

УДК 539.375

В. В. Перепічка**Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН
ГНУЧКЕ ОДНОСТОРОННЄ ПОКРИТТЯ НА ПІВНЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНІ З
НАСКРІЗНОЮ ВНУТРІШНЬОЮ ТРІЩИНОЮ**

У двовимірному поставленні досліджено вплив гнучкого покриття на міцність півнескінченної пластини з внутрішньою тріщиною при розтягу. Тріщина в пластинці з одностороннім покриттям змодельована розрізом з шарнірно з'єднаними в лицьовій поверхні берегами. З урахуванням обмеженої міцності покриття побудовані відповідні діаграми граничної рівноваги.

Ключові слова: півнескінченна пластинка, тріщина, гнучке покриття, міцність.

Рис. 5. Форм. 19. Літ. 5.

В. В. Перепічка**ГИБКОЕ ОДНОСТОРОННЕЕ ПОКРЫТИЕ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ
СО СКВОЗНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ТРЕЩИНОЙ**

В двумерной постановке исследовано влияние гибкого покрытия на прочность полубесконечной пластины с внутренней трещиной при растяжении. Трещина в пластине с односторонним покрытием смоделирована разрезом с шарнирно соединенными в лицевой поверхности кромками. При учете ограниченной прочности покрытия построены соответствующие диаграммы предельного равновесия.

Ключевые слова: полубесконечная пластинка, трещина, гибкое покрытие, прочность.

V. V. Perepichka**FLEXIBLE ONE-SIDED COVERAGE ON A SEMI-INFINITE PLATE WITH A
THROUGH INTERNAL CRACK**

The flexible covering influence on a strength in the tension of semi-infinite plates with crack has been investigated in twodimensional statement. Accepted, that flexible coverage of one of facial surfaces of plate becomes deformed together with founding and can maintain large enough tensions. A crack in a plate with one-side covering is considered like a cut which sides are joined along the edges with hinges. Boundary conditions of crack edges and the relationship of forces and moments on the slit corresponding to this model have been recorded. Analytical and numerical solutions of problems have been developed by singular integral equation method. The influence of boundary on the distribution of reaction in a swing joint is studied. The stress and moment intensity factors in the crack tops are calculated and the breaking load for a plate and coverage is defined too. Taking into account limited strength of covering the diagrams of limit equilibrium for plates are constructed.

Keywords: semi-infinite plate, crack, flexible covering, strength.

Оцінка впливу покриття на несучу здатність тонкостінних елементів конструкцій з неоднорідностями структури є складною і водночас важливою, як в науковому так і в прикладному сенсі, задачею. Слід зауважити, що практичний підхід висуває до подібного роду поставлень вимогу цілком природної інженерної інтерпретації результатів механіко-математичного моделювання досліджуваного об'єкта. Модель тріщини з шарнірно з'єднаними берегами дозволяє формулювати і розв'язувати задачі оцінки міцності пластин з одностороннім покриттям за наявності тріщиноподібних дефектів [1,2] у двовимірній постановці шляхом зведення поставленої задачі до одновимірного граничного інтегрального рівняння. В цій статті досліджується вплив гнучкого покриття на одній з лицьових поверхонь за наявності вільного краю на напружено-деформований стан та граничну рівновагу пластини з внутрішньою поодинокую тріщиною. Аналіз несучої здатності композиції проведений з врахуванням можливого порушення цілісності покриття.

Постановка та інтегральне рівняння задачі. Нехай півнескінченна ізотропна пластинка, що займає в вибраній декартовій системі координат область $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [-h, h]$, послаблена прямолінійною наскрізною тріщиною завдовжки $2l$, що розміщена вздовж відрізка $[a, b]$ осі абсцис (рис. 1). Приймаємо, що на одну із лицьових поверхонь пластинки нанесене гнучке покриття, яке деформується спільно з підкладкою і здатне витримувати досить великі навантаження. На нескінченності пластинка розтягується рівномірно розподіленими мембранними зусиллями $p = \text{const}$, решта поверхонь об'єкта (береги розрізу, лицеві поверхні та край пластини) вільні від напружень. Основний плоский напружений стан, що відповідає заданому зовнішньому навантаженню для бездефектної пластини, вважаємо відомим. Вимагається, зважаючи на симетрію об'єкта та навантаження, дослідити вплив покриття й вільного краю на напружено-

деформований стан і граничну рівновагу пластинки з внутрішньою наскрізною тріщиною.

