

УДК 539.3

О. А. Мікуліч

НАПРУЖЕНИЙ СТАН НЕСКІНЧЕННОЇ ПЛАСТИНКИ З ДВОМА КОЛІНЕАРНИМИ РОЗРІЗАМИ ЗА ДІЇ ОСЦИЛЮЮЧИХ СИЛ

Шляхом сумісного використання методу граничних інтегральних рівнянь, теорії функції комплексної змінної та методу механічних квадратур розроблено методика дослідження напруженого стану багатозв'язних нескінченних пластинок за дії осцилюючого зосередженого навантаження. На основі запропонованого алгоритму чисельно розраховано динамічні напруження на границі двох колінеарних розрізів при різних відстанях між ними.

Ключові слова: пластинка, розріз, напруження.

Форм. 11. Рис. 4. Літ. 6.

Е. А. Микулич

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С ДВУМЯ КОЛЛИНЕАРНЫМИ РАЗРЕЗАМИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПУЛЬСИРУЮЩИХ СИЛ

Совместно используя метод граничных интегральных уравнений, теорию функции комплексной переменной и метод механических квадратур разработана методика исследования напряженного состояния многосвязных бесконечных пластинок при действии осциллирующей сосредоточенной нагрузки. На основе предложенного алгоритма рассчитано напряженное состояние на границе двух коллинеарных разрезов при различных расстояниях между ними.

Ключевые слова: пластинка, разрез, напряжения.

O. A. Mikulich

STRESS STATE OF INFINITE PLATE WITH TWO COLLINEAR INCISION BY ACTION OSCILLATING FORCES

Using the method of boundary integral equations, the theory of functions of a complex variable and the method of mechanical quadratures method of calculation of the stress state multiply infinite plate by action concentrated oscillating forces is developed. Based on the proposed methodology stress state on the border of two collinear incisions in an infinite plate with different distances between them is calculated.

Keywords: plate, incision, stress.

Мета роботи. Розробка методики дослідження динамічного напруженого стану нескінченних пластинок з системою розрізів та дослідження розподілу напружень на границі розрізів при дії зосереджених пульсуючих сил.

Вступ. У сучасному авіа-, судно-, машинобудуванні та будівництві для зменшення металомісткості та вартості широко використовують пластинчасті елементи конструкцій, що містять системи розрізів, отворів та інших дефектів. Вони експлуатуються при змінних у часі навантаженнях, і це зумовлює виникнення у них динамічних напружень. Моделями таких елементів конструкцій та деталей машин є пластинки. Оцінка їх міцності проводиться на основі розрахунку динамічного напруженого стану біля дефектів у пластинчастих елементах. У зв'язку з відбиттям хвиль від границь дефектів у пластинці відбувається ускладнення характеру напруженого стану. На відміну від статичного навантаження, при дії динамічних сил міцність елементів конструкцій істотно залежить від частоти прикладеного навантаження.

Постановка проблеми. Для випадку кругового отвору розв'язок задачі про розподіл динамічних напружень на границі нескінченної пластинки можна отримати у замкненому вигляді методом рядів [1]. Проте для отворів іншої форми та вирізів дослідження напруженого стану при усталених коливаннях проводиться наближено сумісним застосуванням методу рядів та методу збурення форми границі [1]. Це зумовлює істотні труднощі при числовому розрахунку напружень на границі отворів для високих частот осцилюючої сили, а також при визначенні напруженого стану для випадку витягнутих еліпсів чи прямокутників.

Аналіз основних досліджень. Розв'язки задач дифракції пружних хвиль у нескінченних пластинках, послаблених одним або системою кругових отворів за дії падаючої хвилі стиску чи пульсуючого тиску, прикладеного до границі отвору, отримані у вигляді рядів у працях О.М. Гузя [1], У.Н. Пао, С.С. Мов, Л.Д. Менте та ін. У роботах В.Д. Кубенка [1] для дослідження концентрації динамічних напружень біля отворів неканонічної форми використовувалися сумісно метод рядів та збурення форми границі.

