

УДК 539.375

М. О. Кузін<sup>1</sup>, Т. М. Николишин<sup>2</sup>, Ю. П. Фещук<sup>3</sup>, Н. П. Зайчук<sup>3</sup><sup>1</sup>Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту ім. акад. В. Лазаряна<sup>2</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України<sup>3</sup>Луцький національний технічний університет

### НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ОРТОТРОПНОЇ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ЗАМКНУТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ВНУТРІШНЬОЮ ПОПЕРЕЧНОЮ ТРІЩИНОЮ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

*На основі рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка та аналога  $\delta_c$ -моделі задачу про напружений стан і граничну рівновагу циліндричної ортотропної пружно-пластичної оболонки з внутрішньою поперечною тріщиною довільної конфігурації зведено до системи нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь. Запропоновано алгоритм числового розв'язання отриманої системи. Вивчено вплив ортотропії, навантаження та геометричних параметрів на розкриття тріщини та розміри пластичних зон поблизу неї.*

*Ключові слова:* ортотропна циліндрична оболонка, внутрішня тріщина, інтегральні рівняння, розкриття фронту тріщини, теорія оболонок типу Тимошенка.

*Рис. 3. Форм. 17. Літ. 8.*

Н. О. Кузін, Т. М. Ныколышин, Ю. П. Фещук, Н. П. Зайчук

### НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОРТОТРОПНЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ВНУТРЕННЕЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

*На основе уравнений теории оболочек типа Тимошенко и аналога  $\delta_c$ -модели задачу о напряженном состоянии и предельном равновесии цилиндрической ортотропной упруго-пластической оболочки с внутренней поперечной трещиной произвольной конфигурации сведено к системе нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Предложен алгоритм численного решения полученной системы. Изучено влияние ортотропии, нагрузки и геометрических параметров на раскрытие трещины и размеры пластических зон вблизи ее.*

*Ключевые слова:* ортотропная цилиндрическая оболочка, внутренняя трещина, интегральные уравнения, раскрытие фронта трещины, теория оболочек типа Тимошенко.

М. О. Kuzin, T. M. Nykolyshyn, Yu. P. Feshchuk, N. P. Zaychuk

### STRESS-STRAIN STATE OF ORTHOTROPIC ELASTIC-PLASTIC CLOSED CYLINDRICAL SHELL WITH AN INTERNAL TRANSVERSE CRACKS ANY CONFIGURATION

*On the basis of equalizations theory shells type Timoshenko and analogue are  $\delta_c$  models a task about the tense state and maximum equilibrium of cylindrical orthotropic of resiliently-plastic shell with the internal transversal crack of arbitrary configuration is taken to the system of nonlinear singular integral equalizations. The algorithm of numeral decision of the got system offers. Influence of orthotropic is studied, loading and geometrical parameters on opening of crack and sizes of plastic zones near-by her.*

*Keywords:* orthotropic cylindrical shell, internal cracks, integral equations, opening the crack front, the theory of Timoshenko-type shells.

**Вступ.** Міцність реальних твердих тіл визначається не тільки їх фізико-хімічною природою, а й істотно залежить від дефектності їх структури. Розв'язання проблеми руйнування матеріалів може бути успішним тільки у випадку врахування дефектів, що містяться в тілі (мікро- та макротріщини, різного походження порожнини та включення, границі блоків і зерен структури тощо). В процесі деформації твердого тіла в околі таких концентраторів виникає висока інтенсивність напружень, що веде до пластичного течіння матеріалу, до утворення та поширення тріщин, тобто до локального чи повного руйнування тіла [1, 2].

