УДК 517.926

Т. А. Крадінова
Луцький національний технічний університет

УМОВИ ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 3-ГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В статті розглядаються звичайні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами, які зводяться до звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами за допомогою заміни змінної x на змінну $z = f(x)$. Запропонована методика розв'язання таких рівнянь. Виписані загальні розв'язки при $n = 3$.

Знайдено вирази для змінних коефіцієнтів при яких вихідне рівняння буде інтегрованим.

Отримане вихідне диференціальне рівняння третього порядку в загальному вигляді, яке завжди допускає інтегрування в квадратурах.

Підставляючи сюди по черзі множину визначальних функцій, отримаємо і відповідну їм кількість вихідних диференціальних рівнянь 3-го порядку із змінними коефіцієнтами, які допускають інтегрування в квадратурах.

Наведено приклад.

Ключові слова: *параметричні коливання, диференціальне рівняння, визначальна функція змінні параметри.*

Форм. 4. Літ. 8.

Т. А. Крадинова

УСЛОВИЯ ИНТЕРИРОВАНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 3-ГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В статьерассматриваютсяобыкновенныедифференциальныеуравнения с переменнымикоэффициентами, которыеприводятся к обыкновеннымдифференциальнымуравнениям с постояннымикоэффициентами при помощизаменынезависимойпеременной x на переменную $z = f(x)$. Предложена методика решения таких уравнений. Выписаныобщиерешенияуравнений для $n = 3$.

Найдены выражения для переменных коэффициентов при которых исходное уравнение будет интегрированным.

Получено исходное дифференциальное уравнение третьего порядка в общем виде, которое всегда допускает интегрирование в квадратурах.

Подставляя сюда по очереди множество определяющих функций, получим и соответствующее им количество исходных дифференциальных уравнений 3-го порядка с коэффициентами, которые допускают интегрирование в квадратурах.

Приведен пример.

Ключевые слова: *параметрические колебания, дифференциальное уравнение, определяющая функция, переменные параметры.*

T. A. Kradinova

TERMS OF INTEGRATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONSOF 3-ГО ORDER ARE WITHVARIABLE COEFFICIENTS

The article deals with the ordinary differential equations with the variable coefficients which come to the ordinary differential equations with constant coefficients with the help of independent variable substitution x on variable $z = f(x)$. Methods of solution of such equations was also suggested. Total solutions of equations for $n = 3$ are extracted.

Expressionsforvariablecoefficientsatthatinitialequation willbeintegratedarefound.

Initialdifferentialequalizationofthethirdorderisgotin a generalview, thatalwaysadmitsintegrationby quadrature.

Puttinghereinturnthegreatnumberofqualificatoryfunctions, willgetandcorrespondingtothemamountofinitialdifferentialequations of 3-th orderwithvariablecoefficientsthatadmitintegrated by quadrature.

Anexampleismade.

Keywords: *parametric oscillations, differential equations, determining function, variable parameters.*

Досі влітературірозглядалися коливання стаціонарних систем, як вільні, так і ті, що відбуваються під дією зовнішніх сил. Останні здійснювали роботу по основних переміщеннях системи. При цьому її головні параметри(інерційні і квазіпружні коефіцієнти) не змінювалися з часом, тобто вважалися постійними. Проте, у цілому ряді випадків коливання можуть підтримуватися також і за рахунок зміни параметрів системи. При цьому її властивості з часом змінюються і з цієї причини такі системи називаються нестаціонарними. А коливання, що відбуваються в них, прийнято називати *коливаннями систем зі змінними параметрами*. В цьому випадку в початкових диференціальних рівняннях коефіцієнти при x, $\dot{x}$ і $\ddot{x}$ у загальному випадку будуть змінними.

Якщо згадані коефіцієнти описуватимуться періодичними функціями, то такі коливання називаються *параметричними.* Так, наприклад, вал, переріз якого має неоднакові головні жорсткості при вигині, може випробовувати незгасаючі поперечні коливання навіть у тому випадку, коли він повністю урівноважений. Це відбувається через періодичні (при постійній кутовій швидкості) зміни вигинистих жорсткостей відносно нерухомих осей. А поперечні коливання валу в нерухомій системі координат описуються диференціальними рівняннями з періодичними коефіцієнтами.

