УДК 519.81:531.113

М.Г.Грубель, О.П.Красюк, М.Б.Сокіл, Р.А.Нанівський
Академія сухопутних військ імені гетьмана П. Сагайдачного

ВЕРТИКАЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПІДРЕСОРЕНОЇ ЧАСТИНИ КОЛІСНИХ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ ПІД ДІЄЮ ВИПАДКОВИХ ЗБУРЕНЬ

Наукова стаття присвячена розгляду методик аналітичного дослідження динаміки колісних транспортних засобів спеціального призначення, на базі математичних моделей та отриманні розрахункових залежностей, які мали б практичне застосування під час проектування нових чи модернізації існуючих підвісок.

Ключові слова: *підвіска, відновлююча сила, плавність руху.*
Рис 2. Форм 12. Літ 11

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДРЕССОРЕННОЙ ЧАСТИ КОЛЕСНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Научная статья посвящена рассмотрению методик аналитического исследования динамики колесных транспортных средств специального назначения на базе математических моделей и получении расчетных зависимостей, которые имели б практическое применение во время проектирования новых или модернизации существующих подвесок

Ключевые слова*:* *подвеска, восстановительная сила, плавность движения.*

VERTICAL VIBRATIONS OF PIDRESORENOY PART OF THE WHEELED TRANSPORT VEHICLES ARE UNDER ACTION OF CASUAL INDIGNATIONS

The scientific article is devoted consideration of methods of analytical research of dynamics of the wheeled transport vehicles of the special setting, on the base of mathematical models and receipt of calculation dependences which would have practical application during planning of new or modernization of existent pendants..

Keywords*:* *suspension, recuperative force, smooth movement.*

Транспортні засоби спеціального призначення (ТЗСП) експлуатуються, як правило, у складних умовах. Зовнішні дії, які передаються на їх корпус через систему підвіски, носять, як правило, випадковий характер. Належну плавність ходу та захистити екіпаж чи вантажі від перевантажень може підвіска відновлююча сила котрої описується нелінійною функцією деформації пружних елементів. Ця функція для малих деформацій амортизаторів приймає мале значення, в той же час для великих – стрімко зростає. Наведене у сукупності створює значні труднощі при аналітичному дослідження динаміки та стійкості ТЗСП. Результати ж отримані на базі спрощених (лінійних чи навіть квазілінійних моделей таких систем) [1-5] справедливі тільки для малих деформацій пружних елементів, тому вони мають обмежену область застосування. Чисельний ж аналіз проведений навіть на базі адекватних процесу математичних моделей динаміки ТЗСП не дає відповіді на багато практичних питань. До них можна віднести вплив амплітуди коливань на власну частоту, умови існування резонансу за умови пересування досліджуваного об’єкту по впорядкованій системі перешкод та ін. З огляду на вказане:

- розроблення методики аналітичного дослідження динаміки колісних ТЗСП, на базі математичних моделей, які в тій чи іншій міріураховують основні наведені вище особливості фізичних моделей, умови їх експлуатації;
- отримання на їх базі розрахункових залежностей, які мали б практичне застосування підчас проектування нових чи модернізації існуючих підвісок є актуальною проблемою. Розв’язання деяких задач її, а саме дослідження впливу випадкових збурень на динаміку підресореної частини за умови, що відновлююча сила пружних амортизаторів описується нелінійною функцією від їх деформації, є предметом розгляду даної роботи.

Постановка задачі. У роботі досліджуються випадкові вертикальні коливання підресореної частини колісних ТЗСП за умов:

- функція, яка описує відновлюючу силу пружної підвіски $F_{пр.}$ описується залежністю [6]

$$F_{пр.} = c\Delta^{\nu+1} + \varepsilon f(\Delta); \tag{1}$$

- сила опору демпферних пристроїв з достатнім степенем точності апроксимується співвідношенням

$$- \qquad \varepsilon R = \varepsilon R(\Delta, \dot{\Delta}) \tag{2}$$

і її найбільше значення є малим у порівнянні із максимальним значенням головної частини ($c\Delta^{\nu+1}$) відновлюючої сили;