Науково-технічний прогрес ставить все вищі вимоги до міцності конструкційних матеріалів. Такі вимоги, в певній мірі, задовольняють нові композиційні матеріали, зокрема армовані надміцними волокнами пластики. Для них притаманна низка специфічних механічних властивостей, таких як анізотропія деформативних та міцнісних властивостей, порівняно низька зсувна жорсткість. Ефективне конструювання виробів з таких матеріалів можливе лише при врахуванні та правильному використанні цих властивостей. Так як високоміцні матеріали схильні до крихкого та квазікрихкого руйнування, то наявність дефектів, особливо гострокінцевих, суттєво впливає на міцність конструкцій. Щоб оцінити вплив різного роду дефектів на

напружений стан і граничну рівновагу тіла, доцільно провести дослідження для концентраторів напружень, які піддаються аналітичній трактовці. Таким концентратором, наприклад, в тонкостінних конструкціях є наскрізні та внутрішні тріщини. Тим більше, що тріщини є найбільш небезпечними, з точки зору руйнування, дефектом [1–3].

Автори уже розглядали випадки, коли внутрішня тріщина обмежена лініями, паралельними координатним [4, 5]. В цій роботі досліджено анізотропну замкнуту циліндричну пружно-пластичну оболонку, ослаблену внутрішньою тріщиною довільної конфігурації (рис. 1).

**Формулювання задачі.** Розглянемо ортотропну безмежну замкнуту циліндричну оболонку радіуса  $R$ , середину поверхні якої віднесемо до циліндричної системи координат  $\alpha \beta \gamma$ . Оболонка товщини  $2h$  ослаблена поперечною внутрішньою тріщиною завдовжки  $2l_0$ . Глибина тріщини задається двома гладкими кривими  $d_1(\beta)$  та  $d_2(\beta)$  (рис. 1). Тріщина розміщена вздовж координатної лінії  $\alpha = 0$ .

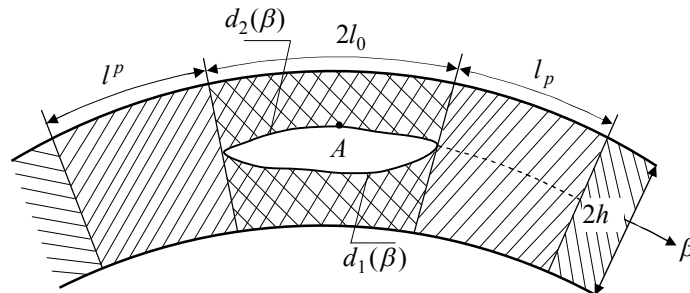


Рис. 1. Схема розміщення внутрішньої тріщини та пластичних зон

Вважатимемо, що оболонка та береги тріщини завантажені лише симетричними відносно її площини зусиллями та моментами. Під час деформації береги тріщини не контактують. Обмежимося розглядом досить глибоких тріщин. Площу тріщини, рівень зовнішнього навантаження та властивості матеріалу передбачаємо такими, що біля неї по всій товщині оболонки вузькою смугою розвиваються пластичні деформації. Тепер, відповідно до аналога  $\delta_c$ -моделі [1], зони пластичних деформацій замінимо поверхнями розриву пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичної зони на пружний об'єм – відповідними зусиллями та моментами. Вважатимемо, що на продовженні тріщини в глибину до зовнішньої чи внутрішньої поверхонь оболонки, тобто відповідно в області  $\beta \in ]-\beta_0; \beta_0[$ ;  $\gamma \in [-h; -h + d_1] \cup [h - d_2; h]$ , ( $\beta_0 = l_0 / R$ ,  $\gamma$  – нормальна до серединної поверхні координата), діють постійні напруження  $\sigma^0 = (\sigma_B + \sigma_T) / 2$ , де  $\sigma_B$  – границя міцності, а  $\sigma_T$  – поріг текучості матеріалу оболонки в осьовому напрямку. У пластичних зонах на продовженні тріщини по довжині, тобто в областях  $\gamma \in [-h; h]$ ,  $\beta \in ]-\beta^p; -\beta_0[ \cup ]-\beta_0; \beta_p[$ , ( $\beta_p = l_p / R$ ;  $\beta^p = l^p / R$ ;  $l_p$ ,  $l^p$  – довжини пластичних зон справа та зліва від тріщини) діють невідомі нормальні зусилля  $N_p$ ,  $N^p$  та згинні моменти  $M_p$ ,  $M^p$ , які протидіють розкриттю тріщини та задовольняють певну умову пластичності тонких оболонок [6].

