

УДК 624.012.45+624.2/.8

**В.Г.Кваша, В.К.Шиндер, В.В.Волоцюга, Ю.В.Шиндер**  
НУ "Львівська політехніка"

### **СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНИЙ АНАЛІЗ НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ ПРОСТОРОВОЇ ЗАЛІЗОБЕТОННОЇ ПЛИТНО-РЕБРИСТОЇ МОСТОВОЇ СИСТЕМИ**

*Розглянуто питання оцінки несучої здатності при розрахунку методом кінцевих елементів. Виконано моделювання і розрахунок при трьох схемах навантаження просторової роботи залізобетонної плитно-ребристої мостової системи за типовим проектом у програмному комплексі Femap with NX Nastran.*

**Ключові слова:** метод кінцевих елементів, несуча здатність, залізобетон, міст, Femap NX Nastran.

*Табл. 1. Рис. 5. Літ. 20.*

**В.Г.Кваша, В.К.Шиндер, В.В.Волоцюга, Ю.В.Шиндер**

### **КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТНО-РЕБРИСТОЙ МОСТОВОЙ СИСТЕМЫ**

*Рассмотрен вопрос оценки несущей способности при расчете методом конечных элементов. Выполнено моделирование и расчет для трех схем нагрузки пространственной работы железобетонной плитно-ребристой мостовой системы за типовым проектом в программном комплексе Femap with NX Nastran.*

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, несущая способность, железобетон, мост, Femap NX Nastran.

**V.Kvasha, V.Shynder, V.Volotsiuga, Yu.Shynder**

### **FINITE ELEMENT ANALYSIS OF CARRYING CAPACITY OF SPATIAL REINFORCED CONCRETE PLATE-RIBBED BRIDGE SYSTEMS**

*According to "DerzhdorNDI" and "Ukrautodor" today in Ukraine exploited more than 16000 highway bridges with total length more than 300 kilometers and more than 7000 railway bridges. In the Concept of the State economic development program of public roads in the years 2013-2018 (adopted by the Cabinet Ministers of Ukraine dated September 3, 2012), marked problem connected with dangerous condition of bridges. Most of these bridges (about 65 percent) were built before 1970 according to current standards at that time. Today, more than 9000 bridges do not meet the technical parameters of the requirements of modern standards and actual load.*

*This article describes the role of the finite element method (FEM) in the study of spatial reinforced concrete plate-ribbed bridge systems. In this article has been suggested the use of the software package Femap-Nastran NX for calculations and analysis of reinforced concrete bridges using the finite elements method. The use of such package of the finite element analysis has several advantages, among which is ability to create models which are at the most close to the real conditions. Herein has also been performed the spatial static elastic calculation of reinforced concrete plate-ribbed bridge system from on a standard project in Femap-Nastran NX. Finite element model of the plate-ribbed bridge system with the boundary conditions and the conditions of the analysis prepared in environment of Femap, the calculation was performed in NX Nastran, and then results have been documented among Femap. Deflections obtained in the experiment and numerical simulations are presented in the form of diagrams. Of the presented diagram shows that the distribution of deflections in the numerical simulation is similar to experimental and is not linear.*

**Keywords:** Finite Element Method, carrying capacity, reinforced concrete, bridges, Femap, NX Nastran.

**Вступ. Постановка проблеми.** У Концепції Державної цільової економічної програми розвитку автомобільних доріг загального користування на 2013-2018 роки (схвалено розпорядженням Кабінету Міністрів України від 3 вересня 2012 р. №719-р, витяг з протоколу №67 засідання Кабінету Міністрів України від 3 вересня 2012 року) відзначається гостра проблема, пов'язана із станом мостів та шляхопроводів, що є невід'ємною складовою мережі автомобільних доріг, більшість з яких (близько 65%) побудовано до 1970 року за діючими на той час нормативами. На сьогодні понад 9500 мостів та шляхопроводів не відповідають за технічними параметрами вимогам сучасних норм і фактичному навантаженню. За даними «ДерждорНДІ» та «Укравтодор» на сьогодні в Україні експлуатується більше 16 тисяч автодорожніх мостів загальною довжиною більше 380 км та більше 7,5 тисяч залізничних мостів. Навантаження та інтенсивність руху транспортних засобів постійно зростає. В аналогічних умовах знаходяться численні залізобетонні конструкції естакад різного призначення, що експлуатуються вже тривалий час на технологічних маршрутах різних підприємств. Тому, необхідно об'єктивно оцінювати їх несучу здатність, прогнозувати подальший розвиток таких пошкоджень і напружено-деформований стан.