В останні роки у працях В.В. Божидарніка, С.О. Калоєрова, О.С. Космодам'янського, І.К. Ліфанова, М.І. Мухелішвілі, М.М. Николишина, В.В. Панасюка, Г.Я. Попова, М.П. Саврука, Л.А. Фільштинського та ін. розвинуті ефективні методики дослідження напруженого стану

багатозв'язних пластин при статичних навантаженнях, що ґрунтуються на основі методу граничних інтегральних рівнянь та апарату теорії функцій комплексної змінної. Основна перевага такого підходу полягає в його універсальності та високій точності для випадку пластинок складної форми, нескінчених пластинок з отворами, у тому числі при дії локалізованих сил.

На основі методу граничних інтегральних рівнянь у працях В.Д. Купрадзе, Д.І. Шермана та ін. отримано системи інтегральних рівнянь для дослідження напружено-деформівного стану пластинок довільної форми за дії динамічного навантаження. Числові розрахунки напруженого стану проведено у роботах П. Бенерджі, К. Бреббія, С. Уокер [2] та ін. методом граничних елементів. Тут виходили з представлення типу Сомільяно та отримували інтегральні рівняння безпосередньо відносно переміщень. Для визначення напружень на границі застосовували чисельне диференціювання.

Проте при швидкозмінному напруженому стані, який має місце при високих частотах, а також для випадку вирізів — отворів у вигляді витягнутих еліпсів, застосування такого підходу може призвести до значних складнощів при числовому розрахунку та похибок.

Викладення основного матеріалу дослідження. У дослідженні запропонований підхід до вивчення динамічної концентрації напружень у нескінченних двозв'язних пластинках на основі методу граничних інтегральних рівнянь, апарату теорії функцій комплексної змінної, методу механічних квадратур, що є ефективним для розрахунку напруженого стану пластинок при усталених коливаннях.

Розглянемо нескінченну ізотропну пружну пластинку, що послаблена системою колінеарних розрізів (рис. 1). Вирізи у пластинці змодельємо з допомогою еліптичних отворів з відношенням півосей 10. Область, яку займає пластинка, позначимо через D . Прийmemo, що вона обмежена граничними контурами L_1 (границя лівого розрізу), L_2 (границя правого розрізу), L_3 (границя пластинки), причому контур L охоплює усі контури: $L=L_1+L_2+L_3$.

Віднесемо пружну пластинку до декартової системи координат Ox_1x_2 , яку розмістимо у центрі ваги пластинки. Дослідимо розподіл напружень на границі вирізів у нескінченній пластинці, а також визначимо залежність концентрації напружень від частоти зосередженого пульсуючого навантаження $(Q_1 e^{i\omega\tau}, Q_2 e^{i\omega\tau})$.

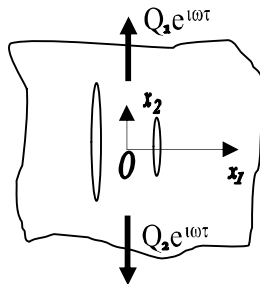


Рис. 1. Схема навантаження пластинки

Граничні умови задачі записуються у вигляді:

$$\sigma_n^{(k)}|_{\Gamma} = -\Phi e^{i\omega\tau}, \quad \tau_{sn}^{(k)}|_{\Gamma} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (1)$$

де Φ — відомі на границі розрізів функції.

Потенціальне зображення загального розв'язку для переміщень запишемо у вигляді [3]:

$$u_j = \int_L p_i U_{ij}^* ds + \int_D Q_i U_{ij}^* dD, \quad (2)$$

де p_1, p_2 — невідомі потенціальні функції, представлення для функцій U_{kj}^* вибрані з врахуванням умов випромінення на нескінченності [2]:

$$U_{ij}^* = \frac{1}{2\pi r c_2^2} (\psi \delta_{ij} - \chi r_i r_j),$$

де

$$\psi = \frac{i\pi}{2} \left(-H_0^2 \left(\frac{\omega r}{c_2} \right) + \frac{c_2}{\omega r} \left(H_1^2 \left(\frac{\omega r}{c_2} \right) - \frac{c_2}{c_1} H_1^2 \left(\frac{\omega r}{c_1} \right) \right) \right), \quad \chi = \frac{i\pi}{2} \left(H_2^2 \left(\frac{\omega r}{c_2} \right) - \frac{c_2^2}{c_1^2} H_2^2 \left(\frac{\omega r}{c_1} \right) \right),$$

$r_i = \frac{\partial r}{\partial x_i}$, $i=1, 2$, $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$, ω – частота, c_1, c_2 – швидкість хвиль розширення та

зсуву (для випадку плоского напруженого стану: $c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$, $c_2^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}$), E – модуль пружності I роду, ρ – густина матеріалу, ν – коефіцієнт Пуассона, $H_k^2(z)$ – функції Ганкеля другого роду. Інтегрування по області та вздовж границі проводиться за змінними x_1^0, x_2^0 . Тут і далі біля переміщень та напружень опущений часовий множник $e^{i\omega\tau}$, τ — час.

