

УДК 539.3

О. В. Гуда

Луцький національний технічний університет

РІВНЯННЯ ЗГИНУ ПЛАСТИН, ПОШКОДЖЕНИХ ГОРИЗОНТАЛЬНИМИ ТРІЩИНАМИ

У даній роботі розглядається згин круглої транстропної (трансверсально-ізотропної) пластини, послабленої внутрішньою дископодібною тріщиною в площині, паралельній до серединної поверхні. Отримані зручні для інженерного використання аналітичні залежності для обчислення напружень та переміщень у ізотропних і трансверсально-ізотропних пластинах, пошкоджених горизонтальною тріщиною.

Ключові слова: ізотропні та транстропні пластини, поперечний зсув, поперечне обтиснення, згинальні моменти, поперечні сили, прогин, напруження, тріщина.

Форм. 15. Табл. 2. Рис. 2. Літ. 14.

О. В. Гуда

УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА ПЛАСТИН, ПОВРЕЖДЕННЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

В данной работе рассмотрен изгиб круглой транстропной плиты, ослабленной внутренней дископодобной трещиной в плоскости, параллельной к срединной поверхности. Получены удобные для инженерного использования аналитические зависимости для вычислений напряжений и перемещений в изотропных и транстропных пластинах, поврежденных горизонтальной трещиной.

Ключевые слова: изотропные и транстропные пластини, поперечный сдвиг, поперечное обжатие, сгибальные моменты, поперечные силы, изгиб, напряжение, трещина.

O. V. Guda

THE EQUATIONS OF THE BEND OF PLATES, WHICH ARE DAMAGED BY HORIZONTAL CRACKS

In this work the bend of round transtropic plate, which is weakened by the internal diskoid crack in an area, which is parallel to the median surface, is examined. For engineering use the convenient analytical dependences for calculation of stresses and displacements in isotropic plates, which are damaged by horizontal crack, were obtained. For calculation the non-classical model of the bend of transtropic plates was used. With sufficient practical accuracy, these results allow us to predict the strength and the rigidity of plates by geometric parameters of cracks in the plate, and also by various physical characteristics of the material and its transverse anisotropy.

Keywords: isotropic and transtropic plates, transverse shear, transverse compression, bending moments, transverse forces, deflection, stress, crack.

Постановка проблеми. Проблема розрахунку та оцінка залишкової міцності конструкцій, пошкоджених тріщинами, є особливо актуальною для випадків композитних матеріалів, що мають схильність до розшарувань у суцільному середовищі, між шарами, або в околі армувальних елементів. Тому проблема розрахунку такого елемента залишається актуальною.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У даній роботі розглядається згин круглої транстропної (трансверсально-ізотропної) пластини, послабленої внутрішньою дископодібною тріщиною в площині, паралельній до серединної поверхні. Подібні задачі згину, стійкості та коливальних у постановці класичної теорії згину тонких пластин із тріщинами, розглянуті в роботах В.Ц. Гнуні та Т.А. Єгіазаряна [1-3]. Деякий аналіз цієї проблеми наведено в монографіях М.В.Марчука, М.М.Хом'яка [5], С.В.Серенсена, Г.П.Зайцева [7], Г.П.Черепанова [9] та ін. [6,8]. У даній роботі розв'язана задача осеметричного згину плити з внутрішньою тріщиною на основі рівнянь уточненої теорії згину плит середньої товщини [10].

Метою дослідження є побудова рівнянь розрахунку пластин, пошкоджених тріщинами, що враховують як ефекти поперечного зсуву, так і деформацію поперечного обтиснення; дослідження впливу поперечної анізотропії та довжини тріщини на величини напружень та переміщень у пластині.

Основні результати дослідження. Нехай кругла пластина, радіусом R із товщиною $2h$, навантажена розподіленим по поверхні $z = -h$ тиском q (рис. 1). На віддалі $h_0 \in [0; h]$ від нижньої поверхні пластина має дископодібну тріщину радіуса $l \in [0, R]$, що знаходиться паралельно до серединної поверхні.

