.

Для успішного розв’язку таких задач необхідно володіти більш повними і точними відомостями про деформативні і міцнісні властивості композитів у реальних умовах їх експлуатацій: вплив статичних і циклічних навантажень, температурного поля, агресивних середовищ і т.д.

©В.В.Божидарнік, В.М.Садівський

Надалі при створенні нових композиційних матеріалів необхідно прагнути до того, щоб поряд з високою міцністю, тріщиностійкістю і більшим опором на зсув у трансверсальному напрямку вони мали також узгодженість полів напружень і деформацій із фізико–хімічними характеристиками.

Аналіз останніх досліджень та публікацій.

Основну роль у процесі, що передує руйнуванню, відіграє напружено-деформований стан в околі кутової точки (вершини) тріщини [1-5]. Поле напружень, що виникає в зоні вершини тріщини в однорідному ізотропному тілі, може бути виражене через зовнішнє навантаження, конфігурацію тіла і форму тріщини [1-5]. Розрахунок міцності анізотропних тіл з тріщинами за співвідношеннями механіки руйнування для ізотропного тіла в більшості випадків дає результати із великими похибками. В наявних оглядах по механіці руйнування руйнуванню анізотропних тіл з тріщинами присвячені тільки окремі абзаци, хоч такі дослідження представляють значний науковий і практичний інтерес в зв'язку із зростаючим застосуванням анізотропних матеріалів у народному господарстві. Для дальшого наближення розрахункової моделі до реальної у випадку матеріалів, які мають анізотропію пружних властивостей, розв'язувались задачі механіки руйнування для анізотропних тіл з тріщинами. При цьому використовувались методи теорії пружності анізотропного тіла, що розвинуті в роботі [6] і інших. Задача про прямолінійну тріщину-розріз у анізотропному середовищі вперше розглянута Стро [8] з допомогою енергетичного підходу. Підраховувалась енергія, що зв'язана з утворенням тріщини, досліджувалось поле напружень біля вершини тріщини. Однак, у зв'язку із складністю запропонованого підходу, у роботі не вдалось отримати кінцевий розв'язок задачі у явному вигляді. Енг і Вільямс [9] досліджували циліндричний згин і розтяг ортотропної пластини із тріщиною, розміщеною вздовж одного із головних напрямків пружності матеріалу. Зроблені висновки про вплив орторопії матеріалу на розподіл напружень в області вершини тріщини. Зазначимо, що отримані вирази для напружень мають досить громіздкий вигляд і спрощуються лише для площадок, нормалі до яких співпадають з осями центральної системи координат. Г. І. Баренблат і Г. П. Черепанов [10] розглядали задачу про рівновагу ізольованої прямолінійної тріщини, що співпадає із осями пружної симетрії в орторопному тілі. Досліджувалось також розклинювання тріщин тонким абсолютно жорстким безконечним клином із врахуванням сил кулонового тертя, зроблений важливий висновок про те, що модуль зчеплення (в'язкість руйнування) отротропного тіла залежить від орієнтації тріщини відносно головних напрямків пружності матеріалу. Е. П. Фельдман [11] досліджував питання про поширення тонкої напівбезконечної тріщини, паралельної границям анізотропної смуги скінченної ширини при зростанні зовнішнього навантаження, що прикладене до берегів тріщини. Показано, що при постійній зміні зовнішнього навантаження тріщина видовжується до деякого критичного значення, після чого відбувається миттєвий розрив смуги. Л.В.Гриліцький, Р. М. Луцишин [12] досліджували пружну рівновагу анізотропної пластини із впаяною круговою ізотропною шайбою і дугоподібною тріщиною-розрізом на лінії спаю під дією розтягуючих зусиль у безконечно віддалених точках пластини. Детально розглянуто випадок ортотропної пластини із абсолютно жорсткою круговою шайбою і розрізом вздовж лінії спаю.