Для валу, який може здійснювати поперечні коливання тільки в одній площині, причиною таких коливань є зміна згинної жорсткості валу в цій площині. Як приклад маси, що періодично змінюється, може служити шатуново-кривошипний механізм. Проте, зміна параметрів може бути і не періодичним. Наприклад, збільшення або зменшення довжини нитки маятника, приєднання або від'єднання часток, з яких складається ця система і т. п.

Коливання механічних систем з постійними масою, жорсткістю, а також коефіцієнтом, що характеризує тертя системи, до теперішнього часу досліджені детально. Але закони рухуколивальних систем, де хоча б один з цих параметрів буде змінним, описуються достатньо складно, оскільки розв‘язання лінійних диференціальних рівнянь другого і вищих порядків зі змінними коефіцієнтами пов'язане з великими труднощами. Наприклад всім відоме рівняння Хілла-Матьйо. При розгляді таких систем завжди використовуються наближені розв’язки, які зводяться до визначення стійких і нестійких зон таких коливань. При цьому розв’язки залишались наближеними, невідомими залишались частоти, амплітуда, закон коливань.Відсутність методів рішення подібних рівнянь не дозволяла до останнього часу отримати хоч би простий закон коливального руху таких систем.

Нами встановлено, що якщо змінні коефіцієнти виразити через похідні вибраній функції, то при певній залежності між ними початкове рівняння буде завжди інтегрованим. Для встановлення такої залежності автором запропонований метод постійних коефіцієнтів при похідних по новій змінній. Він дозволяє отримувати точні рішення для великого класу як однорідних, так і неоднорідних лінійних рівнянь вищих порядків. У зв'язку з тим, що коливання зазвичай описуються диференціальними рівняннями 2, 3 і 4-го порядків, то для їх інтеграції спочатку знайдемо умови, яким повинні задовольняти згадані змінні коефіцієнти.

Нехай маємо рівняння

$$a_0(t)\frac{d^3x}{dt^3}+a_1(t)\frac{d^2x}{dt^2}+a_2(t)\frac{dx}{dt}+a_3(t)x=0. \qquad (1)$$

Знайдемо вирази для вказаних змінних коефіцієнтів, що допускають його інтегрування. Для цього виберемо довільну підстановку

$$z=f(t)$$

і назвемо $f(t)$ визначальною функцією. При цьому вважаємо, що $f(t)>0$ неперервна і визначена на проміжку $t\in(t_0;t_k)$, тричі диференційовною і $f'(t)\neq 0,\ f''(t)\neq 0$.

Позначимо

$$\frac{dz}{dt}=f'(t)=\varphi(t)$$

Враховуючи попередні позначення, перепишемо вирази для похідних у вигляді

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dz}\varphi(t) \text{ і}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x}{dz^2}\varphi^2(t)+\frac{dx}{dz}\varphi^{/}(t).$$

З останнього рівняння знаходимо

$$\frac{d^3x}{dt^3}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{d}{dz}\left[\frac{d^2x}{dz^2}\varphi^2(t)+\frac{dx}{dz}\varphi^{/}(t)\right]\frac{dz}{dt}.$$

Продиференціювавши вираз, отримаємо

$$\frac{d^3x}{dt^3}=\frac{d^3x}{dz^3}\varphi^3(t)+3\varphi(t)\varphi^{/}(t)\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{dx}{dz}\varphi^{//}(t).$$

Підставимо в початкове диференціальне рівняння коливань системи знайдені вирази для всіх трьох похідних. Потім, збираючи коефіцієнти при похідних по новій змінній, отримаємо

$$\frac{d^3x}{dz^3}\left[a_0(t)\varphi^3(t)\right]+\frac{d^2x}{dz^2}\left[3a_0(t)\varphi(t)\cdot\varphi^{/}(t)+a_1(t)\varphi^2(t)\right]+ \\ +\frac{dx}{dz}\left[a_0(t)\varphi^{//}(t)+a_1(t)\varphi^{/}(t)+a_2(t)\varphi(t)\right]+a_3(t)x=0. \tag{2}$$

Це рівняння можна проінтегрувати, якщо коефіцієнти при всіх похідних будуть сталими величинами. Тому приймаємо

$$a_0(t)\varphi^3(t)=C_0.$$

$$3a_0(t)\varphi(t)\varphi^{/}(t)+a_1(t)\varphi^2(t)=C_1.$$

$$a_0(t)\varphi^{//}(t)+a_1(t)\varphi^{/}(t)+a_2(t)\varphi(t)=C_2.$$

$$a_3(t)=C_3.$$

З врахуванням даних позначень, рівняння (2) приймає вигляд

$$C_0\frac{d^3x}{dz^3}+C_1\frac{d^2x}{dz^2}+C_2\frac{dx}{dz}+C_3x=0. \tag{3}$$

Відповідні йому характеристичне рівняння запишемо у формі

$$C_0r^3+C_1r^2+C_2r+C_3=0.$$

Розв‘язавши дане характеристичне рівняння, отримуємо три корені r_1, r_2 і r_3.