Таким чином, у рамках прийнятого аналога  $\delta_c$ -моделі пружно-пластичну задачу про граничну рівновагу оболонки з внутрішньою тріщиною заданої довжини  $2l_0$  зведено до задачі про пружну рівновагу такої ж оболонки з фіктивною наскрізною тріщиною невідомої довжини  $2l_1 = 2l_0 + l_p + l^p$  на берегах якої виконуються умови:

$$f_1(\beta) = \begin{cases} N_1^{(1)} + N^l - N_2^0, & |\beta| \leq \beta_0, \\ -N_2^0 + N_p, & \beta_0 < \beta < \beta_0 + \beta_p, \\ -N_2^0 + N^p, & -\beta_0 - \beta^p < \beta < -\beta_0; \end{cases}$$

$$f_2(\beta) = \begin{cases} M_2^{(1)} + M^l - M_2^0, & |\beta| \leq \beta_0, \\ -M_2^0 + M_p, & \beta_0 < \beta < \beta_0 + \beta_p, \\ -M_2^0 + M^p, & -\beta_0 - \beta^p < \beta < \beta_0. \end{cases}$$

Тут  $N_2^{(1)}$ ,  $M_2^{(1)}$  – зусилля та момент, прикладені до берегів реальної тріщини;  $N_2^0$ ,  $M_2^0$  – ці ж параметри на лінії тріщини в суцільній оболонці, зумовлені зовнішнім навантаженням;  $N^l$ ,  $M^l$  – нормальне зусилля та згинний момент, які є реакцією матеріалу на розрив внутрішніх зв'язків над і під внутрішньою тріщиною та які згідно з прийнятими припущеннями про напруження в цих зонах визначаються за формулами:

$$N^l(\beta) = \sigma_0 \left( \int_{-h}^{d_1(\beta)} d\gamma + \int_{d_2(\beta)}^h d\gamma \right), \quad M^l(\beta) = \sigma_0 \left( \int_{-h}^{d_1(\beta)} \gamma d\gamma + \int_{d_2(\beta)}^h \gamma d\gamma \right). \quad (2)$$

**Основні співвідношення анізотропної циліндричної оболонки з тріщиною.** В рамках уточненої теорії оболонок типу Тимошенка систему десятого порядку п'яти диференціальних ключових рівнянь, що враховують наявність тріщини, запишемо в матричному вигляді [1, 3, 5]

$$\mathcal{E}\bar{u} = R\mathcal{M}_1^{*T}\bar{\varepsilon}_1^0 + c_1^2 R^2 \mathcal{M}_2^{*T}\bar{\varepsilon}_2^0, \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{K}_1^* \mathcal{M}_1^* + c_1^2 \mathcal{K}_2^* \mathcal{M}_2^*; \quad c_1^2 = h^2 / (3R^2); \quad \mathcal{M}_j^* = \mathcal{E} \mathcal{K}_j^T; \\ \mathcal{K}_1^* &= \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 & \partial_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\partial_1 & -\partial_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{K}_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1 & \partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 & \partial_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \mathcal{E} &= \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & \mathcal{G} \\ \mathcal{G} & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{12} \\ 0 & c_{66} & 0 \\ c_{12} & 0 & c_{22} \end{pmatrix}; \quad \mathcal{E}_2 = k' \begin{pmatrix} c_{44} & 0 \\ 0 & c_{55} \end{pmatrix}; \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \bar{u} &= \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}; \quad \bar{\varepsilon}_1^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \varepsilon_{13}^0 \\ \varepsilon_{23}^0 \end{pmatrix}; \quad \bar{\varepsilon}_2^0 = \begin{pmatrix} \chi_{11}^0 \\ \chi_{12}^0 \\ \chi_{22}^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тут верхнім індексом «Т» позначено транспоновану матрицю до даної;  $k' = 5/6$  – введений у теорії оболонок типу Тимошенка коефіцієнт зсуву для перерізальних сил; пружні сталі матеріалу оболонки  $c_{ij}$  визначаємо через технічні сталі за співвідношеннями

$$c_{11} = \frac{2E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad c_{22} = \frac{2E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad c_{12} = \frac{2hE_1 \nu_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$$

$$c_{44} = 2hG_{23}; \quad c_{55} = 2hG_{13}; \quad c_{66} = 2hG_{12}; \quad E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1;$$