Для визначення напружень у довільній точці пластинки для випадку плоского напруженого стану застосовувалися формули [4]:

$$2(\sigma_n - i\tau_{sn}) = \frac{2E}{1-\nu} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u_1 - iu_2) \right) + e^{2i\alpha} \frac{2E}{1+\nu} \left(\frac{\partial}{\partial z} (u_1 - iu_2) \right), \quad (3)$$

де α — кут між нормаллю до площинки і віссю Ox_1 , $z = x_1 + ix_2$.

Задовольняючи граничні умови (1) з врахуванням представлень для напружень (3) та виразів для переміщень (2), застосовуючи формули Племеля-Сохоцького [4] в граничних переходах для інтегралів типу Коші, отримано інтегральні рівняння виду:

$$\begin{aligned} \bar{q}^R + \frac{1}{2\pi i} \frac{1+\nu}{2} \int_L \left(\left(\frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z}-\bar{t}}{z-t} - 1 \right) \frac{1}{z-t} \right) q^R dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(-\frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\bar{z}-\bar{t}} + \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{z-t} \right) \times \\ \times \bar{q}^R d\bar{t} + \int_L G_1^R q^R dt + \int_L G_2^R \bar{q}^R d\bar{t} - \int_L f_1^I q^I dt - \int_L f_2^I \bar{q}^I d\bar{t} = 2\Phi^R; \\ \bar{q}^I + \frac{1}{2\pi i} \frac{1+\nu}{2} \int_L \left(\left(\frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z}-\bar{t}}{z-t} - 1 \right) \frac{1}{z-t} \right) q^I dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(-\frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\bar{z}-\bar{t}} + \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{z-t} \right) \times \\ \times \bar{q}^I d\bar{t} + \int_L G_1^I q^I dt + \int_L G_2^I \bar{q}^I d\bar{t} + \int_L f_1^I q^R dt + \int_L f_2^I \bar{q}^R d\bar{t} = 2\Phi^I, \end{aligned}$$

де $f_i^R = f_i^R(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0)$, $f_i^I = f_i^I(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0)$, $i=1, 2$ є відомими функціями дійсного аргументу, що містять функції Бесселя II та I роду відповідно та мають вигляд, аналогічний до [6]; $q^R = i \cdot p^R \cdot ds/dt$, $q^I = i \cdot p^I \cdot ds/dt$ – невідомі функції, $G_i^R = G_i^R(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0)$, $i=1, 2$ є обмеженими і неперервними скрізь в області D функціями дійсного аргументу, Φ^R, Φ^I – відомі функції. Тут перші два інтеграли є у розумінні головного значення.

Для числового розрахунку значень невідомих функцій використано метод колокації та механічних квадратур. При розрахунках враховувалася відсутність контакту границь вирізів. Для зменшення кількості вузлових точок при числовому розрахунку застосовано сигмоїдне нелінійне перетворення Сіді [5]:

$$\xi = G(\tau) = \tau - \frac{\sin(2\pi\tau)}{2\pi}, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi.$$