Тому розв’язок рівняння (3) можна представити у вигляді

$$x=K_1e^{r_1z}+K_2e^{r_2z}+K_3e^{r_3z}, \tag{*}$$

де K_1, K_2 і K_3 – сталі величини.

А перейшовши до початкової змінної, запишемо

$$x=K_1e^{r_1f(t)}+K_2e^{r_2f(t)}+K_3e^{r_3f(t)}.$$

У разі, коли два корені комплексні $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, отримаємо

$$x=ae^{\alpha f(t)}\sin\left[\beta f(t)+\gamma\right]+K_3e^{r_3f(t)},$$

де всі три сталі величини a, α і K_3 визначаються з початкових умов звичайним порядком.

Знайдемо тепер, якими повинні бути вирази для змінних коефіцієнтів $a_0(t), a_1(t), a_2(t), a_3(t)$, щоб початкове рівняння (1) допускало інтегрування в квадратурах. З першої рівності для сталих коефіцієнтів, знаходимо

$$a_0(t)=\frac{C_0}{\varphi^3(t)}=\frac{C_0}{\left[f^{/}(t)\right]^3}.$$

З врахуванням цього та наступної рівності, отримаємо

$$a_1(t)=\frac{C_1}{\varphi^2(t)}-\frac{3C_0\varphi^{/}(t)}{\varphi^4(t)}=\frac{C_1}{\left[f^{/}(t)\right]^2}-\frac{3C_0f^{//}(t)}{\left[f^{/}(t)\right]^4}.$$

Аналогічно знаходимонаступний змінний коефіцієнт з третьої рівності

$$a_2(t)=\frac{C_2}{\varphi(t)}-\frac{C_0\varphi^{//}(t)}{\varphi^4(t)}-\frac{C_1\varphi^{/}(t)}{\varphi^3(t)}+\frac{3C_0\left[\varphi^{/}(t)\right]^2}{\varphi^5(t)}.$$

Виражаючи тут $\varphi(t)$ через визначаючу функцію, запишемо

$$a_2(t)=\frac{C_2}{f^{/}(t)}-\frac{C_1f^{//}(t)}{\left[f^{/}(t)\right]^3}-\frac{C_0f^{///}(t)}{\left[f^{/}(t)\right]^4}+\frac{3C_0\left[f^{//}(t)\right]^2}{\left[f^{/}(t)\right]^5}.$$

І останньою рівністю вже визначений коефіцієнт

$$a_3(t) = C_3.$$

Підставляючи вирази для вказаних змінних коефіцієнтів в початкове рівняння (1), отримаємо

$$\frac{C_0}{\left[f^{/}(t)\right]^3}\frac{d^3x}{dt^3} + \left\{\frac{C_1}{\left[f^{/}(t)\right]^2} - \frac{3C_0 f^{//}(t)}{\left[f^{/}(t)\right]^4}\right\}\frac{d^2x}{dt^2} + \left\{\frac{C_2}{f^{/}(t)} - \frac{C_1 f^{//}(t)}{\left[f^{/}(t)\right]^3} + \frac{C_0\left\{\left[3f^{//}(t)\right]^2 - f^{///}(t)f^{/}(t)\right\}}{\left[f^{/}(t)\right]^5}\right\}\frac{dx}{dt} + C_3 x = 0. \tag{4}$$

Отримане рівняння і є вихідним диференціальним рівнянням третього порядкув загальному вигляді, яке завжди допускає інтегрування в квадратурах. Тут, як і раніше, C_0, C_1, C_2, C_3, – довільні сталі величини, які потім стають коефіцієнтами характеристичного рівняння по новій змінній z, а $f(t)$ – визначальна функція. Якщо з рівняння (*) знайти $\frac{dx}{dt}$ і $\frac{d^2x}{dt^2}$ і підставити в (4), то отримаємо тотожність.

Підставляючи сюди по черзі множину визначальних функцій, отримаємо і відповідну їм кількість вихідних диференціальних рівнянь 3-го порядку із змінними коефіцієнтами, які допускають інтегрування в квадратурах.