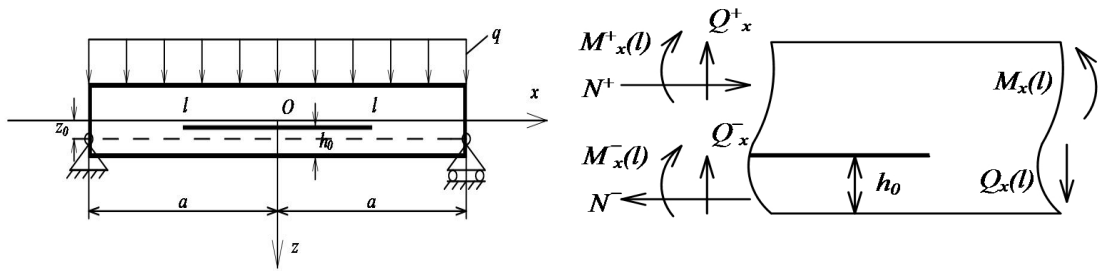


Рис. 1. Схема навантаження круглої плити

Для розв'язання поставленої задачі частково скористаємося методикою [3], яку можна було б умовно назвати «пакетною», за якою плита формально розбивається на дві області із різними жорсткостями на згин:

– область, де виникла тріщина, циліндричну жорсткість якої можна подати як алгебраїчну суму жорсткостей «пакету» верхнього і нижнього елементів пластини у вигляді:

$$D_1 = D_1^- + D_1^+ = \delta D, \quad (\delta = 1 - 3\beta + 3\beta^2, \quad \beta = h_0/2h). \quad (1)$$

Тут $D_1^+ = \tilde{E}(2h - h_0)^3/12 = (1 - \beta)^3 D$ – жорсткість частини пластини над тріщиною; $D_1^- = \beta^3 D$ – жорсткість частини пластини під тріщиною; h_0 – відстань від нижньої поверхні пластини до поверхні тріщини; $\tilde{E} = E/(1 - \nu^2)$; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона;

– область, де немає тріщини, а циліндрична жорсткість суцільної пластини дорівнює $D_2 = D = 2\tilde{E}h^3/3$.

Розв'язки диференціальних рівнянь згину пластини за такою методикою «зшиваються» умовами по лінії розділу цих областей. При цьому необхідно підкреслити, що згадана методика авторами [3] застосовувалася у тих випадках, коли теорія пластин не враховувала поперечного обтіснення, тобто вертикальні переміщення не залежали від поперечної координати z . Така методика залишає відкритим питання визначення напружень у кожній окремій пластині, що входить до пакету. Тобто, неможливо визначити реальні нормальні напруження σ_r , котрі виникатимуть у циліндричних перерізах пластин над і під тріщиною. Тому, надалі буде використана більш досконала методика, що дозволяє детальніше дослідити напружено-деформований стан та задовольняти граничні умови для кожної з частин плити, що утворилися, як по її циліндричній поверхні за лінією розділу областей, так і на лицьових поверхнях частин плити, включно із поверхнями над і під тріщиною. При розв'язуванні поставленої задачі будуть використані розрахункові рівняння неklasичної моделі згину пластин середньої товщини [11], [12] та, зокрема, формули для вертикального переміщення $W(r, z)$ і нормальних напружень σ_z у суцільній плиті та контактних напружень σ_z на поверхнях тріщини.

Рівняння згину плити розподіленим навантаженням у циліндричній системі координат за такою моделлю мають вигляд [12]:

$$D_i \Delta^2 w_i = q_{i2} - \varepsilon_1 h_i^2 \Delta^2 q_{i2} - \varepsilon_2 h_i^4 \Delta^2 q_{i2}, \quad (2)$$

$$K_i' \Delta w_\tau^{(i)} = -q_{i2}; \quad \Delta u_i - \frac{u_i}{r^2} = -\frac{A'}{\tilde{E}} \frac{dq_{i1}}{dr},$$

$$\text{де } D_i = \begin{cases} D_1 & r \in (0; l) \\ D_2 & r \in (l; R) \end{cases}, \quad i = 1 \text{ для } r \in [0; l); i = 2 \text{ для } r \in (l; R].$$

Величина нормального контактного тиску p (або напруження $\sigma_z(h - h_0)$) в області тріщини знайдено у межах гіпотез теорії тонких пластин Кірхгофа – Лява та теорій типу Тимошенка, згідно яких вертикальні переміщення w (разом із їх похідними) не залежать від поперечної координати z :

$$p = \frac{qD_1^-}{D_1^+ + D_1^-} = q\beta^3 / \delta, \quad (3)$$

де $\delta = 1 - 3\beta + 3\beta^2$.