$E_i, \nu_i$  ( $i = 1, 2$ ) – відповідно модулі пружності та коефіцієнти Пуассона в напрямках  $\alpha, \beta$ ;  $G_{12}$  – модуль зсуву між напрямками  $\alpha$  і  $\beta$ ;  $G_{13}$  – модуль зсуву між напрямками  $\alpha$  або  $\beta$  та  $\gamma$ ;  $u, v, w$  – компоненти переміщення серединної поверхні оболонки;  $\gamma_1, \gamma_2$  – кути повороту між нормаллю до серединної поверхні та координатними лініями  $\alpha, \beta$ ;  $\varepsilon_{ij}^0, \kappa_{ij}^0$  – деформації, що виражаються через стрибки переміщень і кутів повороту.

Розв'язок системи (3) шукаємо у вигляді

$$\bar{u} = RL^{-1}(\mathcal{M}_1^{*T}\bar{\phi}_1 + c_1^2 \mathcal{M}_2^{*T}\bar{\phi}_2). \quad (4)$$

Тут  $\mathcal{E}^{-1}$  – матриця алгебричних доповнень до матриці  $\mathcal{E}$ , тому

$$\mathcal{E}\mathcal{E}^{-1} = D^*\mathcal{E}; \quad D^* = \det \mathcal{E}; \quad \mathcal{E}^{-1} = \mathcal{E}; \quad (5)$$

$\bar{\phi}_1 = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5)$ ;  $\bar{\phi}_2 = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, 0, 0)$  – вектори ключових функцій, які задовольняють рівняння

$$D^*\bar{\phi}_i = \bar{\varepsilon}_i^{(0)} \quad (i=1,2). \quad (6)$$

Рівняння (6) з врахуванням (5) називатимемо ключовим або розв'язувальним рівнянням теорії анізотропних циліндричних оболонок типу Тимошенка, а функції  $\bar{\phi}_i (i=1,2)$  – ключовими (розв'язувальними).

Вирази для знаходження зусиль і моментів через ключові функції  $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2$  мають вигляд

$$\bar{n}_1 = c_1^2 \Omega_1 (\mathcal{N}_1^1 \bar{\phi}_1 + c_1^2 R \mathcal{N}_2^1 \bar{\phi}_2), \quad \bar{n}_2 = c_1^2 \Omega_1 R (\mathcal{N}_1^2 \bar{\phi}_1 + c_1^2 R \mathcal{N}_2^2 \bar{\phi}_2), \quad (7)$$

де  $\bar{n}_1, \bar{n}_2$  – «вектори» зусиль й моментів серединної поверхні

$$\bar{n}_1 = \begin{bmatrix} N_1 \\ S \\ N_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}; \quad \bar{n}_2 = \begin{bmatrix} M_1 \\ H \\ M_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{N}_1^1 = \mathcal{M}_1^* \mathcal{E}^{-1} \mathcal{M}_1^{*T} - D^* \mathcal{E}, \quad \mathcal{N}_2^2 = c_1^2 \mathcal{M}_2^* \mathcal{E}^{-1} \mathcal{M}_2^{*T} - D^* \mathcal{E};$$

$$\mathcal{N}_i^j = \mathcal{M}_i^* \mathcal{E}^{-1} \mathcal{M}_j^{*T} \quad (i, j=1,2; i \neq j), \quad \Omega_i = \det \mathcal{E}.$$