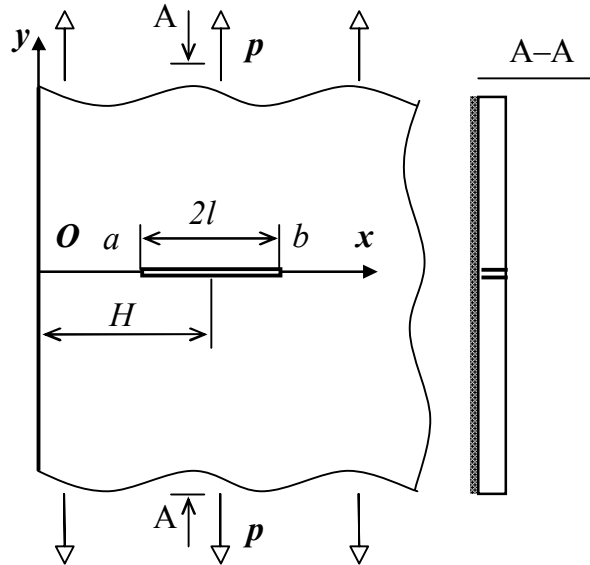


Рис. 1

Пружну рівновагу пластинки поза розрізом опишемо рівняннями узагальненого плоского напруженого стану і класичної теорії

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\Delta w = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/[a; b]. \quad (1)$$

Для мембранних зусиль і згинальних моментів на нескінченності вимагатимемо виконання умов:

$$N_x^\infty = N_{xy}^\infty = 0, \quad N_y^\infty = p, \quad M_x^\infty = M_y^\infty = 0, \quad Q_x^{*\infty} = Q_y^{*\infty} = 0. \quad (2)$$

На краю пластини ($x = 0, y \in \mathbb{R}$)

$$N_x = N_{xy} = 0, \quad M_x = 0, \quad Q_y^* = 0. \quad (3)$$

Тріщину в пластині з гнучким покриттям розглядаємо як розріз, береги якого з'єднані шарнірно в одній з лицьових поверхонь $z = sh$ ($s = +1$ або $s = -1$) [1]. Відповідні кінематичні та силові схеми представлені на рис. 2.

Запишемо крайові умови симетричної задачі на розрізі ($x \in [a, b], y = 0$):

$$[v] - sh[\theta_y] = 0, \quad (4)$$

$$M_y - shN_y = 0, \quad (5)$$

$$N_{xy} = 0, \quad Q_y^* = 0. \quad (6)$$

Тут $[v]$ – розкриття розрізу в базовій площині пластинки, $[\theta_y]$ – стрибок кута повороту нормалі, спричинений локальним згином.

Умова (4) виражає факт неперервності переміщень на з'єднаних берегах розрізу, співвідношення (5) визначає згинальний момент, що компенсує перенесення шарнірної реакції в середину поверхню пластини.

Для побудови розв'язку задачі (1)–(6) використаємо метод сингулярних інтегральних рівнянь. Запишемо інтегральні представлення зусиль та моментів на лінії розрізу через похідні від невідомих функцій стрибка [3, 4]:

$$N_y(x, 0) = p + \frac{B}{4\pi} \int_a^b L(\xi, x) [v]'(\xi) d\xi, \quad (7)$$

$$M_y(x, 0) = -\frac{D(3 - 2\nu - \nu^2)}{4\pi} \int_a^b G(\xi, x) [\theta_y]'(\xi) d\xi.$$

$$\text{Тут } L(\xi, x) = \frac{1}{\xi-x} + \frac{1}{\xi+x} - \frac{2\xi(\xi-x)}{(\xi+x)^3}, \quad G(\xi, x) = \frac{1}{\xi-x} + \frac{1}{\xi+x} - \kappa_0^2 \frac{2\xi(\xi-x)}{(\xi+x)^3}, \quad \kappa_0 = (1-\mu)/(3+\mu).$$