Звідси, нормальне контактне напруження, що діє на внутрішніх поверхнях частин плити в області тріщини, записується через контактний тиск у вигляді:

$$\sigma_z(h-h_0) = -p = -q\beta^3 / \delta. \quad (4)$$

Вирази для напружень σ_r , σ_z та переміщень $U(r, z)$, $W(r, z)$ суцільної плити поза областю тріщини ($r \in [l; R]$), відповідно до цієї моделі, мають вигляд [12]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{N_r}{2h} + \frac{M_r}{I} z + \frac{zG^*}{3I} (z^2 - 0,6h^2) \left(q_2 - \Lambda q_2 h^2 \frac{G'}{E'} \right); \\ \sigma_z &= q_1 + \frac{1}{4} \left(3 \frac{z}{h} - \frac{z^3}{h^3} \right) \cdot q_2; \quad q_1 = \frac{1}{2} (q^+ - q^-), \quad q_2 = (q^+ + q^-); \\ U(r, z) &= u(r) - z \left(\frac{dw}{dr} - \frac{dw_\tau}{dr} \left(1 - (1-v^*) \frac{z^2}{3h^2} \right) \right) - \frac{(1-v^*)}{8E'h} \frac{dq_2}{dr} z^3; \\ W(r, z) &= w(r) + 2\alpha_0 z \cdot \frac{q_1}{E'} + A' \cdot \frac{z^2}{2} \Delta w + \frac{\alpha_0 \cdot q_2}{8E'h} \cdot B(z). \end{aligned} \quad (5)$$

Розв'язки рівнянь системи (2) можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} w_i &= A_i r^2 + \tilde{B}_i r^2 \ln \frac{r}{R} + C_i \ln \frac{r}{R} + K_i + \frac{q_{i2} r^4}{64D_i}, \quad (i=1,2) \\ w_\tau^{(i)} &= A_\tau^{(i)} + B_\tau^{(i)} \ln \frac{r}{R} - q_{i2} r^2 / 4K_i', \quad u_i = F_i r + L_i r^{-1} + u_i^*, \end{aligned} \quad (6)$$

де $A_i, \tilde{B}_i, C_i, K_i, A_\tau^{(i)}, B_\tau^{(i)}, F_i, L_i$ – сталі інтегрування, що знаходяться з граничних умов; u_i^* – часткові розв'язки.

Отримано вирази для максимальних переміщень у довільній точці пластини:

$$w_1^-(0) = w_{кл.} \left[1 + 3\theta^4 - \tilde{\delta} \left(\theta^2 - 2\theta^4 \frac{1+v}{3+v} \right) + \frac{16}{5+v} [2\varepsilon_0(1+\theta^2(1-t)) + \theta^2 G^* / 3] \frac{h^2}{R^2} \right] - \tilde{B}, \quad (7)$$

де $w_{кл.} = \frac{qR^4}{64D} \frac{5+v}{1+v}$ — максимальне переміщення суцільної круглї плити (товщиною $2h$) за гіпотезами класичної теорії.

Вираз для максимального переміщення серединної поверхні частини плити під тріщиною у випадку, коли, за довільного параметра β , величина $\theta = 1$ (плита повністю розділена тріщиною), має вигляд

$$w_1^- = \frac{w_{кл.}}{\delta} \left[1 + \frac{32}{5+v} [\varepsilon_0(\beta^2 + \delta(1-t)) + \frac{2G^*}{15\beta} \left((1-\beta)^3 + \frac{\delta f}{16\beta} \right) - \frac{\delta v''}{8} (1-\beta)^2] \frac{h^2}{R^2} \right] - \frac{qh}{8E'} B(\beta). \quad (8)$$

Для випадку, коли дископодібна тріщина знаходиться на рівні серединної поверхні плити ($\beta = 0,5; \delta = 0,25$), формули для нормальних напружень на зовнішніх поверхнях плити та на поверхнях тріщини спрощуються до вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma_{r1}(0, \pm h) &= \pm \frac{3(3+v)qR^2}{32h^2} (1+\theta^2) \pm 0,2G^* q; \\ \sigma_{r1}(0, \mp 0) &= \pm \frac{3(3+v)qR^2\theta^2}{16h^2} \pm 0,25G^* q. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут $\sigma_{r1}(0, \pm h)$ — максимальні напруження на зовнішніх поверхнях точок центральної осі плити; $\sigma_{r1}(0, \mp 0)$ — максимальні напруження на поверхнях тріщини в середині плити «над» і «під» тріщиною.