Локальний розподіл напружень і переміщень поблизу тріщини в анізотропному тілі, що має у кожній точці площину пружної симетрії, вивчення швидкостей вивільнення пружної енергії і інші питання у найбільш загальному вигляді приведені у роботі Сі, Паріса, Ірвіна [13]. Зміна пружної енергії при просуванні тріщини знаходилась на її продовженні, тому обчислення критичного навантаження по цих результатах можливе тільки у деяких часткових випадках, оскільки поширення тріщини в анізотропному тілі не завжди співпадає з її початковим розміщенням навіть при навантаженні, нормальному до берегів тріщини. В роботі не проводились обчислення, які могли б характеризувати вплив анізотропії пружних властивостей матеріалу на локальний розподіл біля вершини тріщини. Такі обчислення і висновки для тріщини, розміщеної під деяким кутом до осей пружної симетрії в орторопному матеріалі, проведені у [14,15]. Суттєвим результатом робіт [5,13] є співвідношення, що дозволяють знаходити коефіцієнти інтенсивності напружень за одним відомим комплексним потенціалом напружень. В цих роботах досліджувався вплив анізотропії для тіл, краї яких достатньо віддалені від берегів тріщини.

Для практики представляє значний інтерес питання про те, як враховувати розміри виробу, а також питання про вплив анізотропії пружних властивостей матеріалу на напружено-

деформований стан обмеженого анізотропного тіла з тріщиною. Такі дослідження проводились авторами робіт [16,17]. Ганді [18] досліджував вплив орієнтації головних осей ортотропії матеріалу на коефіцієнти інтенсивності напружень біля прямолінійної тріщини, розміщеної під кутом до головних осей пружної симетрії в ортотропній смузі. А.І. Зобнін, Е.В. Ломакін [16] вивчали можливість використання коефіцієнтів інтенсивності в ізотропному тілі при обчисленні аналогічних величин в отропній смузі з прямолінійною тріщиною. Вони показали можливість застосування ізотропного К-тарирування навіть для сильно анізотропних матеріалів (деревина, вуглепластик).

Вище приведені роботи дали можливість значно покращити і спростити розрахункову модель для анізотропного матеріалу.

Невирішені частини проблеми.

Для оптимального використання ортотропних матеріалів у конструкціях необхідно мати методи оцінки несучої здатності елементів цих конструкцій із врахуванням ортотропії і дефектності матеріалу, оскільки звичайні методи розрахунку, що використовуються при оцінці міцності твердих тіл, в багатьох випадках виявляються грубими і незастосовними для аналізу і розрахунку суттєво ортотропних високоміцних структур. Анізотропію механічних властивостей матеріалу необхідно також врахувати при розрахунку несучої здатності виробів, виготовлених шляхом механічної обробки матеріалу (пресуванням, штампуванням, і. т. д) і деталей, що мають конструктивну анізотропію.

Метою роботи є визначення граничності навантаження, що викликає локальне руйнування анізотропної пластини з гострокінцевим вирізом.

Основні результати дослідження.

Розглянемо задачу про визначення граничної рівноваги анізотропної пластини, що містить розкриту тріщину довжини $2l$ і підлягає дії монотонно зростаючого навантаження на нескінченності. Обмежимося класом матеріалів, що мають у кожній точці три взаємно перпендикулярних площини пружної і міцнісної симетрії.

Для знаходження граничного навантаження, що викликає локальне руйнування ортотропної пластини з тріщиною, використаємо представлення [19,20], попередньо перетворивши їх у відповідності із руйнуванням ортотропних матеріалів. В принципі, ці критеріальні співвідношення також можна було б рекомендувати для оцінки початку поширення тріщини, що міститься в анізотропній пластині. Однак тут задача ускладнюється тим, що для значної більшості анізотропних матеріалів права частина залежить від кута β між заданим напрямком і напрямком мінімального опору матеріалу поширенню в ньому тріщини. Для матеріалів із пружною і міцнісною ортотропією кут початкового напрямку поширення тріщини і граничне навантаження визначаємо із співвідношень

$$\lim_{r\to 0}\left\{\left[\frac{\partial\sigma(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\,K(\beta)\right]\right\}=0, \tag{1}$$

$$\lim_{r\to 0}\left[\sigma(\theta,\varphi)-K(\beta)\right]=0, \tag{2}$$

$$(\beta=\theta+\varphi),$$

де α – кут нахилу зовнішнього навантаження до осі локальної системи координат; φ –кут нахилу тріщини до напрямку мінімального опору матеріалу тріщини (в нашому випадку він співпадає із напрямком максимальної жорсткості матеріалу). Слідуючи [21], ортотропні матеріали можна розділити на три групи за характером залежності модуля пружності і границі міцності від вибраного напрямку відносно головних осей матеріалу:

1) з випуклою кривою, 2) з монотонно спадаючою кривою, 3) із ввігнутою кривою.