Задачу зведено до розв'язання системи лінійних рівнянь для визначення невідомих на границі функцій виду [6]:

$$\begin{aligned} \bar{q}_v^{R(i)} / h + \sum_{n=1}^K \left(f_{1vn}^{R(i,1)} q_n^{R(1)} - f_{1vn}^{I(i,1)} q_n^{I(1)} \right) g'_{1n} + \sum_{n=1}^K \left(f_{2vn}^{R(i,1)} \bar{q}_n^{R(1)} - f_{2vn}^{I(i,1)} \bar{q}_n^{I(1)} \right) \bar{g}'_{1n} + \\ + \sum_{n=1}^K \left(f_{1vn}^{R(i,2)} q_n^{R(2)} - f_{1vn}^{I(i,2)} q_n^{I(2)} \right) g'_{2n} + \sum_{n=1}^K \left(f_{2vn}^{R(i,2)} \bar{q}_n^{R(2)} - f_{2vn}^{I(i,2)} \bar{q}_n^{I(2)} \right) \bar{g}'_{2n} = \Phi_v^{R(i)} / h, \\ \bar{q}_v^{I(i)} / h + \sum_{n=1}^K \left(f_{1vn}^{R(i,1)} q_n^{I(1)} + f_{1vn}^{I(i,1)} q_n^{R(1)} \right) g'_{1n} + \sum_{n=1}^K \left(f_{2vn}^{R(i,1)} \bar{q}_n^{I(1)} + f_{2vn}^{I(i,1)} \bar{q}_n^{R(1)} \right) \bar{g}'_{1n} + \\ + \sum_{n=1}^K \left(f_{1vn}^{R(i,2)} q_n^{I(2)} + f_{1vn}^{I(i,2)} q_n^{R(2)} \right) g'_{2n} + \sum_{n=1}^K \left(f_{2vn}^{R(i,2)} \bar{q}_n^{I(2)} + f_{2vn}^{I(i,2)} \bar{q}_n^{R(2)} \right) \bar{g}'_{2n} = \Phi_v^{I(i)} / h, \end{aligned}$$

де $\bar{q}_v^R = \bar{q}^R(z_v)$, $q_n^R = q^R(t_n)$, $q_v^I = q^I(t_v)$, $q_n^I = q^I(t_n)$, є дійсними та уявними частинами невідомих на границі функцій, $f_{ivn}^R = f_i^R(z_v, t_n)$, $f_{ivn}^I = f_i^I(z_v, t_n)$, $i=1, 2$, $\Phi_v^R = \Phi^R(z_v)$, $\Phi_v^I = \Phi^I(z_v)$ — відомі функції, $h=2\pi/n$, n — кількість точок розбиття границі.

Після визначення невідомих функцій напруги на границі пластинки визначаються чисельно згідно формул (3) при повороті α на 90° .

На основі запропонованої методики дослідимо розподіл максимальних динамічних напружень у пластинці, що послаблена двома однаковими вертикальними розрізами з півосями a та $\theta, 1a$ при різних відстанях δ між їх центрами. Числові розрахунки проводилися для випадку, коли пульсуючі сили прикладалися у точках $Q_1(0; 2a)$, $Q_2(0; -2a)$. При обчисленнях приймалося значення коефіцієнту Пуассона 0,3 та було вибрано 300 вузлових точок розбиття границі.

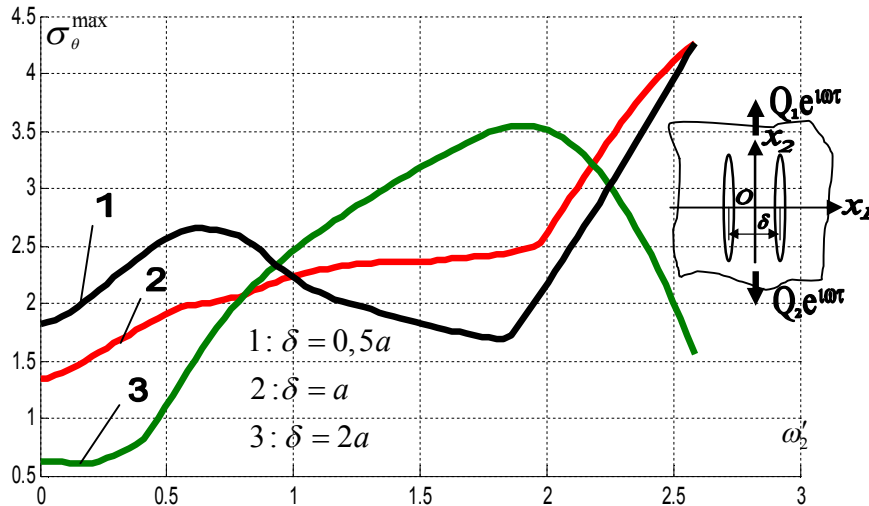


Рис. 2. Концентрація максимальних напружень у пластинці з двома розрізами однакових розмірів