Для випадку $\theta = 1, \beta = 0,5$, коли тріщина ділить плиту на дві рівних половини, одержимо максимальні напруження на зовнішніх поверхнях точок центральної осі плити – $\sigma_r(0, \pm h)$ та максимальні напруження на поверхнях тріщини в середині плити «над» і «під» тріщиною – $\sigma_{r1}(0, \mp 0)$, а також максимальні переміщення $w_1^-(0)$ у вигляді наступних формул:

$$\begin{aligned}\sigma_r(0, \pm h) &= \pm \frac{3(3+\nu)qR^2}{16h^2} \pm 0,2G^*q; \\ \sigma_{r1}(0, \mp 0) &= \pm \frac{3(3+\nu)qR^2}{16h^2} \pm 0,25G^*q; \\ w_1^-(0) &= 4w_{кл.} \left[1 + \frac{8}{5+\nu} [\varepsilon_0(2-t) + G^*/6 - \nu''/32] \frac{h^2}{R^2} \right] - \tilde{B}.\end{aligned}\quad (10)$$

Тут $t(\beta = 0,5) = 1 + 0,5A'h^2/l^2$.

Порівнявши їх із відповідними формулами [11] для плити без тріщини, бачимо, що її жорсткість знижується майже у чотири рази, а міцність більше ніж удвоє, порівняно із суцільною плитою.

У випадку $\theta = 0, \beta = 1$ результати повністю співпадають із результатами для суцільної круглої плити, що одержані раніше в роботах авторів [11], а також за формулами теорії анізотропних товстих плит, одержаних С. Г. Лехніцьким [5].

Величини $\tilde{\delta}, \tilde{B}, \varepsilon_0, G^*$ та $B(\beta)$ у формулах (8)–(10) для вертикального переміщення $w_1^-(0)$ та нормальних напружень σ_{r1} враховують ефекти поперечного зсуву та обтиснення. Прирівнявши їх значення у цих формулах до нуля, одержимо елементарні формули для напружень та переміщень за гіпотезами класичної теорії тонких пластин:

$$\begin{aligned}\sigma_{r1}^\pm(0, \pm h) &= \pm \frac{3(3+\nu)qR^2}{32h^2} (1 + \theta^2); \\ \sigma_{r1}^\pm(0, \mp 0) &= \pm \frac{3(3+\nu)qR^2\theta^2}{16h^2}; \\ w_1^-(0) &= \frac{qR^4}{64D} \frac{5+\nu}{1+\nu} (1 + 3\theta^4).\end{aligned}\quad (11)$$

Аналіз отриманих числових результатів показує, що максимальні переміщення, які пораховані за формулами класичної теорії тонких пластин повністю розділених тріщиною ($\theta = 1$), за величиною обернено пропорційні до параметра δ . І «пакетна» методика [3], і запропонована уточнена методика за класичною теорією для пластин, повністю розділених тріщиною ($\theta = 1$), дають однакові результати. Разом з тим, для внутрішньої тріщини ($\theta < 1$) ці результати значно відрізняються для випадку $\theta = 0,5$ порівняно із результатами осесиметричної задачі теорії пружності, де запропонована уточнена методика є точнішою.

За результатами уточненої теорії плит середньої товщини, а також осесиметричної задачі теорії пружності, обернено пропорційна залежність переміщень від параметра δ дещо порушується (порівняно із класичною теорією). Тим часом, для випадку трансверсальної ізотропії матеріалу (10;1), ці переміщення ще зростають більше ніж у півтора рази, порівняно з ізотропною плитою відносної товщини $h/R = 0,2$.

Для обчислення значень зведених напружень $\sigma_{r1}^\pm/\sigma_{кл}$ у перерізах суцільної плити та в пластинах над і під тріщиною (табл. 1) можна скористатися формулами (5), (9), (10), (11).

Розглядається несиметричний випадок ($\beta = 0,2; \delta = 0,52$), коли тріщина ділить плиту на пластини із відношенням товщин $h_0 : h_g = 1:4$ залежно від величини області поширення тріщини $\theta = l/R$ для плити з відносною товщиною $h/R = 0,2$.