- дії пересіченої місцевості на колеса правого та лівого бортів ТЗ однакові, носять випадковий характер і їх можна описати функцією типу "білого шуму" [7,8]

$$- \qquad \sqrt{\varepsilon}\sigma g(\Delta, \dot{\Delta})\dot{\xi}(t). \tag{3}$$

Диференціальне рівняння випадкових вертикальних коливань підресореної частини за вказаних припущень набуває вигляду

$$\frac{P}{g}\ddot{z} + cz^{\nu+1} = \varepsilon F(z, \dot{z}) + \sqrt{\varepsilon}\sigma g(z + \Delta_{cm}, \dot{z})\dot{\xi}(t). \tag{4}$$

У залежностях (1) – (4) Δ, Δ_{cm} - відповідно деформація та статична деформація пружних елементів; $z(t)$- вертикальне переміщення центру ваги підресореної частини по відношенню до положення її статичної рівноваги; $f(\Delta), R(\Delta, \dot{\Delta}), g(\Delta, \dot{\Delta})$- відомі аналітичні функції, $F(z, \dot{z}) = f(z + \Delta_{cm}) + R(z + \Delta_{cm}, \dot{z})$; $\dot{\xi}(t)$- процес білого шуму; $c, \nu, \sigma, \varepsilon$ - сталі, причому, $\nu + 1 = (2n+1)/(2m+1)$, $n, m = 0,1,2,...$; ε - малий параметр. Задача полягає у визначенні впливу зовнішніх (в т.ч. випадкових збурень) та внутрішніх чинників (характеристики підвіски) на коливання підресореної частини.

Методика розв'язування. Для вирішення поставленої задачі використаємо ту особливість розглядуваної системи, що у відповідній їй математичній моделі права частина (випадкові та частина нелінійних сил) є малими, у порівняння із головною частиною відновлюючої сили. Це дозволяє для побудови розв'язку рівняння (4) використати загальні ідеї методів збурень [9]. Відповідно до них, знаходимо розв'язок незбуреного ($\varepsilon = 0$) рівняння, яке відповідає нелінійному диференціальному рівнянню (4). Вказаний розв'язок виражається [6] через періодичні Ateb-функції [10] у вигляді

$$z = a_0 ca(\nu + 1, 1, \omega(a_0)t + \theta_0). \tag{5}$$

У (5) a_0 та θ_0 сталі інтегрування, які знаходимо із початкових умов

$$z(t)_{|t=0} = p, \dot{z}(t)_{|t=0} = q, \tag{6}$$

Таким чином, початкові амплітуда та фаза коливань a_0 та θ_0 незбуреного руху визначаються залежностями

$$\left(\frac{p}{a_0}\right)^{\nu+2} + \left(\frac{q(\nu+2)}{2a_0\omega(a_0)}\right)^2 = 1, \ cta(\nu+1, 1, \psi_0) = \frac{2p\omega(a_0)}{q(\nu+2)}.$$

Функція ж $\omega(a_0)$ має вигляд

$$\omega(a_0) = \sqrt{\frac{cg(\nu+2)}{2P}a_0^{\nu}}. \tag{7}$$

Якщо незбурений рух відбувається за сталих амплітуди та початкової фази (див. (5)), то збурений - у описується залежністю

$$z(t) = a(t)ca(\nu+1, 1, \psi), \ \psi(t) = \omega(a)t + \theta(t), \tag{8}$$

тобто вплив збурень проявляється у зміні з часом амплітуди та фази коливань. І ці зміни, відповідно до формули Іто [8], носять випадковій характер та описуються стохастичними диференціальними рівняннями

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a,\psi) + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t)C_1(a,\psi),$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon B_1(a,\psi) + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t)D_1(a,\psi). \qquad (9)$$