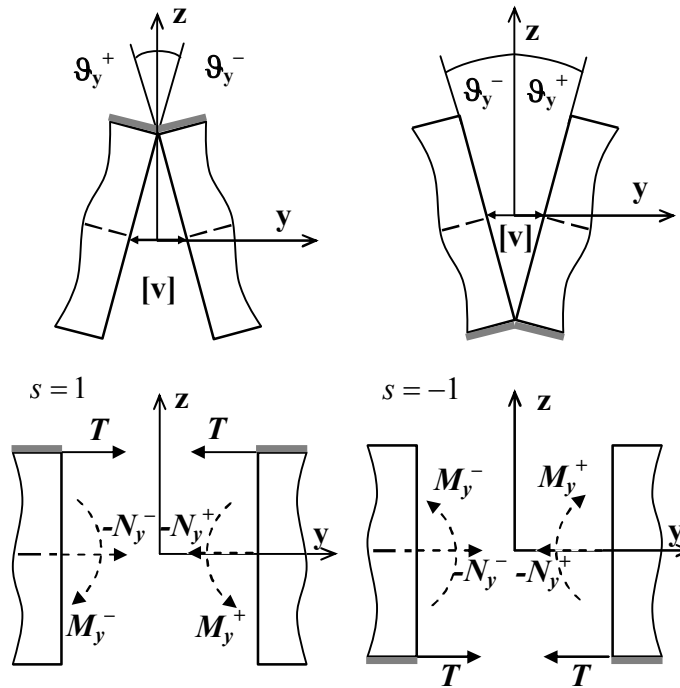


Рис. 2

Підставляючи вирази (7) у крайову умову (5) і виключаючи за допомогою формули (4) функцію $[\theta_y]$, приходимо до інтегродиференціального рівняння:

$$\frac{B}{4\pi} \int_a^b \{L(\xi, x) + \kappa^{-1}G(\xi, x)\} [v]'(\xi) d\xi = -p, \quad x \in (a, b), \quad (8)$$

де $\kappa = 3(1+\mu)/(3+\mu)$.

Крім того, на кінцях розрізу маємо умови:

$$[v(a)] = [v(b)] = 0. \quad (9)$$

В безрозмірних зовнішніх і внутрішніх змінних $\tau = (\xi - H)/l$, $t = (x - H)/l$ (див. рис. 1), котрі задаються системою координат з початком відліку посередині розрізу, інтегральне рівняння задачі (8) – (9) набере вигляду:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\tau-t} + \frac{1}{\tau+t+2/\lambda} - 2d \frac{(\tau-t)(\tau+1/\lambda)}{(\tau+t+2/\lambda)^3} \right\} f'(\tau) = -\frac{p}{1+\kappa}, \quad t \in (-1; 1); \quad f(\pm 1) = 0. \quad (10)$$

Тут $f'(\tau) = B[v(\tau)]'/4$, $d = (\kappa + \kappa_0^2)/(1 + \kappa)$, λ – безрозмірний параметр, що характеризує відносну віддаленість розрізу від краю пластини; $\lambda = l/H \in [0, 1]$.