З рис. 2 видно, що розподіл максимальних динамічних напружень має коливний характер. У випадку, коли у пластинці розрізи розміщені близько один біля одного істотне зростання напружень спостерігається при високих значеннях зведеної частоти $\omega'_2 = \omega \cdot a / c_2$ пульсуючого навантаження. Максимальні динамічні напруження перевищують статичні у 1,5 рази. При збільшенні відстані між розрізами динамічні напруження істотно зростають і досягають максимальних значень у середньому частотному діапазоні $\omega'_2 \in (1,7; 2)$. При цьому максимальні їх значення перевищують статичні у 6 раз. Це пояснюється відбиттям хвиль від границь вирізів та їх накладанням, що і підсилює динамічний ефект у пластинці.

Дослідимо характер розподілу напружень на границі вертикальних вирізів для випадку $\delta=0,5a$ та визначимо їх максимальні значення при характерних значеннях зведеної частоти при дії осцилюючих масових сил Q_1 та Q_2 , прикладених у точках $(0; 2a)$ та $(0; -2a)$. Результати розрахунку показано на рис. 3.

З рис. 3 видно, що при статичному навантаженні та малих значеннях частоти пульсуючих сил максимальні значення напружень виникають у великих півосях. При зростанні частоти динамічні напруження досягають максимальних значень в околі великих півосей, що пояснюється відбиттям хвиль від границь вирізів та їх накладанням. Це істотно впливає на напружений стан пластинки.

Вивчимо вплив розмірів вирізів на динамічний напружений стан у пластинках. Числові результати дослідження залежності максимальних динамічних напружень у пластинці, що послаблена двома колінеарними вертикальними розрізами з півосями a і $\theta, 1a$ та $0,5a$ і $0,05a$ при різних відстанях δ між їх центрами наведені на рис. 4. Тут суцільними кривими показано напруження на границі більшого розрізу, а пунктирними — меншого. При числових розрахунках приймалося: значення коефіцієнту Пуассона 0,3, кількість точок розбиття — 300, пульсуючі сили зосереджені у точках $Q_1(0; 2a)$, $Q_2(0; -2a)$.

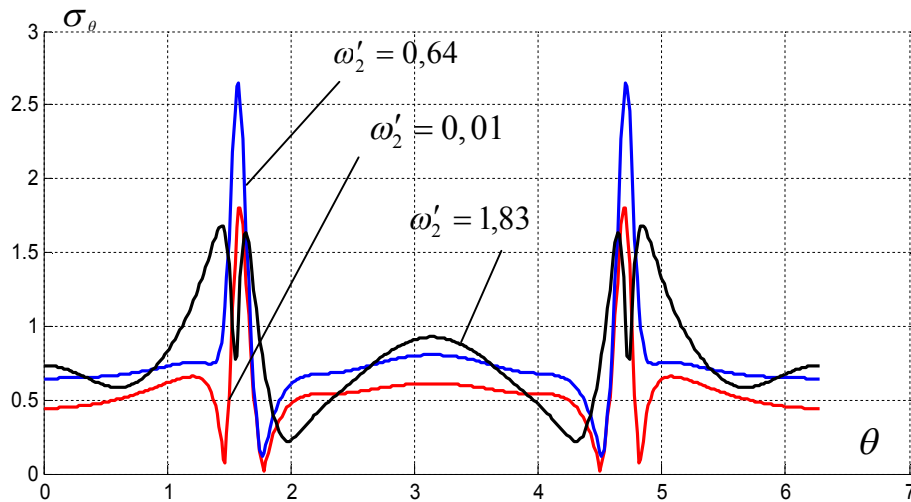


Рис. 3. Розподіл динамічних напружень у пластинці з двома розрізами однакових розмірів