Залізобетонні плитно-ребристі мостові системи є одними з таких, які найчастіше застосовуються у мостобудуванні, складаючи більшість серед тих, які експлуатуються і тих, які будуються. Залізобетонні мости складають орієнтовно 93% загальної кількості автодорожніх мостів. В умовах експлуатації тимчасове навантаження може займати різне розрахункове розташування на спорудах, у зв'язку з цим, просторові розрахунки залізобетонних плитно-ребристих систем є затребуваними і розвинутими в області проектування і дослідження мостових споруд і інших промислових та цивільних конструкцій. Такі розрахунки базуються на числових методах будівельної механіки і теорії пружності. Останнім часом все ширшого застосування знаходить для подібних розрахунків і метод кінцевих елементів (МКЕ), особливо у поєднанні з сучасними обчислювальними комплексами. На даному етапі, МКЕ активно використовується для розрахунку мостових конструкцій, та все ж, розрахунок конструкцій із залізобетону досі викликає складності. Насамперед це пов'язано з врахуванням фізичних особливостей залізобетону, як складного композитного матеріалу, адже бетон має різні міцнісні характеристики при розтягу та стиску, в процесі експлуатації в ньому виникають тріщини (що викликає перерозподіл зусиль), окремої уваги потребує спільна робота арматури з бетоном тощо.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Залізобетон, як один з найбільш поширених будівельних матеріалів, являє собою композиційний матеріал, що складається з в'язучих і наповнювачів, одним з яких є арматура. Коефіцієнт варіації міцності заводського бетону може коливатися в межах 0.047...0.120 з моменту виготовлення, до 0.082...0.22 в процесі експлуатації [15], при тому, що міцнісні і деформаційні характеристики арматури в процесі експлуатації довгий час залишаються достатньо стабільними. Головною причиною змінності характеристик бетону є особливість його структури. Мінливість розподілу міцності і деформативності бетону у різних напрямках простору дає підстави відносити його до матеріалів з природньою анізотропією [8].

Побудова теоретичної моделі залізобетону складна і тим, що окрім анізотропії бетон – пружно-пластичний матеріал, що характеризується нелінійною залежністю між напруженнями і деформаціями, а також різною механічною поведінкою при стиску і розтягу. Перші систематичні дослідження фізичної не лінійності залізобетону описані в працях А.Ф.Лолейта [9] і В.І.Мурашова [10] при розробці методики розрахунку залізобетонних згинальних елементів по міцності і жорсткості. Історично так склалося, що відсутність достатньої кількості експериментальних даних про характер взаємодії «напруження – деформації» для різних видів бетону і режимів навантаження призвело до використання так чи інакше ідеалізованого виду закону деформування бетону і спроб сформувати еталонні чи узагальнені діаграми, наприклад [7] і ін.

Іншою особливістю залізобетону є так званий ефект проковзування арматури, який широко вивчався і досі досліджується. З приростом розтягуючих зусиль в залізобетонному елементі в околі арматури утворюються і розвиваються внутрішні тріщини, через що частина площі бетону (в поперечному перерізі) виключається з роботи і викликає ріст напружень в арматурі до моменту виходу тріщин на поверхню.

Аналіз експериментальних досліджень натурних конструкцій прольотних будов після десятків років їх активної експлуатації показує, що реальний просторовий розподіл зусиль між балками в пружно-пластичній стадії роботи є іншим ніж у пружній стадії. Іноді виявляється “прихований” резерв несучої здатності конструкцій прольотних будов за рахунок певних особливостей [3] і ін. Будь-який залізобетонний елемент, це складна композитна конструкція, в якій при її експлуатації відбувається багато різних по механізму і природі процесів. Все це робить залізобетонні мости складним фізичним об'єктом для математичного опису, особливо при просторовому розрахунку [4].

Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. в сімдесятих роках розробили деформаційну теорію пластичності бетону і залізобетону [6], де припускається, що розміри тіла великі у порівнянні з арматурними стержнями, тим самим нехтуючи місцевим напруженням контакту арматури з бетоном, і що арматура сприймає лише нормальні напруження. Умовою спільної роботи двох середовищ є рівність їх деформацій. Компоненти тензора напружень сумуються із напружень в бетоні і напружень в арматурі, а тріщини утворюються вздовж площадок, на яких головні розтягуючі зусилля перебільшують границю міцності бетону на розтяг. Серед інших, вказана теорія застосовується при комп'ютерному моделюванні спільної роботи арматури з бетоном в наші дні, якщо це не впливає суттєво на очікуваний результат. Досліди Крилова С.М., Карпенко Н.І. і інших показали, що така модель (як і деякі інші) відповідає дійсності лише в тих випадках, коли тріщини проходять перпендикулярно до напрямку осі арматури. В областях з похилими

тріщинами до осі арматури, вона призводить до суттєвого зниження напружень в арматурі у зв'язку з не врахуванням багатьох факторів.