Аналіз результатів. Наближений аналітичний розв'язок задачі (10), отриманий методом малого параметра [3, 4], має вигляд:

$$\begin{aligned} f'(t) = & -\frac{\kappa}{1+\kappa} \frac{p}{\sqrt{1-t^2}} \left\{ t + [1+d]t \frac{\lambda^2}{8} + [1+d](1-2t^2) \frac{\lambda^3}{16} \right. \\ & + ([5+4d+2d^2]t - 6t(1-2t^2)) \frac{\lambda^4}{128} + \\ & \left. + \{[4+8d+d^2](1-2t^2) + [1-2d](1+4t^2-8t^4)\} \frac{\lambda^5}{128} \right\} + O(\lambda^6) \end{aligned} \quad (11)$$

$$N_y(t,0) = p\Pi(\lambda,t),$$

$$\Pi(\lambda,t) = \frac{1}{(1+\kappa)} \left[1 + \kappa(1-d) \frac{\lambda^2}{8} \left\{ 1 - t\lambda + (1+d) \frac{\lambda^2}{8} - (7+d-8t^2)t \frac{\lambda^3}{8} \right\} + O(\lambda^6) \right] \quad (12)$$

Для коефіцієнтів інтенсивності зусиль K_1 та моментів K_3 в околі вершини розрізу ($t = \pm 1$) одержали формули:

$$K_1^\pm = \frac{p\kappa\sqrt{l}}{1+\kappa} F^\pm(\lambda), \quad K_3^\pm = -\frac{shp\sqrt{l}}{1+\kappa} F^\pm(\lambda), \quad (13)$$

$$F^\pm(\lambda) = 1 + \frac{1+d}{8} \lambda^2 \mp \frac{1+d}{16} \lambda^3 + \frac{11+4d+2d^2}{128} \lambda^4 \mp \frac{7+2d+d^2}{128} \lambda^5 + O(\lambda^6).$$

Використовуючи енергетичний критерій руйнування [5]

$$G = 2\gamma_*, \quad G = \frac{\pi}{4h^2 E} \left\{ K_1^2 + \kappa(K_3/h)^2 \right\}, \quad (14)$$

запишемо вираз для критичного навантаження:

$$p_*^\pm = p_0 \sqrt{1 + \kappa^{-1}} \Phi_1^\pm(\lambda),$$

$$\Phi_1^\pm(\lambda) = 1 - \frac{1+d}{8} \lambda^2 \pm \frac{1+d}{16} \lambda^3 - \frac{8-2d-d^2}{64} \lambda^4 \pm \frac{2-2d-d^2}{32} \lambda^5 + O(\lambda^6), \quad (15)$$

тут $p_0 = \sqrt{8Eh^2\gamma_*/(\pi l)}$ – руйнуюче навантаження для тріщини в безмежній пластині [3].

Методом механічних квадратур [3, 4] отримано і чисельний розв'язок задачі. Для зменшення похибки обчислення контактної реакції в довільній точці розрізу використовувалось регулярне представлення:

$$N_y(t,0) = \frac{p}{1+\kappa} - \frac{2(1-d)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda^2(\tau-t)(\lambda\tau+1)}{[2+\lambda(\tau+t)]^3} f'(\tau) d\tau,$$

котре отримано позбавленням від сингулярності у виразі мембранних зусиль (7) при допомозі співвідношення (10).

На рис. 3 показано вплив вільного краю на розподіл розтягуючих зусиль в покритті на відріжку, що співпадає з зімкнутими берегами розрізу при $\mu = 0.25$. Із збільшенням параметра λ зусилля в покритті зростають, а при значному наближенні дефекту до вільної границі ($\lambda > 0,5$) розподіляються немонотонно.