З (4) випливає:

$$\mathcal{N}_i^i = (\mathcal{N}_i^i)^T; \quad \mathcal{N}_i^j = (\mathcal{N}_j^i)^T \quad (i, j=1,2; i \neq j).$$

Ключові функції  $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2$  подамо у вигляді інтеграла згортки по серединній поверхні оболонки, вважаючи, що компоненти деформації  $\bar{\varepsilon}_1^{(0)}, \bar{\varepsilon}_2^{(0)}$  є інтегрованими функціями на серединній поверхні оболонки:

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \end{pmatrix} (\alpha, \beta) = \frac{1}{c_1^2 \Omega} \iint \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(0)} \\ \varepsilon_2^{(0)} \end{pmatrix} (\xi_1, \xi_2) g(\alpha - \xi_1, \beta - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (8)$$

Тут  $g(\alpha, \beta)$  – фундаментальний розв'язок [7] рівняння

$$D^* g(\alpha, \beta) = \delta(\alpha) \delta_T(\beta), \quad (9)$$

де  $\delta(\alpha)$ ;  $\delta_T(\beta)$  – дельта-функції Дірака (нижній індекс  $T$  показує, що вказана функція  $T$ -періодична),  $\Omega = \det \mathcal{E}_1$ .

Зважаючи на симетричність навантаження, розміщення тріщин, а також на те, що переміщення й кути повороту при переході через тріщину мають стрибок, а зусилля й моменти – неперервні функції, поле деформацій  $\bar{\varepsilon}_1^0, \bar{\varepsilon}_2^0$  набуває вигляду

$$\varepsilon_{22}^0(\alpha, \beta) = R^{-1} [u(\beta)] \delta(\alpha); \quad \kappa_{22}^0(\alpha, \beta) = R^{-1} [\gamma_1(\beta)] \delta(\alpha);$$

$$\varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{12}^0 = \varepsilon_{13}^0 = \varepsilon_{23}^0 = \kappa_{12}^0 = \kappa_{11}^0 = 0 \quad (10)$$

$[a(\beta)]$  – стрибок узагальнених переміщень.

**Інтегральні рівняння задачі.** З допомогою фундаментального розв'язку рівняння (9) та операції згортки побудовано інтегральні представлення ключових функцій (8)  $\bar{\phi}_i (i=1,2)$ , а з допомогою формул (7) – інтегральні представлення зусиль та моментів для замкнутої ортотропної циліндричної оболонки. Вимагаючи тепер, щоб на берегах фіктивної тріщини виконувались умови (1) отримуємо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 F_j(\theta) \left[ \frac{a_{ij}}{\theta - \beta} + \tilde{K}_{ij}(\theta, \beta) \right] d\theta = b_i f_i(\beta), \quad (11)$$

де  $F_1 = \frac{d}{d\theta}[u(\theta)]$ ;  $F_2 = \frac{d}{d\theta}[\gamma_1(\theta)]$ ;  $f_i(\beta)$  – задані співвідношеннями (1), тобто – розривні функції; ядра  $\tilde{K}_{ij}(z)$  – неперервні функції на проміжку  $z \in [-1; 1]$ ,  $\tilde{K}_{ij}(z)$ ,  $a_{ij}$  приведені в [1] і відповідають ядрам для оболонки, ослабленої однією наскрізною поперечною тріщиною.

Розв'язки системи сингулярних інтегральних рівнянь (11) повинні задовольняти умови

$$\int_{-\beta_1}^{\beta_1} F_m(\xi) d\xi = 0, \quad m = 1, 2, \quad (12)$$

які забезпечують неперервність переміщення  $u$  та кута повороту  $\gamma_1$  у вершинах тріщини і впливають із співвідношень (4), (10).