**Метод кінцевих елементів та його роль.** Порівняно донедавна, вихідні моделі матеріалу не могли бути реалізованими, оскільки потребували вирішення громіздких систем диференціальних рівнянь, а в загальному вигляді ці рівняння, як правило, не мали рішення. З цієї причини, основна частина просторових залізобетонних конструкцій розраховувалася методами лінійної теорії пружності з використанням наближених аналітичних розв'язків.

В останні десятиліття, з появою сучасних високопродуктивних обчислювальних комплексів і потужної комп'ютерної техніки, стало можливим вирішення задач з складними розрахунковими моделями числовими методами. Тут актуальним є питання вибору ефективного і раціонального методу розрахунку. Історично так склалося, що основним методом розрахунку залізобетонних прогонових споруд з врахуванням реальних властивостей матеріалів був метод кінцевих різниць. Але з часом ширшого застосування набув метод кінцевих елементів (МКЕ), який на сьогодні є основним методом розрахунку складних конструкцій.

До переваг МКЕ відносять:

- Можливість звести задачу до системи алгебраїчних рівнянь, без попереднього формулювання їх диференціальних аналогів;

- Процедури МКЕ стандартні і не залежать від розмірності і типу використовуваних кінцевих елементів, що дозволяє створювати програмні комплекси (ПК) для розрахунку конструкцій широкого застосування;

- Дозволяє використовувати елементи різних форм і розмірів для отримання сіткових розбивок будь-яких нерегулярних областей, навантаження і граничні умови можуть мати довільний характер.

- У поєднанні з сучасними обчислювальними комплексами допускає використання моделей матеріалів будь-якої складності;

- При застосуванні МКЕ до розрахунку залізобетонних конструкцій, він відіграє роль не лише чисельного методу аналізу, але й служить інструментом моделювання.

Суттєвим недоліком МКЕ є те, що апроксимація шуканих функцій являється середньо-інтегральною. Це призводить до втрати точності на границі конструкції.

Вперше кінцево-елементний аналіз залізобетонної конструкції був виконаний авторами Ngo D., Scordelis A.C. [18]. Бетон моделювався трикутними кінцевими елементами з лінійно пружного ізотропного матеріалу. Арматура представлялася стержневими кінцевими елементами. У спільних вузлах стержневі і плоскі елементи деформувалися однаково. Nilsen A.B. [19] використовував додаткові зв'язкові кінцеві елементи між бетоном і арматурою, що імітували сили зчеплення.

Теорія і питання практичної реалізації МКЕ відображені в працях вчених, серед яких В.Г. Баженов, А.І. Лантух-Лященко, М.В. Белый, А.М. Белостоцкий, Д.Б. Бирюков, А.С. Городецький, А.Б. Золотов, В.Е. Левин, А.В. Перельмутер, В.И. Прокопьев, А.С. Сахаров, В.А. Семенов, В.И. Сливкер, Н.Н. Шапошников, К. Бате, Е. Вилсон, J.H. Argyris, R.D. Cook, M.A. Crisfield та багато інших.

В багатьох подальших дослідженнях застосовувалися однотипні кінцеві елементи, що склалися з комплексного, нелінійного анізотропного матеріалу – залізобетону. Основні залежності для елементів отримувалися на основі механіки композитних матеріалів, а питання про спільну роботу бетону і арматури на стадіях до і після утворення тріщин вирішувався при формуванні матриць пружності або жорсткості залізобетонних елементів. Серед інших, моделюванню роботи арматури з бетоном на основі МКЕ присвячені праці Н.И.Карпенко [7]. Проте, існуючі моделі деформування залізобетону справедливі, як правило, для простого пропорційного навантаження. Питання тріщиноутворення, розвантаження, закриття тріщин і інші потребують додаткових досліджень.

Таким чином, сьогодні МКЕ є універсальним засобом аналізу конструкцій, який зайняв ведучу позицію, поступово витіснивши інші чисельні методи. Пакети програм, що реалізують цей метод відіграють найважливішу роль серед багаточисельних САД/САМ/САЕ програм. До найбільш поширених, таких пакетів відносяться Ansys, Nastran, Marc, Fem Models, Impact, ScadSoft, CosmosWorks, Scad, Samcef, Zebulon, Lira, Диана, Рипак, Abaqus, Comsol Multiphysics, Robot та багато інших.

**Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми.** Крім наведених, свого роду універсальних, програм, на сьогодні є окремі спеціалізовані програми, які дають змогу провести окремі види розрахунків прогонових споруд з врахуванням деяких дефектів. Їх позитивною стороною є швидкість розрахунку типових прогонових будов з нормальним розташуванням балок. Але такі програми не дозволяють виконувати просторові розрахунки прогонових споруд, які складаються з балок з різними або з змінними по довжині розмірами поперечних перерізів. Тому, застосування універсальних ПК які реалізують МКЕ для розрахунку залізобетонних просторових плитно-ребристих мостових систем є актуальним.

**Метою** даної роботи є аналіз несучої здатності просторової залізобетонної плитно-ребристої мостової системи, змодельованої та порахованої методом кінцевих елементів за допомогою універсального сучасного програмного комплексу.

**Виклад основного матеріалу.** Для реалізації поставленої задачі було вибрано сучасний програмний комплекс Femap з вбудованим вирішувачем NX Nastran. Femap має всі інструменти, які необхідні для підготовки до проведення повного циклу обчислень в іншій частині ПК – NX Nastran, а також для проведення операцій імпорту (експорту) як геометричних моделей, так і всього проекту в цілому з інших програм (або в інші програми) аналогічного призначення (Abaqus, Algor, Ansys, Caefem, Genesis, Ls-Dyna3D, MARC, Patran, Cosmos та інші) [11]. Femap (від Finite Element Modeling And Postprocessing) є середовищем для підготовки кінцево-елементних моделей конструкцій і відповідних крайових задач для подальшого їх розрахунку (Finite Element Modeling, пре-процесор), а також для перегляду і документування результатів розрахунку (Post-processing, пост-процесор).

З допомогою Femap можна підготувати для NX Nastran, серед інших, крайові задачі лінійного або нелінійного статичного пружного стану, статичного пластичного стану, повзучості, контактного аналізу, оптимізації конструкцій і інші. Конструкція (чи середовище) може бути апроксимована різними кінцевими елементами: одно-, дво- і трьохвимірних з різними властивостями, з різних матеріалів, характеристики яких можуть залежати від температури, швидкості деформування тощо.

Femap with NX Nastran набуває стрімкого поширення в інженерній практиці завдяки простоті і універсальності, можливості роботи на персональних комп'ютерах. Але, на сьогодні описаних прикладів моделювання та розрахунку залізобетонних конструкцій в Femap with NX Nastran є обмаль, серед них [1,2,14,16,20].

Для скінченно-елементного аналізу просторової залізобетонної плитно-ребристої мостової системи, розглянемо прогонову будову моста за типовим проектом споруд на автомобільних дорогах випуску 56д (вип. 56д – доповнення 1962р.) [13]. Прикладом такої будови, яка на даний момент знаходиться в експлуатації є існуючий залізобетонний міст через ущелину на км 51+005 автомобільної дороги державного значення Татарів – Кам'янець-Подільський, збудований орієнтовно в 1965-66 роках за балковою, розрізною, трьох прольотною схемою з габаритом Г-7+2×0,75м, загальною довжиною 48,4м [5].

В поперечному перерізі прольотна будова складена з п'яти монолітних бездіафрагмових балок, об'єднаних поперек прольоту в просторову систему монолітною залізобетонною плитою мостового полотна з крайніми консольними ділянками, на яких розташовані рамні тротуарні блоки підвищеного типу за ТП вип.56д. Крок балок поперек прольоту 1,7м, що є близьким до проектного 1,66м. Ребра балок армовані двома зварними каркасами з поздовжньою робочою арматурою періодичного профілю Ø32мм класу А-III з багаторядовим розміщенням по висоті. Поперечне армування відігнутими стержнями і хомутами з арматури Ø8мм класу А-I. Проектна марка бетону М300 (В22,5).

Вказаний міст віднесений до категорії об'єктів експериментальної реконструкції. Проводилося детальне експериментальне дослідження особливостей його роботи до і після реконструкції. Випробовували прольотну будову статичним навантаженням крайнього прольоту. Метою експериментальних досліджень було виявлення дійсного напружено-деформованого стану елементів прольотної будови, характеру її просторової роботи і розподілу тимчасового навантаження між балками до реконструкції та після. За характером розподілу прогинів між балками встановлювали закономірності просторової роботи прольотної будови. Існуючу прольотну будову випробовували після видалення всіх елементів мостового полотна при мінімальному постійному навантаженні, тому і при моделюванні покриття не враховувалося.