На основі аналізу залежності границі міцності від орієнтації відносно головних осей пружності вираз для опору матеріалу поширенню тріщини представили так

$$\left[\sigma(\theta,\varphi)=\left[\frac{\sigma(\theta)}{\sigma(\beta)}\right]\right]^{\gamma}\sigma(\beta)\,\sigma(\theta)\,\sigma(\beta)\,\sigma(\theta)\,\sigma(\beta)\,\sigma(\theta)\,

$$K(\beta)=K(0)\sqrt{1+3\sin^2\beta\left[\frac{K(90)}{K(0)}-1\right]}, \qquad (4)$$

Де $K\left(0^\circ\right)$, $K\left(45^\circ\right)$, $K\left(90^\circ\right)$ – опір матеріалу поширенню тріщини (визначається із експерименту), при кутах $\beta=0,45,90^\circ$.

Відмітимо, що характер запропонованої залежності опору сильно анізотропного матеріалу поширенню в ньому тріщини від кута β (співвідношення (3)) дає краще узгодження із наявними експериментальними даними, ніж (4). Деяким його недоліком є необхідність визначення трьох експериментальних величин $K\left(0^\circ\right)$, $K\left(45^\circ\right)$, $K\left(90^\circ\right)$ в порівнянні із двома $K\left(0^\circ\right)$, $K\left(90^\circ\right)$ у (4). Кінцевий вигляд функції К(β) повинен визначатись відповідними експериментальними результатами. На даному етапі, коли вивчення залежності K від β тільки починається, співвідношення типу (3), (4) можуть служити лише для якісної оцінки міцності розглядуваного класу анізотропних конструкційних матеріалів.

Із (2) можна визначити граничне навантаження, необхідне для того, щоб привести тріщину у стан граничної рівноваги. Для визначення границь, в яких можлива заміна анізотропної лівої частини (2) на ізотропну, а також для можливості заміни правої частини (2) постійною величиною, нами проведені обчислення у випадках, коли:

а) матеріал пластини анізотропний по пружних і міцнісних властивостях;

б) матеріал пластини анізотропний по пружних властивостях і анізотропний по міцнісних;

в) матеріал пластини анізотропний по пружних і ізотропний по міцнісних властивостях.

Із результатів обчислень випливає, що для ортотропних матеріалів при $\sqrt{\frac{E_x}{E_y}}\le 2$ симетрична частина напруження σ_θ досягає максимального значення при $\theta=0^\circ$. Із результатів обчислень по співвідношенню (3) можна зробити висновок, що для близьких між собою значень К(45°) і К(0°), (тобто для сильно ортотропних матеріалів) існує проміжок кута β, для якого вираз К(β) практично постійний і тоді співвідношення для ізотропних пластин значно спрощується. Встановлено, що при $\sqrt{\frac{E_x}{E_y}}>4$ вираз для σ_θ у лівій частині (1), (2) повинен братись по анізотропних формулах, оскільки ізотропне значення σ_θ приводить до значних похибок.

Із обчислень граничного навантаження зроблено висновок, що при розтязі пластин перпендикулярно лінії, що проходить через вершини мало розкритої тріщини, незалежно від орієнтації тріщини відносно головних напрямків пружності матеріалу, тріщину можна вважати математичним розрізом нульового розкриття. При розтязі пластини під кутом до розкритої тріщини необхідно користуватись більш повним розв'язком, що враховує вплив анізотропії матеріалу і конфігурацію дефекту. Відмітимо, що вирази (1),(2) не враховують вклад дотичних напружень у розвиток руйнування, оскільки в напрямку, що визначається в (2), в анізотропній пластині з тріщиною, на відміну від ізотропної пластини, діє дотичне напруження.