Приклад.

Записати вихідне рівняння 3-го порядку, що допускає інтегрування, якщо $f(t) = t^2 + 2t + \sin t$.

Розв'язання.

Вказана функція задовольняє умовам $f(t)$ для рівнянь 3-го порядку. По черзі знаходимо

$f^{/}(t) = 2(t+1) + \cos t$;

$f^{//}(t) = 2 - \sin t$;

$f^{///} = -\cos t$.

Підставляючи їх в (7.54), отримаємо

$$\frac{C_0}{\left[2(t+1)+\cos t\right]^3}\frac{d^3x}{dt^3} + \left\{\frac{C_1}{\left[2(t+1)+\cos t\right]^2} - \frac{3C_0(2-\sin t)}{\left[2(t+1)+\cos t\right]^4}\right\}\frac{d^2x}{dt^2} +$$

$$+\left\{\frac{C_2}{2(t+1)+\cos t} - \frac{C_1(2-\sin t)}{\left[2(t+1)+\cos t\right]^3} + \frac{C_0 \cos t}{\left[2(t+1)+\cos t\right]^4} + \frac{3C_0(2-\sin t)^2}{\left[2(t+1)+\cos t\right]^5}\right\}\frac{dx}{dt} +$$

$$+C_3 x = 0.$$

Нагадаємо при цьому, що розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x = K_1 e^{r_1\left(t^2+2t+\sin t\right)} + K_2 e^{r_2\left(t^2+2t+\sin t\right)} + K_3 e^{r_3\left(t^2+2t+\sin t\right)}.$$

Тут r_1, r_2 і r_3 – корені характеристичного рівняння

$$C_0 r^3 + C_1 r^2 + C_2 r + C_3 = 0.$$

Зокрема, якщо $C_0 = 1,\ C_1 = 4,\ C_2 = 13$ і $C_3 = 0$, отримаємо

$$r_{1,2} = -2 \pm 3i;\ r_3 = 0.$$

Тоді розв'язок зручно представити у формі

$$x = ae^{-2\left(t^2+2t+\sin t\right)}\sin\left[3\left(t^2+2t+\sin t\right)+\gamma\right] + K.$$

1. Кислий О., Дудчак Б., Гуда О. Нестаціонарні коливання системи змінної маси або жорсткості // Машинознавство. – 2003. – №8 (74). – С. 15-19.
2. Кислий О. О., Дутчак Б. І., Римарук Т. А. Види вихідних рівнянь параметричних коливань, які інтегруються в квадратурах. // Машинознавство. 2005, №7, (97), – С.14-18.
3. Кислий О. О., Дутчак Б. І., Римарук Т. А. Інтегрування неповних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами. // Луцьк: Наукові нотатки. – Вип. 18, 2006. ЛДТУ. – С. 210-215.
4. Крадінова Т. А. Вільні коливання механічної системи у випадку змінної маси під дією сил сухого тертя. // XXIII науково-технічна конференція професорсько-викладацького складу “Актуальні проблеми та перспективи науки і виробництва” (технічний напрямок). Луцьк, 13-14 листопада 2008 р. Тези доповідей. – Луцьк: ЛНТУ. – 2008. – С. 116-121.
5. Крадінова Т. А. Коливання системи змінної маси при дії сил в’язкого тертя // Тези доп. XXV наук.-техн.конфер.проф.-викл. складу “Актуальніпроблеми та перспективи науки і виробництва” (технічнийнапрямок). Луцьк, 18–19 грудня 2010 р. Луцьк: ЛНТУ, 2010. – С. 124-129.
6. Крадінова Т. А., Тимощук В. М. Параметричні коливання системи за відсутності опору. // Міжвузівський збірник «Комп’ютерно-інтегровані технології. Освіта, наука, виробництво» Луцьк, ЛНТУ. – 2011. Випуск 1. – С. 146-152.
7. Римарук Т. А. Умови інтегрованості диференціальних рівнянь зі змінними параметрами. // Дванадцята Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука. Київ, 15-17 трав. 2008 р. Матеріали конф., Т. І. – К.: НТУУ “КПІ”. – 2008. – 338 с.
8. Римарук Т. А. Коливання системи зі змінними параметрами у випадку малого опору. // Луцьк. Наукові нотатки. ЛДТУ. 2007. Вип. 20 (2). – С. 148-150.

Стаття надійшла до редакції 28.08.2014.