Відповідно до моделі в системі (11) невідомі розміри зон пластичних деформацій  $l^p$ ,  $l_p$ , а також зусилля  $N_p$ ,  $N^p$  та моменти  $M_p$ ,  $M^p$ , що відповідають реакції пластичних зон на пружний об'єм і задовольняють певну умову пластичності тонких оболонок. Наприклад, умову Треска у вигляді пластичного поверхневого шару

$$\frac{N^i}{2h\sigma_{T\beta}} + \frac{3|M^i|}{2h^2\sigma_{T\beta}} = 1, \quad (i=1, 2) \quad \begin{matrix} N^1 = N^p, & N^2 = N_p \\ M_1 = M^p, & M^2 = M_p \end{matrix} \quad (13)$$

або пластичного шарніру

$$\left( \frac{N^i}{2h\sigma_{T\beta}} \right)^2 + \frac{|M^i|}{h^2\sigma_{T\beta}} = 1. \quad (14)$$

Умови пластичності (13) або (14) використовуємо для визначення довжини пластичних зон  $l^p$ ,  $l_p$ . Для знаходження невідомих  $N^p$ ,  $N_p$  та  $M^p$ ,  $M_p$  застосуємо умови скінченності напружень біля вершини фіктивної тріщини. Для цього достатньо, щоб коефіцієнти інтенсивності нормальних зусиль та згинних моментів дорівнювали нулю в обох вершинах фіктивної тріщини, тобто

$$K_N(\pm\beta_1) = K_M(\pm\beta_1) = 0. \quad (15)$$

Таким чином, задачу про граничну рівновагу ортотропної пружно-пластичної циліндричної оболонки з внутрішньою поперечною тріщиною довільної конфігурації зведено до сумісного розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь (11), умов однозначності переміщень (12), умов пластичності (13) або (14) та умов обмеженості напружень (15).

Слід відмітити, що в системі (11) невідомі границі інтегрування  $\beta_1$ , так як невідомі розміри пластичних зон. Крім цього праві частини інтегральних рівнянь (11) – розривні функції в точках  $\beta = \pm\beta_0$ . Це впливає з (1). Розв'язок системи (11) можна шукати одним із прямих числових методів, наприклад, методом механічних квадратур. Але в точках  $\beta = \pm\beta_0$  прямі методи дають значну похибку, а саме в цих точках нас цікавить розкриття тріщин. Тому розв'язок шукаємо у вигляді

$$F_m(\theta) = h_m(\theta) + \psi_m(\theta), \quad (m=1, 2). \quad (16)$$

Тут  $h_m(\theta)$  – розв'язок системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^2 a_{ij} \int_{-1}^1 \frac{h_j(t)}{t - \theta} dt = f_i(\theta), \quad (i=1, 2). \quad (17)$$

Який задовольняє умови

$$\int_{-1}^1 h_i(t) dt = 0, \quad (i=1, 2).$$

Система (17) розв'язана з допомогою формули обернення інтегралів типу Коші. Підставляючи тепер (16) в (11) отримуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь на функції

$\psi_m(\theta)$ , яка має вигляд системи (11), але з неперервною правою частиною. Алгоритм сумісного розв'язування отриманої системи та додаткових умов такий: вибираємо деяке початкове наближення значення  $\beta_1$ , будуємо розв'язок отриманої системи інтегральних рівнянь, з допомогою умов (15) знаходимо  $N_p$ ,  $N^p$  та  $M_p$ ,  $M^p$ , які підставляємо в умови (13) або (14). Якщо вибрана умова пластичності задовольняється з наперед заданою точністю, то задача розв'язана, якщо ні, змінюємо певним чином  $\beta_1$  і процедуру повторюємо.

Інтегруючи розв'язок системи (11), розкриття тріщини у довільній її точці визначаємо за формулою

$$\delta(\beta, \gamma) = [u(\beta)] + \gamma [\gamma_1(\beta)], \quad |\beta| < \beta_1, \quad |\gamma| \leq h.$$

**Числові результати.** Числовий аналіз проводили для оболонок з таких матеріалів [8]:

**I** – композиційний матеріал на епоксидній основі, армованій однонаправленими графітними волокнами:

$$E_1 = 14,9 \cdot 10^4 \text{ МПа}; E_2 = 0,6 \cdot 10^4 \text{ МПа}; G_{12} = 0,4 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \nu_1 = 0,31;$$