У вказаних вище стохастичних диференціальних рівняннях функції правої частини мають вигляд

$$A_1(a,\psi) = \frac{\varepsilon sa(1,\nu+1,\psi)}{\omega(a)} F(z,\dot{z})\Big|_{\substack{z=aca(\nu+1,1,\psi)\\ \dot{z}=-\frac{2}{\nu+2}a\omega(a)sa(\nu+1,1,\psi)}} + \frac{\varepsilon\sigma^2}{a^2\omega^2(a)}\left[\frac{(\nu+2)}{2}ca(\nu+1),1,\psi)g(z+\Delta_{cm},\dot{z})\Big|_{\substack{z=aca(\nu+1,1,\psi)\\ \dot{z}=-\frac{2}{\nu+2}a\omega(a)sa(\nu+1,1,\psi)}}\right]^2,$$

$$B_1(a,\psi) = -\frac{\varepsilon}{\omega(a)} ca(\nu+1,1,\psi)F(z,\dot{z})\Big|_{\substack{z=aca(\nu+1,1,\psi)\\ \dot{z}=-\frac{2}{\nu+2}a\omega(a)sa(\nu+1,1,\psi)}} - \varepsilon\sigma^2\frac{(\nu+2)ca(\nu+1),1,\psi)sa(1,\nu+1,\psi)}{2a^2\omega^2(a)}\left[g(z+\Delta_{cm},\dot{z})\Big|_{\substack{z=aca(\nu+1,1,\psi)\\ \dot{z}=-\frac{2}{\nu+2}a\omega(a)sa(\nu+1,1,\psi)}}\right]^2$$

$$C_1(a,\psi) = -\frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma sa(1,\nu+1,\psi)}{\omega(a)} g(z,\dot{z})\Big|_{\substack{z=aca(\nu+1,1,\psi)\\ \dot{z}=-\frac{2}{\nu+2}a\omega(a)sa(\nu+1,1,\psi)}},$$

$$D_1(a,\psi) = -\frac{\nu+2}{2a\omega(a)}\sqrt{\varepsilon}\sigma ca(\nu+1,1,\psi)g(z,\dot{z})\Big|_{\substack{z=aca(\nu+1,1,\psi)\\ \dot{z}=-a\omega(a)sa(\nu+1,1,\psi)}}.$$

Диференціальні залежності (9) показують, що параметри a та θ є повільно змінними функціями часу. Одночасно розв'язком цієї системи буде двовимірним марківським процесом відносно вказаних параметрів. Густина розподілу амплітуди та фази коливань $W(a,\theta,t)$ в ньому визначається відповідно до рівняння Колмогорова- Фоккера-Планка

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a}(A_1(a,\psi)W) - \frac{\partial}{\partial\theta}(B_1(a,\psi)W) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}(D_{1a}(a,\psi)W) + 2\frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}(D_{1a\theta}(a,\psi)W) + 2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(D_{1\theta}(a,\psi)W)\right] \qquad ,(10)$$

де $A_1(a,\psi), B_1(a,\psi)$ - коефіцієнти зносу $D_{1a}(a,\psi,), D_{1\theta}(a,\psi)$ - коефіцієнти дифузії амплітуди та фази коливань, $D_{1a\theta}(a,\psi)$ - змішаний коефіцієнт амплітуди і фази, тобто

$$D_{1a}(a,\psi) = (C_1(a,\psi))^2,\ D_{1\theta}(a,\psi) = (D_1(a,\psi))^2,\ D_{1a\theta} = C_1(a,\psi)D_1(a,\psi).$$

Густина сумісного розподілу амплітуди і фази випадкових коливань повинна задовольняти умовам, які наведені, наприклад, у [8]. Для наближеного дослідження рівняння (10) можна використати принцип усереднення [11]. Підставою для його використання є той факт, що основні характеристики коливань за період змінюються на величину, яка пропорційна ε. Усереднені значення цих коефіцієнтів набувають вигляду

$$\overline{A}_1(a) = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} A_1(a,\psi)d\psi, \quad \overline{B}_1(a) = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} B_1(a,\psi)d\psi, \quad \overline{D}_{1a}(a) = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} D_{1a}(a,\psi)d\psi,$$

$$\overline{D}_{1\theta}(a) = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} D_{1\theta}(a,\psi)d\psi,\ \overline{D}_{1a\theta}(a) = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} D_{1a\theta}(a,\psi)d\psi,\ \Pi = \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\nu+1}\right).$$