Перспективи наступних досліджень.

Надалі для врахування вкладу дотичних напружень можливі дослідження критичного значення локальної енергії деформації, по досягненні якої почнеться зародження вторинної тріщини. Такі дослідження можна провести для різних випадків пружної і міцнісної анізотропії.

1. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев. Наукова думка, - 1968., - 246 с.
2. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения. – М.: Наука, 1974. - 416 с.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1974. – Т.2. - 584 с.
4. Си, Парис, Эрдоган. Коэффициенты концентрации напряжений у вершины трещины при плоском растяжении и изгибе пластин. – Прикладная механика, 1962, сер. Е, 12. - С.101-108.

©В.В.Божидарнік, В.М.Садівський

5. Черепанов Г.П., Кочаров Р.С., Соткилава О.В. Параболическое включение в упругой плоскости. – Труды Московск.горного ин-та, 1975. - С. 36-46.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость, колебания. – М.: Наука, 1967.- 268 с.
7. Ашкенази Е.К., Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов. – Л.: Машиностроение, – 1968.- 268 с.
8. Stroh A.N. Disclocations and cracks in anisotropic elasticity. – Philosophical Magazine, 1958, t.3,30, p.625-646.
9. Энг Д.Д., Вильямс М.Л. Сложные напряжения в ортотропной пластине, имеющей конечную трещину. – Прикладная механика. , сер. Е. -1961, Т. 28, -3, с.58-66.
10. Баренблатт Т.И., Черепанов Г.П. О хрупких трещинах продольного сдвига. – Прикладная механика и математика. – 1961, Т.25., -6. - С.1110-1119.
11. Фельдман Э.П. Распространение трещин и двойников вдоль анизотропной полосы. – Журнал прикладной механики и технической физики. – 1967.-5. - С.134-139.
12. Гриліцький Д.В., Луцишин Р.М. Пружна рівновага анізотропної пластинки з впаяною ізотропною шайбою при наявності розрізу на спаї. – Вісник Львівськ.ун-ту, сер. механ.-матем. – 1969, -4 - С.70-78.
13. Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. – Internat.journal of fracture mechanics. – 1965. t.1.p.189-203.
14. Ярема С.Я., Крестин Г.С. Распределение напряжений у вершины трещины в анизотропной пластине. – Физико-химическая механика материалов. – 1969. - Т.6. - С.714-719.
15. Cook T.S., Rau C.A. A critical review of anisotropic fracture mechanics. Prospects of fracture mechanics. -1974. – p.509-523.
16. Зобнин А.И., Ломакин Е.В. Центральная поперечная трещина в ортотропной упругой полосе. – Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1974. -1. – С.44-51.
17. Walsh P.P. Linear fracture mechanics in orthotropic materials. – Engineering fracture mechanics. – 1972. -3. p.533-541.
18. Gandhi K.R. Analysis of an inclined crack centrally placed in an orthotropic rectangular plate. Journal of strain analysis. – 1972. -3.p.157-162.
19. Бережницкий Л.Т., Труш И.И К построению критерия хрупкого разрушения горных пород при двухосном напряженном состоянии. «Термические методы разрушения горных пород», Киев, «Наукова думка», 1972, 2, с. 89-92.
20. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Труш И.И. «О локальном разрушении хрупкого тела с остроконечными жесткими включениями». Проблемы прочности, 1973, 10, с. 8-11.
21. Каминский А.А. «Определение критических нагрузок, вызывающих развитие расширенных трещин». Прикладная механика, 1966, 2, 11, с.63-67.
22. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, «Наукова думка». 1968, 246 с.
23. Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т. К вопросу о предельном равновесии пластин с острыми концентраторами напряжений. «Физико-химическая механика материалов, 1968, с. 10-15.
24. Ивлев Д.Д. О теории трещин квазихрупкого разрушения. «Журнал прикладной математики и технической физики», 1967, 6,с. 88-128.
25. Партон В.З., Морозов Е.И. «Механика упруго-пластического разрушения», Москва, «Наука», 1974, 416 с.

Стаття надійшла до редакції 28.03.2014

©В.В.Божидарнік, В.М.Садівський