В ПК Femap with NX Nastran змодельована прогонова будова крайнього прольоту за типовим проектом і навантажено її за схемами, аналогічними до тих, які проводилися експериментально. До реконструкції прольотну будову випробовували за трьома схемами [5]:

а) один трьохвісний автомобіль КрАЗ максимально наближений почергово до осі (тиск на передню вісь 45,5кН, на задні осі візка по 92,3кН), рис.1а;

б) ще один трьохвісний автомобіль КрАЗ паралельно до першого в другий ряд, рис.1б;

в) ще два двовісні автомобілі МАЗ (тиск на передню вісь 53,8кН, на задню 100кН) зведені впритул задніми бортами до перших у дві колони, рис.1в;

Кінцево-елементна модель прогону з граничними умовами і умовами аналізу готувалася в середовищі Femap. Розрахунок виконувався в NX Nastran, далі результати візуалізувалися і документувалися в середовищі Femap. Процес моделювання і розрахунку залізобетонної конструкції виконувався з врахуванням особливостей описаних в [20], а також керуючись рекомендаціями та інструкціями наведеними в [12,17].

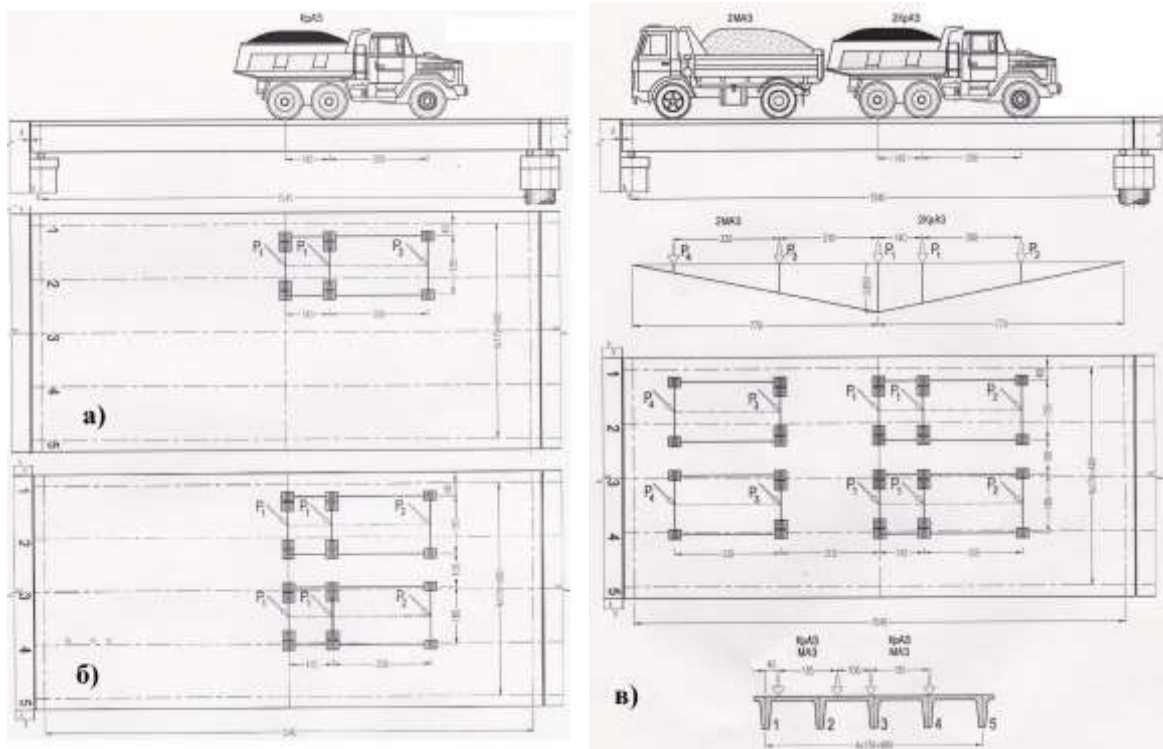


Рис.1. Схеми навантаження прогонової споруди

Залізобетон, як складний композитний матеріал, змодельовано за рахунок задання двох різних матеріалів (бетону і арматури) і різних відповідних властивостей (properties) кінцевих елементів, а саме: KE типу Solid для моделювання бетону, як об'ємного тіла і балочного KE типу Beam для арматури. Об'ємний елемент Solid являється трьохвимірним елементом суцільного середовища, використовувався у формі лінійних гексаєдрів. Узагальнений елемент балки Beam являється одно осевим елементом, що працює на розтяг, стиск, кручення, поперечний зсув і згин. Важливим моментом є забезпечення спільної їх роботи, що реалізовувалося за рахунок об'єднання відповідних вузлів. Арматурний каркас моделювався як суцільний зварний, що виключає необхідність накладати додаткові в'язі на арматурні стержні проти повороту навколо власної осі. Під час моделювання враховано лише основну робочу арматуру. Вільне обпирання виконано у виді шарнірно-нерухомої та шарнірно-рухомої опор. Навантаження імітувалось рівномірно розподіленим тиском на площі контакту колеса з поверхнею конструкції. Отримана кінцево-елементна модель показана на рис.2.