**II** – композиційний матеріал на епоксидній основі, армованій однонаправленими волокнами з S-скла:

$$E_1 = 6,3 \cdot 10^4 \text{ МПа}; E_2 = 2,12 \cdot 10^4 \text{ МПа}; G_{12} = 0,9 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \nu_1 = 0,25;$$

**III** – борепоксидний композит:

$$E_1 = 40 \cdot 10^4 \text{ МПа}; E_2 = 4 \cdot 10^4 \text{ МПа}; G_{12} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \nu_1 = 0,25.$$

Для всіх матеріалів приймали  $\nu = 0,3$ .

Алгоритм числового розв'язування реалізований для оболонки, що знаходиться під дією постійного розтягувального зусилля  $N_2^0$  на „нескінченості” ( $M_2^0 = 0$ ), армувальні волокна направлені вздовж напрямної. Матеріал ідеально пружно-пластичний ( $\sigma_B = \sigma_T$ ). Оболонка ослаблена внутрішньою параболічною тріщиною

$$d_1(\beta) = \frac{1}{\tau_0^2} (h - d'_1 - d'_2) \beta^2 - h + d'_1, \quad d_2(\beta) = -\frac{1}{\tau_0^2} (h - d'_1 - d'_2) \beta^2 + h - d'_2,$$

$d'_1$  та  $d'_2$  віддаль від вершини відповідної параболи до внутрішньої та зовнішньої поверхонь оболонок  $\tau_0 = l_0 / l_p$ ,  $d'_1 / h = 0,07$ ,  $d'_2 / h = 0,1$ . В цьому випадку напружено-деформований стан оболонки симетричний відносно лінії  $\beta = 0$  і тому  $l^p = l_p$ ,  $N^p = N_p$  та  $M^p = M_p$ .

На рис. 2 побудовано залежності відносного розкриття тріщини в точці  $A$   $\delta^* = \delta(\beta, \gamma) E_1 / (l_0 \sigma_T)$  від відносної довжини реальної тріщини  $l_0 / R$  для параметра тонкостінності  $h / R = 0,01$ ;  $n^0 = N_2^0 / (2h \sigma_T)$  – приведенне зовнішнє навантаження.

Криві I–III відповідають оболонкам, які виготовлені з відповідного ортотропного матеріалу; буквою «i» позначено результат для ізотропної оболонки. Результати числового аналізу показують: зі збільшенням навантаження та довжини тріщини  $\delta^*$  зростає для оболонки із всіх розглянутих ортотропних матеріалів; з ростом відношення  $E_1 / E_2$  відносне розкриття тріщини зменшується. На рис. 3 показано залежність довжини пластичної зони  $\tau_0 = l_0 / l_p$  від відносного навантаження  $n^0$ . Тут криві відповідають тим самим параметрам, що і на рис. 2.

Результати приведені на рис. 2, 3 отримані за умови пластичності (13). У випадку, коли брали умову (14) результати якісно не відрізняються, але на 10–12% більші.