Таблиця 1. Значення зведених напружень $\sigma_{r1}^{\pm} / \sigma_{кл}$ на граничних поверхнях пластин, розділених тріщиною

z_i	ізотропія			транстропія		
	$\theta = 0$	$\theta = 0,5$	$\theta = 1$	$\theta = 0$	$\theta = 0,5$	$\theta = 1$
$-0,5h_g$	-1,015 (-0,992)	-1,149 (-1,105)	-1,553 (-1,512)	-1,231 [-1,0]	-1,366 [-1,135]	-1,769 [-1,538]
$0,5h_g$	0,595 (0,590)	0,845 (0,837)	1,548 (1,549)	0,517 [0,600]	0,992 [0,835]	1,695 [1,538]
$-0,5h_0$	0,595 (0,590)	0,334 (0,471)	-0,395 (-0,409)	0,517 [0,600]	0,197 [0,354]	-0,542 [-0,385]
$0,5h_0$	1,015 (0,993)	0,861 (0,932)	0,400 (0,389)	1,231 [1,0]	1,077 [0,846]	0,616 [0,385]

Дані в круглих дужках одержані в результаті числового розв'язування інтегральних рівнянь осесиметричної задачі теорії пружності дуальним методом граничних елементів [13] для ізотропного матеріалу. В квадратних дужках розміщені результати, які можна одержати на основі формул класичної теорії тонких пластин, коли параметр G^* прирівнюється до нуля. Ці дані (класичної теорії) однакові як для ізотропного, так і для трансверсально ізотропного матеріалів.

Аналіз даних табл.1 показує, що у випадку розділення плити тріщиною на пластини неоднакової товщини відбувається перерозподіл нормальних напружень у сторону їх збільшення в пластинах із більшою товщиною і навпаки — зменшення в пластинах із меншою товщиною. Разом з тим, більш точні (порівняно із класичною теорією тонких пластин) підрахунки показують відсутність прямо пропорційної залежності величин напружень від товщин утворених пластин, які мають місце в класичній теорії згину. Збільшення трансверсальної ізотропії матеріалу веде також і до збільшення на 13,9% (для $h/R = 0,2$) величини максимальних напружень $\sigma_r(0, \pm h)$.

Порівнюючи отримані формули для напружень у постановці осесиметричної задачі теорії пружності із аналогічними формулами [14] для напружень постановці плоскої задачі теорії пружності, а також числовими результатами дуального методу граничних елементів [13], наведені формули доцільніше модифікувати, замінивши в них параметр θ^2 на параметр θ^4 і записати у наступному вигляді:

$$\sigma_{r1}(0, \pm h) = \pm \frac{3(3+\nu)qR^2}{32h^2}(1+\theta^4) \pm 0,2G^*q; \quad (12)$$

$$\sigma_{r1}(0, \mp 0) = \pm \frac{3(3+\nu)qR^2\theta^4}{16h^2} \pm 0,25G^*q.$$

На підтвердження доцільності такої модифікації пораховано значення та побудовано графіки зміни максимальних напружень σ_r/q за поперечною координатою $z/2h$ (рис. 2) для ізотропної плити при відносній товщині $a/h = 5$ із параметрами тріщини $\theta = 0,5$ і $\theta = 1,0$. Формулам (10), (12) відповідають суцільні лінії, а дуальному МГЕ осесиметричної задачі теорії пружності – штрихові лінії.

Штрих-пунктирними лініями зображено відповідні графіки для плити без тріщини. На рис. 2 дані дуального МГЕ осесиметричної задачі теорії пружності наведені в дужках.

Аналіз отриманих результатів показує, що і радіус тріщини, і поперечна анізотропія матеріалу суттєво впливають на максимальні переміщення та напруження в плиті. Видно, що із збільшенням товщини плити названий вплив суттєво збільшується.