Для випадку стаціонарних коливань ($\frac{\partial W}{\partial t} = 0$) підресореної частини колісних ТЗСП густина розподілу амплітуди і фази коливань визначають більш простою залежністю, а саме

$$-\frac{\partial}{\partial a}(\overline{A}_1(a)\overline{W}(a)) - \overline{B}_1(a)\frac{\partial}{\partial\theta}(\ ) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}(\overline{D}_{1a}(a)\overline{W}(a)) + 2\frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}(\overline{D}_{1a\theta}(a)\overline{W}(a)) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\overline{D}_{1\theta}(a)\overline{W}(a))\right] = 0. \ (11)$$

Зокрема, у випадку, коли $g(z+\Delta_{cm},\dot{z})=\dot{z}$ $F(z,\dot{z})=\alpha\dot{z}(1+\lambda z^2)$ стохастичні диференціальні рівняння, які визначають базові закони зміни визначальних параметрів коливань набувають вигляду

$$\overline{A}_1(a)=\varepsilon a(\alpha_1 a^2+\alpha_2),\overline{B}_1(a)=0,\overline{D}_{1a}(a)=\varepsilon\alpha_3 a^2,\overline{D}_{1a\theta}(a)=0,\overline{D}_{1\theta}(a)=\varepsilon\alpha_4,$$

де

$$\alpha_1=\frac{\lambda\sqrt{\pi}}{2\Pi}\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right),\alpha_2=\frac{\sqrt{\pi}}{2\Pi}\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)+\frac{\sigma^2 a\sqrt{\pi}}{2\Pi}\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{\nu+2}\right),$$

$$\alpha_3=\frac{\sigma^2\sqrt{\pi}}{2\Pi}\Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{\nu+2}\right),\alpha_4=-\frac{\sigma^2\sqrt{\pi}}{2\Pi}\Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{\nu+2}\right).$$

В такому разі стаціонарна густина розподілу амплітуди визначається диференціальним рівнянням

$$\frac{d}{da}\left((\alpha_1 a^3+\alpha_2 a)\overline{W}(a)\right)+\frac{\alpha_3}{2}\frac{d^2}{da^2}\left(a^2\overline{W}(a)\right)=0.$$

Його загальний інтеграл має вигляд

$$\overline{W}(a)=Ca^{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}+1}\exp\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}a^2\right) \tag{12}$$

Нижче, на рис 1 та рис. 2, представлено для випадку $\lambda=-1$ залежність стаціонарної густини розподілу амплітуди за різних значень параметрів σ та ν