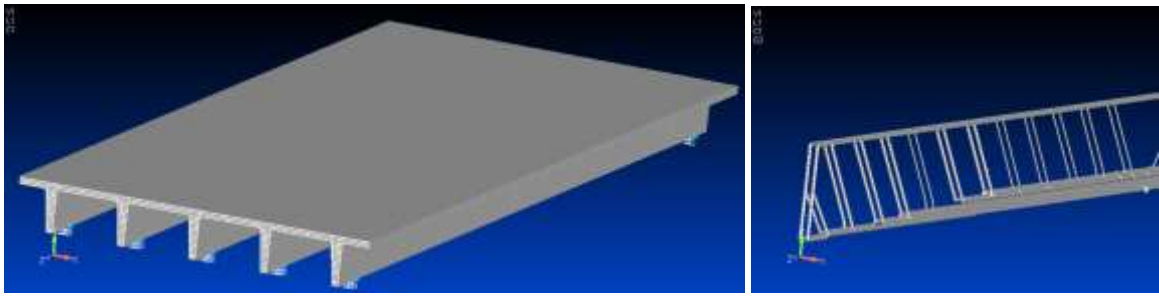


Рис.2. Тривимірна кінцево-елементна модель прогону та арматурного каркасу балки

Для отриманої моделі проведено статичний пружний розрахунок при трьох випадках навантаження. Отримані результати наведені на рис.3 і рис.4.

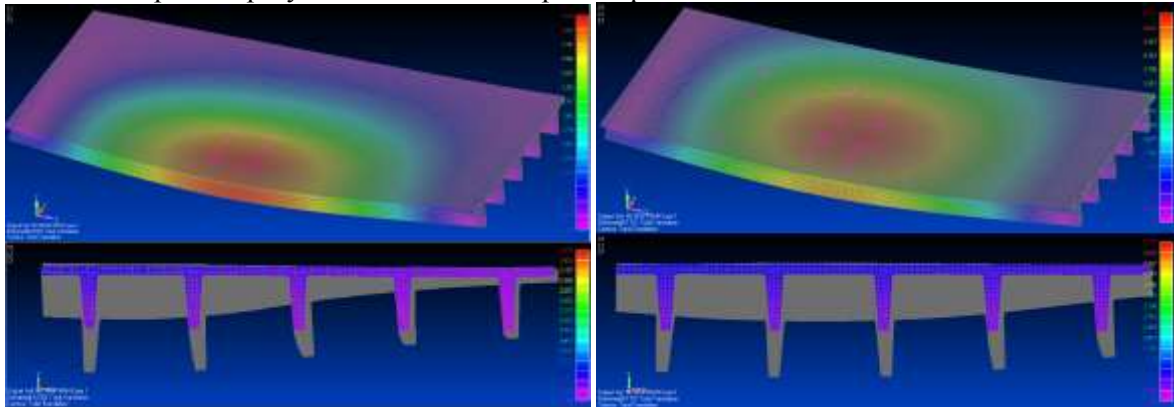


Рис.3. Деформована модель при: а – першій схемі, б – другій схемі навантаження

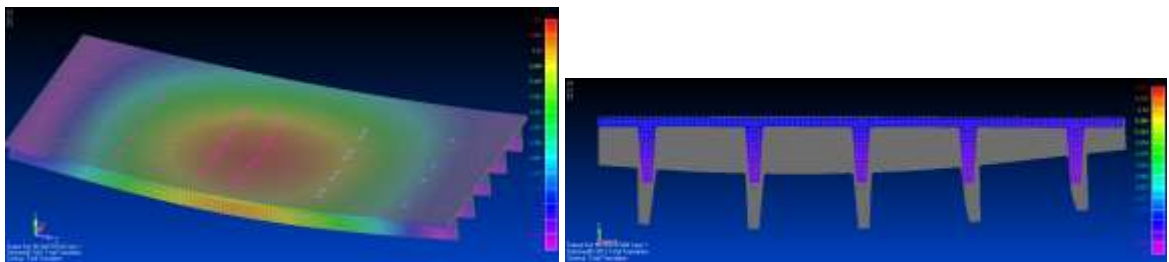


Рис.4. Деформована модель при третій схемі навантаження

**Аналіз результатів.** Одержані прогини при натурному експерименті та чисельному моделюванні представлені у вигляді епюр (рис.5). Числові дані наведені у табл.1. З представлених епюр та табл.1. видно, що характер розподілу прогинів при чисельному моделюванні є аналогічним до експериментального і носить нелінійний характер.