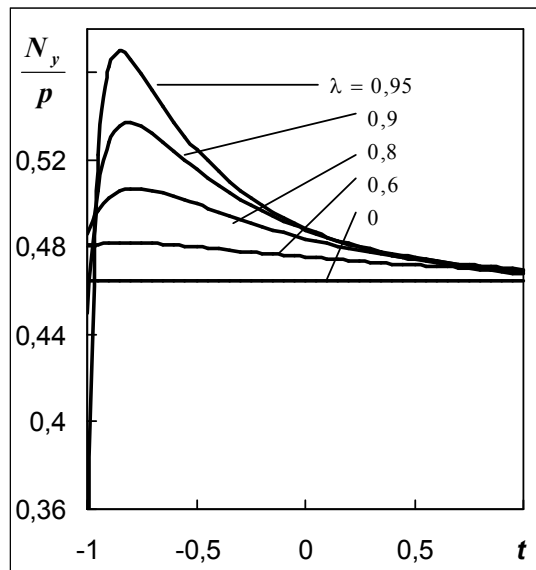


Рис. 3. Розподіл зусиль в покритті на лінії розрізу

Залежність безрозмірних значень критичного навантаження від параметра λ , в припущенні, що міцність покриття завжди вища за зусилля в ньому (необмежена міцність), представлені на рис. 4. При цьому суцільні лінії відповідають ближній до краю, а штрихові – дальній вершині розрізу. Кривими **1** представлені класичні результати [3] для пластинки без покриття, які одержують із рівняння (10) формальною заміною $\kappa = \infty$, $d = 1$. Криві **2** побудовані за числовим розв'язком для розрізу з шарнірно з'єднаними берегами.

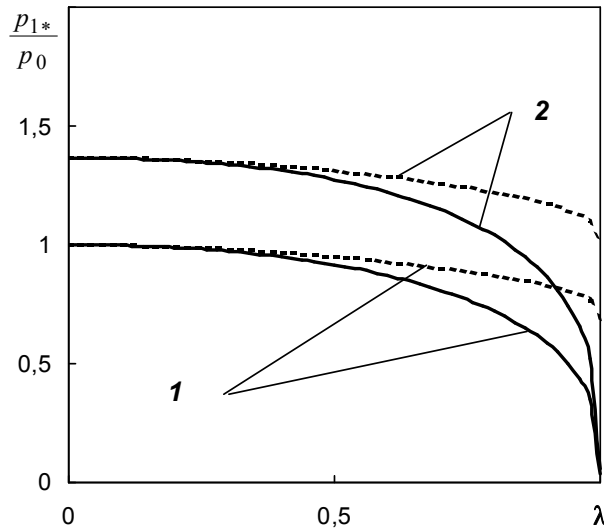


Рис. 4. Граничне навантаження для пластинки з необмежено міцним покриттям

Проаналізуємо ситуацію, коли гнучке покриття має обмежену міцність. З фізичних міркувань, враховуючи допущення прийнятої моделі, зрозуміло, що руйнування композиції може відбуватися за двома можливими механізмами, а саме: поширення тріщини без порушення цілісності покриття та втрата несучої здатності гнучкого покриття і його руйнування на лінії розрізу з подальшим розвитком уже наскрізної тріщини.

Руйнуюче навантаження, котре відповідає першому механізму, отримаємо з енергетичного критерію лінійної механіки руйнування (14) і виразу (15):

$$p_{1*} = \min \{p_*^+, p_*^-\} = p_*^- = p_0 \sqrt{1 + \kappa^{-1}} \Phi_1^-(\lambda) . \quad (16)$$

Для другого механізму руйнуюче навантаження знайдемо на основі класичної теорії міцності покриття:

$$\max_{t \in [-1,1]} N_y(t,0) \leq N_* , \quad (17)$$

де N_* – допустиме напруження в покритті.

$$\text{Позначимо } N(\lambda) = \max_{t \in [-1,1]} N_y(t,0) .$$

Границя міцності покриття досягається при такому p_{2*} , що $N(\lambda) = N_*$. На основі вищесказаного, отримаємо з (17) наступне представлення:

$$p_{2*} = \frac{N_*}{p_0} \frac{1}{N(\lambda)} p_0 . \quad (18)$$

У формулі (18) дріб $\frac{N_*}{p_0}$ трактуємо як відносну міцність покриття, а вираз $\left[\frac{N(\lambda)}{p_{2*}} \right]^{-1}$ сприймаємо

$$\text{в розумінні (12): } \frac{N(\lambda)}{p_{2*}} = \max_{t \in [-1,1]} \Pi(\lambda, t) .$$

За реальне граничне навантаження при фіксованому значенні λ вибираємо менше з підрахованих за формулами (16) і (18). Коли покриття зруйноване, на основі критерію (14) при