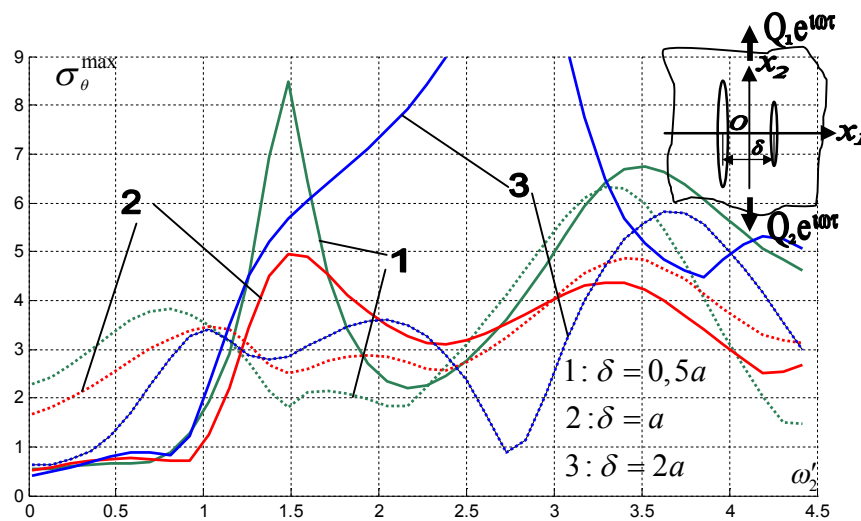


Рис. 4. Залежність максимальних динамічних напружень від зведеної частоти у пластинці, послабленій колінеарними розрізами різних розмірів

З рисунку видно, що коливний характер розподілу максимальних динамічних напружень посилюється у порівнянні з результатами, що наведені на рис. 2. При статичних навантаженнях максимальні напруження на границі більшого розрізу практично однакові при різних відстанях між розрізами. Проте максимальні статичні напруження відрізняються на границі меншого з розрізів. Найбільші вони для випадку, коли відстані між розмірами найменша.

На границі більшого розрізу для значення зведеної частоти $\omega'_2 = 1,5$ максимальні динамічні напруження перевищують відповідні статичні значення у 15,4 та 9,7 раз відповідно для $\delta = 0,5a$ та $\delta = a$. При зростанні відстані між розрізами максимальні динамічні напруження також збільшуються (у 27, 8 раз порівняно зі статичними) разом із збільшенням значення частоти, при яких вони досягаються ($\omega'_2 = 2,84$).

На границі меншого з розрізів максимальні динамічні напруження значно перевищують статичні для випадку великої відстані між розрізами у пластинці (у 5,67 рази). Для решти досліджуваних випадків збільшення напружень не є значними: у 1,65 та 1,48 при $\delta = 0,5a$ та $\delta = a$ відповідно. Істотне збільшення динамічних напружень відбувається при високих частотах: $\omega'_2 \in (3,2; 3,7)$ у 2,75; 2,85 та 9,7 рази відповідно.

Результати досліджень характеру розподілу напружень на границі вертикальних вирізів для різних відстаней між їх центрами аналогічні до випадку однакових розрізів. Числові розрахунки показали, що при збільшенні відстані між розрізами спостерігається зростання динамічних напружень у середньому частотному діапазоні, що зумовлено відбиттям та накладанням хвиль.

Висновок. На основі запропонованої методики, що ґрунтується на методі граничних інтегральних рівнянь та апараті теорії функції комплексної змінної, досліджено розподіл динамічних напружень на границі вирізів у пластинках при дії зосереджених пульсуючих сил. Встановлено, що значне зростання напружень відбувається через відбиття хвиль від границь пластинки. Досліджено вплив відстані між вирізами на розподіл напружень.

1. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракція упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 308 с.
2. Бреббиа К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. Пер. с англ. / Под. ред. Григолюка Э. И. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
3. Marc Bonnet. Équations intégrales et éléments de frontière. Application en mécanique des solides et des fluides. — Paris, CNRS Éditions / Éditions EYROLLES, 1995. – 316 p.
4. Савин Н. Г. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наукова думка, 1968. – 888 с.
5. Sidi A. A new variable transformation for numerical integration / Eds. H. Brass, G. Hammerlin // Numerical Integration IV. – Basel: Birkhauser, 1993. – P. 359-373.
6. Мікуліч О. А. Дифракція пружних хвиль у нескінченних двозв'язних пластинках. // Вісник Донецького університету: Науковий журнал. Серія А «Природничі науки» – Донецьк: ДонНТУ, 2008. – № 2/2008. – С. 114-120.

Стаття надійшла до редакції 03.10.2014.