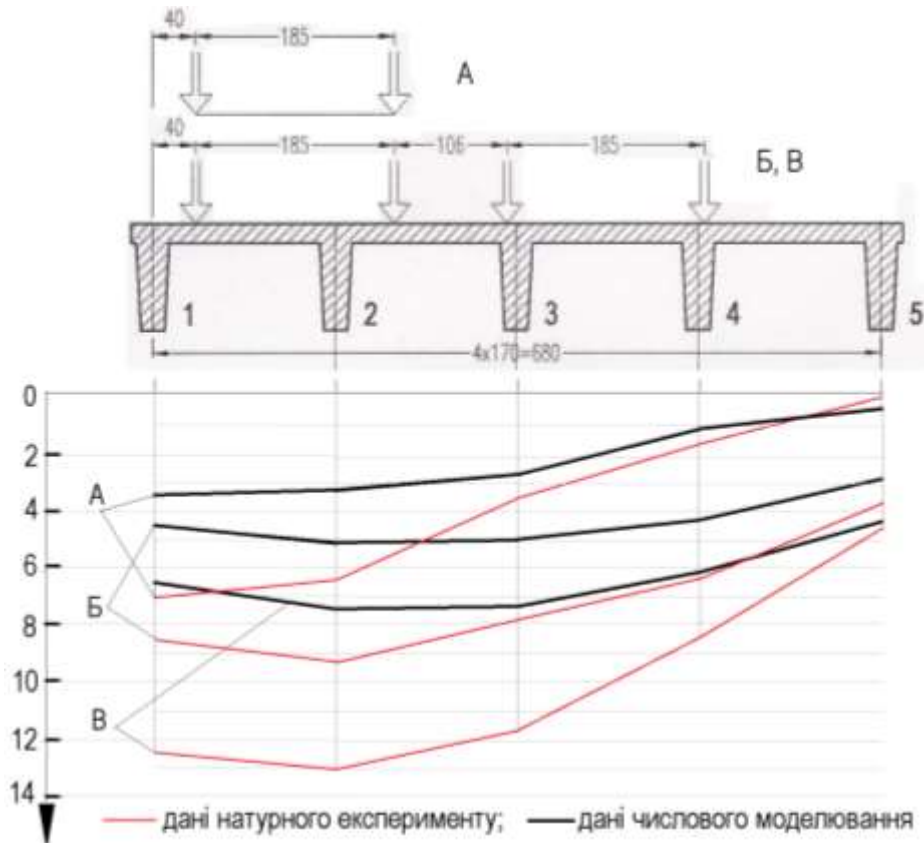


Рис. 5. Епюри прогинів балок прольотної будови

Таблиця 1.

Значення прогинів балок при експерименті та числовому моделюванні

	№ балки →	1	2	3	4	5
Схема «А»	моделювання	3,59	3,42	2,37	1,26	0,65
	експеримент	7,04	6,42	3,64	1,55	0,14
Схема «Б»	моделювання	4,49	5,07	4,99	4,25	2,87
	експеримент	8,66	9,35	7,96	5,22	3,77
Схема «В»	моделювання	6,52	7,32	7,21	6,17	4,27
	експеримент	12,52	13,04	11,72	8,52	4,51

Різниця отриманих значень між реальним випробуванням і чисельним розрахунком пов'язана з тим, що реальна конструкція, яка випробовувалася, на момент експерименту експлуатувалася вже близько п'ятдесяти років, у зв'язку з чим, за цей період зазнала різного роду впливів, в її структурі відбулися різні зміни та процеси. Зокрема, слід відмітити незадовільний стан зовнішніх консолей полиць крайніх балок, на значних ділянках вони були зруйновані, значну кількість дефектів біля деформаційних швів закритого типу і інші пошкодження. Крім того, при моделюванні прийнято деякі спрощення, зокрема, не враховувалося конструктивне армування, арматурні стержні проти усадки, тощо, також при було прийнято проектні міцнісні характеристики матеріалів.

Враховання наведених і інших особливостей при чисельному експерименті є задачею для подальшого дослідження з метою досягнути більшої збіжності результатів кінцево-елементного моделювання з натурними експериментами.