$K_1^\pm = p\sqrt{l}F_1^\pm(\lambda)|_{d=1}$, $K_3^\pm = 0$ (див.(13)), отримуємо вираз граничного навантаження для напівнескінченної пластинки з наскрізним дефектом без покриття:

$$p_{3*} = p_0 \Phi_1^-(\lambda)|_{d=1}. \quad (19)$$

Діаграми несучої здатності пластини побудовані на основі критеріальних співвідношень (16), (18) і (19) зображені на рис. 5 ($\mu = 0,25$). Крива 1 відображає p_{1*} , крива 3 – p_{3*} , а p_{2*} відповідає серія ліній 2', 2'', 2''', одержана за критерієм (18) при різних значеннях $N_*/p_0 = \{0,65, 0,5, 0,33\}$. Як видно із поданих графіків, при відносній міцності покриття $N_*/p_0 > 0,65$ втрата несучої здатності пластинки відбувається шляхом поширення тріщини без руйнування покриття. Для значень відносної міцності покриття в діапазоні $0,45 \div 0,65$ при малих значеннях параметра λ покриття розтріскується з подальшим нестабільним розвитком тріщини, при великих λ тріщина поширюється без порушення цілісності півки.

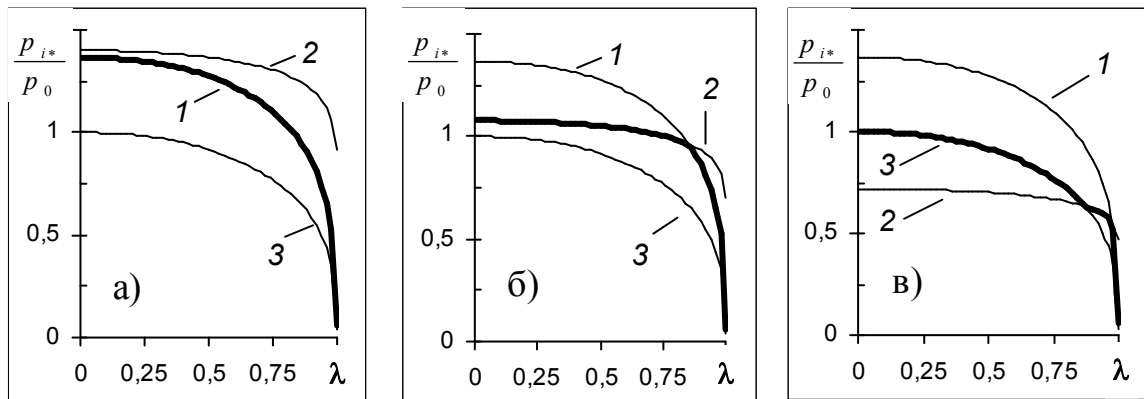


Рис. 5. Руйнівне навантаження для напівнескінченної пластинки з тріщиною, підкріпленої гнучким покриттям: а) $N_*/p_0 = 0,65$; б) $N_*/p_0 = 0,5$; в) $N_*/p_0 = 0,33$; 1 – за критерієм (16), 2 – за критерієм (17), 3 – наскрізна тріщина (19)

Висновки. Як видно із представленого матеріалу, взаємодія тріщини з вільним краєм пластинки призводить до посилення підкріплюючого ефекту покриття. Особливо добре цей висновок ілюструється у випадку слабких покриттів. При відносній міцності покриття менше 0,45 його нанесення втрачає технологічний сенс в плані опірності великим розтягувальним навантаженням при малих λ , але для тріщин близьких до краю навіть слабе покриття суттєво посилює несучу здатність пластини.

1. Шацкий И. П. Растяжение пластины, содержащей прямолинейный разрез с шарнирно соединенными кромками // Журн. Прикл. Механики и техн. физики. – 1989. – № 5. – С. 163-165.
2. Шацкий И., Перепічка В. Влияние гнучкого покриття на міцність пластинки з крайовими тріщинами // Машинознавство. – 1999. – № 9(27). – С. 44-47.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
5. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.

Стаття надійшла до редакції 20.05.2014.