Вважатимемо, що за такого способу навантаження, поверхні внутрішньої тріщини знаходяться у постійному контакті, тому коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) K_I має дорівнювати нулю. Разом із тим, фронт дископодібної тріщини знаходиться у стані поперечного зсуву, навіть за умови гладкого контакту, що веде до появи КІН поперечного зсуву K_{II} . Знайти його точне значення на базі рівнянь запропонованої теорії пластин середньої товщини є складною проблемою. Одночасно, якісну зміну такого КІН можна знайти за допомогою наближеної формули

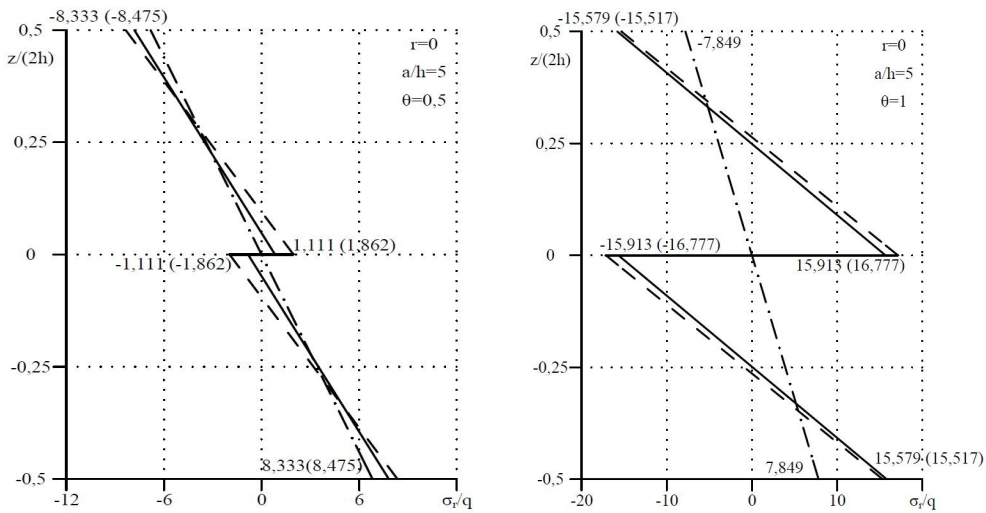


Рис. 2. Графіки зміни напружень σ_r/q за поперечною координатою $z/2h$

$$K_{II}(l, \beta) = \tau_{rz}^0(l, \beta) \frac{\sqrt{\pi l}}{E(k)} F(\theta), \tag{13}$$

де $\tau_{rz}^0(l, \beta) = -3\beta(1-\beta) \frac{Q_r(l)}{h} = 1,5q\theta\beta(1-\beta)R/h$ – "фонові" дотичні напруження, що діють в горизонтальних перерізах пластини на рівні фронту тріщини; $F(\theta) = 1,04 + 0,2\theta^2 - 0,15\theta^4$; $E(k)$ – повний еліптичний інтеграл другого роду, який у випадку дископодібної тріщини дорівнює — $E(0) = \pi/2$.

Зокрема, якщо фронт тріщини знаходиться на рівні серединної поверхні пластини ($\beta = 0,5$), то величину КІН K_{II} можна розрахувати за формулою:

$$K_{II}(l, 0,5) = 0,48q\sqrt{\pi l} \cdot \theta \cdot F(\theta) \cdot R/(\pi h), \quad (0,2 < \theta \leq 0,9). \tag{14}$$

У табл. 2 наведені у чисельнику розрахунки зміни КІН $K_{II}/q\sqrt{\pi l}$ залежно від розташування та розмірів дископодібної тріщини за формулою (13) (крім першого рядка для $\theta = 0,2$). Усі дані у знаменнику пораховані методом граничних елементів осесиметричної задач теорії пружності.

Таблиця 2. Зміна КІН K_{II} залежно від розташування та розмірів тріщини

θ	$R/h = 5$		$R/h = 10$	
	$\beta = 0,2; 0,8$	$\beta = 0,5$	$\beta = 0,2; 0,8$	$\beta = 0,5$
0,2	<u>0,111</u>	<u>0,147</u>	<u>0,221</u>	<u>0,293</u>
	0,108	0,163	0,230	0,366
0,5	<u>0,413</u>	<u>0,645</u>	<u>0,826</u>	<u>1,190</u>
	0,307	0,509	0,756	1,300
0,8	<u>0,676</u>	<u>1,057</u>	<u>1,353</u>	<u>2,113</u>
	0,604	0,919	1,448	2,529
0,9	<u>0,759</u>	<u>1,186</u>	<u>1,518</u>	<u>2,371</u>
	0,850	1,053	1,806	2,946

Для випадку $\theta \leq 0,2$ використовується модифікована формула (15) для КІН.