**Висновки.** В зв'язку з незадовільним станом і невідповідністю сучасним нормативним вимогам багатьох мостів, які тривалий час знаходяться в експлуатації, постає необхідність об'єктивно оцінити їх несучу здатність та реальний напружено-деформований стан. З допомогою чисельного моделювання методом кінцевих елементів у поєднанні з універсальними сучасними програмними комплексами можна з великою точністю змоделювати, розрахувати і здійснити оцінку несучої здатності залізобетонних плитно-ребристих мостових систем. Для високої збіжності необхідно враховувати різного роду нелінійні процеси і максимально точно моделювати реальний стан конструкції.

1. Гасенко А.В. Моделювання напружено-деформованого стану безкапітельних вузлів монолітного залізобетонного перекриття із сталобетонними колонами. / Гасенко А.В., Пігуль О.В., Маган І.В. // Вісник СНАУ, 11(14). – 2010, Серія «Будівництво». – С.53-60.
2. Дмитренко Т. Використання новітніх комп'ютерних технологій при чисельному дослідженні напружено-деформованого стану будівельних конструкцій / Вісник НУ ЛП №751 (2013). - С.346-350.
3. Кваша В. Г. Експериментальні дослідження просторового розподілу зусиль в залізобетонній плитно-ребристій прольотній будові моста / В. Г. Кваша, Ю. М. Собко, С. М. Стечишин // Будівельні конструкції, 2013. т. Вип. 78(1). - С.413-421.
4. Кваша В.Г. Просторовий розрахунок існуючих прольотних будов залізобетонних мостів при врахуванні виявлених дефектів / В.Г. Кваша, І.Г. Іваник // Збірник наукових праць Рівненського державного технічного університету «Ресурсоекономічні матеріали, конструкції, будівлі та споруди». – Рівне, 1999. - Вип. 3. – С.145-150.
5. Технічний звіт з обстеження і випробування моста через р. Буковець на км 51+005 автомобільної дороги державного значення Татарів – Кам'янець-Подільський // Львів: Національний університет «Львівська політехніка», 2013. – 95с.
6. Гениев Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона / Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. – М.: Стройиздат, 1974. – 316с.
7. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат. – 1996. – 416с.
8. Клейн В.Г. Метод конечных элементов при расчетах железобетонных конструкций с учетом дефектов / В.Г. Клейн, П.В. Колтаков. // Транспортное строительство – М., 2009. – №10. – С.26-28.
9. Лолейт А.Ф. Новый проект норм / Доклад на I Всесоюзной конференции по бетону и железобетону 20-25 апреля 1930 г. в Москве // Тр. конф. – М. 1931.
10. Мурашев В.И. Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона. – М. Машиностроиздат, 1958 – 268с.
11. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. – К.: НТУУ "КПИ", 2011. – 317 с.
12. Рычков С.П. Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. – М.: ДМК Пресс, 2013. – 784с.
13. Типовые проекты сооружений на автомобильных дорогах. Выпуск 56. Пролетные строения железобетонные, сборные с каркасной арматурой периодического профиля // М.: Стройиздат, 1958. – 56с.
14. Чередников В.Н. Численные исследования напряженно-деформированного состояния железобетонных колон производственного цеха / Чередников В.Н., Гасенко А.В., Крупченко А.А. // Ресурсоекономічні матеріали, конструкції, будівлі та споруди – Збірник наукових праць. Випуск 27. Полтава, 2013. – С.266-273.
15. Чирков В.П. Вероятностные методы расчета мостовых железобетонных конструкций / Чирков В.П. – М.: Транспорт. – 1980. – 134с.
16. Шалобыта Н.Н. Особенности идеализации в расчетах железобетонных элементов сечений сложной формы / Шалобыта Н.Н., Масилевич А.В., Шалобыта Т.П. // Строительство и архитектура. Вестник Брестского государственного технического университета. № 1 – Брест, 2013. – С.135-139.
17. Шимкович Д.Г. Femap & Nastran. Инженерный анализ методом конечных элементов – М.: ДМК Пресс, 2008. – 704 с.
18. Ngo D. Finite element analysis of reinforced concrete beam / Ngo D., Scordelis A.C. // ACI Journal. – 1967. – v.64. - №3.
19. Nilsen A.H. Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method / ACI Journal. – 1968. v.65. №9.
20. Volotsiuga V. Use of modern finite element analysis packages in calculations of reinforced concrete bridges. / Volotsiuga V., Shynder Yu. // Geodesy, Architecture & Construction: Proceedings of the 5th International Conference of Young Scientists GAC-2013. – Lviv: Lviv Polytechnic Publishing House, 2013. – Electronic edition on CD-ROM.

Стаття надійшла до редакції 24.04.2014