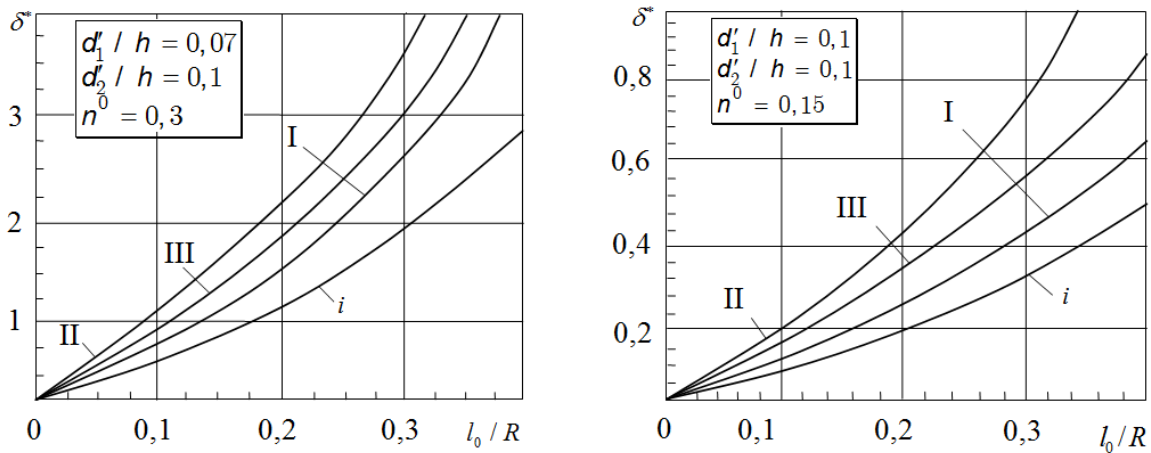


Рис. 2. Залежність відносного розкриття фронту тріщини  $\delta^*$  в точці А від її відносної довжини  $l_0/R$

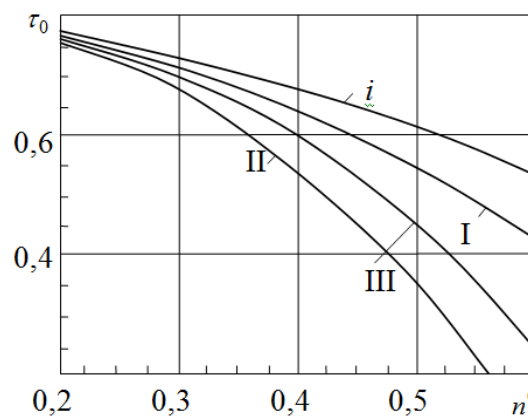


Рис. 3. Залежність довжини пластичної зони  $\tau_0$  від відносного навантаження  $n^0$

Розкриття тріщини та довжину пластичної зони визначали на випадок, коли оболонка ослаблена прямокутною внутрішньою тріщиною завглибшки  $2h - d'_1 - d'_2$ . Отримали, що  $\delta^*$  в точці А на 30% більше ніж для параболічної тріщини, а  $\tau_0$  – на 20% менше.

**Висновок.** Якщо за критерій руйнування обрати критерій критичного розкриття фронту тріщини то руйнування оболонки для розглянутих випадків розпочнеться в точці А. Числовий аналіз показав, що вибір умови пластичності мало впливає на розкриття тріщини та розмір пластичних зон.

1. Кушнір Р. М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р. М. Кушнір, М. М. Николишин, В. А. Осадчук. – Львів: Вид-во «СПОЛОМ», 2003. – 320 с.
2. Панасюк В. В. Механіка квазіхрупкого руйнування матеріалів / В. В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
3. МР 108.7 – 86. Расчеты на прочность: Оборудование энергетическое. – М.: НПО ЦНИИТМАШ, 1986. – 29 с.
4. Николишин Т. Гранична рівновага анізотропної пружно-пластичної замкнутої циліндричної оболонки з двома внутрішніми поперечними тріщинами / Т. Николишин, Ю. Пороховський // 11-й Міжнар. симпоз. українських інженерів механіків у Львові: Тези доповідей. – Львів: КІНПАТРІ ЛТД, 2013. – 47 с.
5. Николишин Т. М. Ортоотропна пружно-пластична замкнута циліндрична оболонка з двома поперечними поверхневими тріщинами / Т. М. Николишин // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип 10. – С. 152–158.
6. Прагер В. Проблемы теории пластичности / В. Прагер. – М.: Физматгиз, 1958. – 136 с.
7. Прокопович І. Б. Фундаментальний розв'язок рівнянь рівноваги анізотропної циліндричної оболонки зі скінченною зсувною жорсткістю / І. Б. Прокопович, Л. М. Сеньків // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – №1. – С. 56-61.
8. Ашкенази Е. К. Анизотропия конструкционных материалов: Справ. / Е. К. Ашкенази, Э. В. Ганов. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.

Стаття надійшла до редакції 24.09.2014.