$$K_{II}(l, \beta) = 3\theta\beta(1 - \sqrt{\beta})R/h \frac{q\sqrt{\pi l}}{\pi} \cdot F(\theta). \quad (15)$$

Аналіз результатів, наведених у табл. 2 за формулами (14) та (15) та порашованими методом граничних елементів осесиметричної задач теорії пружності, показує що вони є однаковими для тріщин, розміщених симетрично відносно серединної поверхні пластини за обома методами. Разом із тим, результати уточненої теорії плит є дещо заниженими, тому в розрахунках можуть використовуватися тільки для попередніх (орієнтаційних) розрахунків. Для більш точних розрахунків необхідно використовувати тривимірні рівняння теорії пружності.

Висновки. Отримані зручні для інженерного використання аналітичні залежності для обчислення напружень та переміщень у ізотропних і трансверсально-ізотропних пластинах, пошкоджених горизонтальною тріщиною. Для розрахунку використано неklasичну модель згину трансверсальних плит. Ці результати дозволяють прогнозувати, із достатньою практичною точністю, міцність та жорсткість пластин за геометричними параметрами тріщин в пластині, а також різними фізичними характеристиками матеріалу, його поперечної анізотропії.

Аналіз результатів показує, що зі збільшенням довжини тріщини напруження та переміщення у плиті будуть зростати до значень, які можуть виникати у двох окремих плитах, покладених одна на одну без тертя. Тоді напруження в них стануть, приблизно, удвічі, а переміщення учетверо, більшими. Поправки від урахування деформацій поперечного зсуву та обтиснення для напружень є незначними у випадку ізотропного матеріалу. Разом з тим, для трансверсальних матеріалів (склопластики, дерево та ін.) ці поправки вже можуть бути істотними.

1. Гнуни В. Ц. К устойчивости сжатой длинной пластинки, ослабленной трещиной / В.Ц. Гнуни // Исследование современных научных проблем в вузах. – Ереван: Издательство "Айстан", 2000. – Т. 2. – С. 30–133.
2. Гнуни В. Ц., Егизарян Т. А. Об устойчивости пластинок, ослабленных трещиной / В. Ц. Гнуни, Т. А. Егизарян // Оптимальное управление устойчивости и прочности механических систем. – Ереван: Издательство ЕГУ, 2002. – С. 37–41.
3. Егизарян Т. А. Осесимметричный изгиб круглых пластин, ослабленных монетообразной трещиной / Т. А. Егизарян // Известия НАН Армении. Механика. – 2006. – Т. 59. – №2. – С. 57–61.
4. Лехницкий С. Г. К теории анизотропных толстых плит / С. Г. Лехницкий // Известия АН ССР, ОТН, мех. и машстр. – 1959. – № 2. – С. 141–145.
5. Марчук М. В. Змішана схема методу скінчених елементів для розрахунку шаруватих композитних оболонок і пластин / М. В. Марчук, М. М. Хом'як. – Львів: ППМ ім. Я.С. Підстригала НАН України, 2003. – 216 с.
6. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинках и облочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – К.: Наукова думка, 1975. – 444 с.
7. Серенсен С. В. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами / С. В. Серенсен, Г. П. Зайцев. — Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
8. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. Пер с англ. / Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 1016 с.
9. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.
10. Швабюк В. И. О одном варианте обобщенной теории трансверсально изотропных плит / В. И. Швабюк // Прикл. механика. – К., 1974. – Т. 10. – №11. – С. 87–92.
11. Швабюк В. И. Изгиб круглых трансверсально изотропных плит с учетом поперечного сдвига и обжатия / В. И. Швабюк, Р. И. Глек // Расчет пространственных строительных конструкций. – Куйбишев: КуйИСИ, 1979. – Вып. 8. – С. 95–101.
12. Швабюк В. И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально-изотропных плит / В. И. Швабюк // Прикладная механика. – 1980. – Т. 16. – №9. – С. 71–77.
13. Reissner E. On a variational theorem in elasticity // I. Math and Phys. – 1950. – V. 33. – P. 90–95.
14. Shvabyuk V., Sulym H., Pasternak Ia. Bending of orthotropic plate containing a crack parallel to the median plane. VI-th International Symposium Mechanics of materials and Structures. Augustov, May 30 – June 2, 2011. – P.144–145.

Стаття надійшла до редакції 16.10.2014.