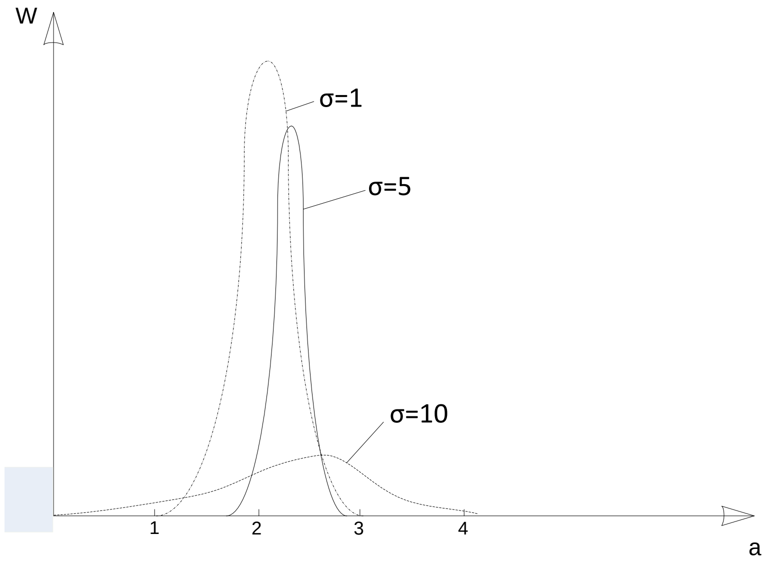

Рис.1. **Залежність стаціонарної густини розподілу амплітуди при** $\nu=2/3$

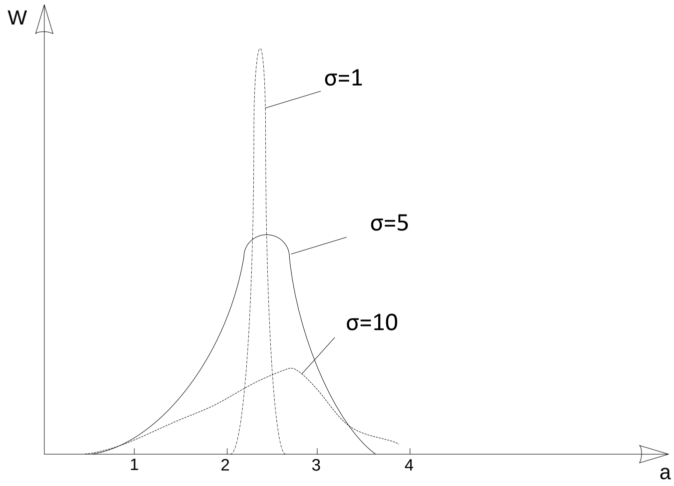

Рис.2. **Залежність стаціонарної густини розподілу амплітуди при** $\nu = 2$

Представлены залежності показують:
- при зменшенні інтенсивності шуму густина ймовірностей крнцентрується біля стаціонарного значення;
- при фіксованому ν із зростанням σ зростає значення амплітуди при якій густина розподілу амплітуди приймає максимальне значення;
- у порівнянні із густиною розподілу стаціонарної амплітуди квазілінійного випадку $\nu = 0$ максимальне значення для підвіски із сильно нелінійною характеристикою досягається за меншого значення стаціонарної амплітуди.

1. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля. – М.: Машиностроение, 1972. – 392 с.
2. Раймпель Й. Шаси автомобиля: Элементы подвески / пер.с нем. Карнухина А.Л., под ред. Г.Г.Гридасова. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
3. Динамика автомобиля / М.А. Подпигало, В.П. Волков, А.А. Бобошко, В.А. Павленко, В.Л. Файст, Д.М. Клец, В.В. Редько / под ред. М.А. Подригало. – Харьков: ХНАДУ, 2008. – 424 с.
4. 4.Пісарєв В.П. Можливості по компоновці нових пружних елементів підвіски, з прогресивною характеристикою, в межах існуючого конструктивного рішення БТР-60 / В.П. Пісарєв, А.П. Горбунов. // Механіка та машинобудування. – 2009. – № 2 – С. 51-56.
5. Пісарєв В.П. Сучасна методологія прикладного оптимального проектування ходових частин транспортних засобів / В.П. Пісарєв, А.П. Горбунов // Зб. наук. пр. Акад. ВВ МВС України. – Вип. 2. – Х., – 2008. – С. 19-24.
6. Сокіл Б.І. Власні вертикальні коливання корпусу автомобіля з урахуванням нелінійних характеристик пружної підвіски / Б.І. Сокіл, Р.А. Нанівський, М.Г. Грубель // Науково-виробничий журнал “Автомобільний транспорт”. – 2013. – № 5 (235). – С. 15-18.
7. Хасьминский Р.З.О диффузионных процессах с малым параметром// ИАН СССР. Сер. Матем. -1963.- 27, №6.- С.12.81-1300.
8. Митропольский Ю. А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю. А. Митропольский., Б. И. Мосеенков. – К. : Вища школа, 1976. – 589 с.
9. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Джулиан Коул ; [пер. с англ. А. И. Державиной и В. Н. Диесперова, под ред. О. С. Рыжова]. // – М. : Мир. – 1972. – 276 с.
10. Сеник П. М. Обернення неповної Beta-функції / П.М. Сеник // Укр. мат. журн. – К., 1969. – 21, № 3. – С. 325-333.
11. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский. – К.: Наукова думка, 1971. – 440 с

Стаття надійшла до редакції 17.04.2014.