УДК 514.8

Л.С. Громко, С.І. Пустюльга, Ю.В. Клак
Східно-Європейський національний університет, Луцький національний технічний університет, Україна

МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Дана робота присвячена аналізу відомих підходів до пошуку множини Парето-оптимальних розв'язків багатокритеріальних оптимізаційних задач. Визначено, що основною проблемою таких способів є кінцевий вибір однієї оптимальної точки на основі суб'єктивної думки експерта. Суттєвим недоліком такого вибору є необхідність додаткової інформації, яка відсутня у початковій постановці задачі оптимізації. Запропоновано удосконалений метод знаходження Парето-оптимальних рішень багатокритеріальних оптимізаційних задач на основі введення множини критеріїв якості, які у сукупності дозволяють, без втручання експертів, визначити найкращий вектор розв'язку. Перевірено ефективність запропонованого алгоритму на тестовому прикладі ранжування кафедр МБФ Луцького НТУ за заданою множиною критеріїв ефективності їх роботи.

Ключові слова: *багатокритеріальна оптимізація, Парето-оптимальні розв'язки, критерії оптимізації, вектор багатовимірного простору, множина критеріїв якості.*
Рис. 1. Форм. 11. Табл. 4. Літ. 10.

Л.С. Громко, С.И. Пустюльга, Ю.В. Клак

МЕТОД ПОИСКА ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Данная работа посвящена анализу известных подходов к поиску множества Парето-оптимальных решений многокритериальных оптимизационных задач. Определено, что основной проблемой таких способов является конечный выбор одной оптимальной точки на основе субъективного мнения эксперта. Существенным недостатком такого выбора является необходимость дополнительной информации, которая отсутствует в начальной постановке задачи оптимизации. Предложен усовершенствованный метод нахождения Парето-оптимальных решений многокритериальных оптимизационных задач на основе введения множества критериев качества, которые, в совокупности, позволяют без вмешательства экспертов определить лучший вектор решения. Проверена эффективность предложенного алгоритма на тестовом примере ранжирования кафедр МСФ Луцкого НТУ по заданному множеству критериев эффективности их работы.

Ключевые слова: *многокритериальная оптимизация, Парето-оптимальные решения, критерии оптимизации, вектор многомерного пространства, множество критериев качества.*

L. Hromko, S. Pustiulha, U. Klak

METHOD OF PARETO-OPTIMAL SEARCH THE SOLUTION OF MULTICRITERIA OPTIMIZATION PROBLEMS

This work is devoted to the analysis of known approaches to searching the set of Pareto-optimal solutions of multicriteria optimization problems. It is determined that the main problem of these methods is the final choice of one optimal end point based on the subjective opinion of an expert. A significant disadvantage of this choice is the need of additional information that is not present in the initial formulation of the optimization problem. It is proposed an improved method for finding Pareto-optimal solutions of multicriteria optimization problems by introducing a set of quality criteria which, taken together, allow to determine the best solution vector without the intervention of experts. It is tested the effectiveness of the proposed algorithm on a test example of ranking the departments of Lutsk NTU by many given criteria of their work effectiveness.

Keywords: *multicriteria optimization, Pareto-optimal solutions, optimization criteria, the vector of the multidimensional space, the set of quality criteria.*

Постановка задачі. Ефективність застосування сучасних інформаційних технологій, при розв'язанні практичних задач, значною мірою зводиться до ефективного застосування методів багатокритеріальної оптимізації. У теорії багатокритеріальної оптимізації, перш за все, вирішуються завдання прийняття рішень, одночасно за певною множиною критеріїв.

З математичної точки зору, задача оптимізації ставиться таким чином, що потрібно знайти числа $x_1, x_2, x_3..., x_n$, для яких функції

$$u_k = f_k\left(x_1, x_2, x_3.., x_n\right) \text{ при } k = 1, 2, 3..., K \quad (1)$$

досягають оптимальних (максимальних чи мінімальних) значень, з урахуванням визначеної системи обмежень

$$g_i\left(x_1, x_2, x_3..., x_n\right) \le b_i \text{ при } i = 1, 2, 3..., M \quad (2)$$

Множина точок $X = (x_1, x_2, x_3 ..., x_n)$, що задовольняє системі (1)-(2), утворює допустиму область $D \subset R^n$. Елементи множини $D \subset R^n$ називаються допустимими розв'язками або альтернативами, а числові функції $f_k(x_1, x_2, x_3 .., x_n)$ - цільовими функціями, або критеріями, заданими на множині D. У формулюванні такої задачі присутні K цільових функцій. Ці функції відображають множину $D \subset R^n$ у множину $V \subset R^K$, яка називається множиною досяжності.

У векторній формі математичну модель багатокритеріальної оптимізації (1)-(2) можна записати наступним чином:

$$\vec{f}(X) = (f_1(X), ..., f_K(X)) \to opt \text{, при. } X \in D \quad (3)$$

де $\vec{f}(X)$ - вектор-функція аргументу.

Вперше проблема багатокритеріальної оптимізації (БО) виникла у італійського вченого В. Парето при математичному дослідженні економічних процесів. Надалі інтерес до проблеми БО посилився у зв'язку із розробкою і використанням сучасної обчислювальної техніки. А на сучасному етапі розвитку науки стало зрозумілим, що багатокритеріальні задачі широко присутні також і в техніці, наприклад, при проектуванні будь-яких складних технічних систем. Тому удосконалення та розвиток методів розв'язання багатокритеріальних задач є досить актуальними.

Аналіз останніх досліджень. В існуючих наукових джерелах що до рішення багатокритеріальних оптимізаційних задач відмічається, що на відміну від завдань оптимізації з одним критерієм у БО є невизначеність цілей. Дійсно, існування розв'язку, максимізуючого множину цільових функцій, є рідкісним винятком, тому з математичної точки зору задачі БО є невизначеними і розв'язком їх може бути тільки компромісне рішення [1]. Наприклад, при купівлі власного автомобіля із максимальними критеріями якості дизайну, комфорту, безпеки і мінімальними витратами на його придбання, очевидна неможливість досягнення всіх цілей одночасно, тому що чим більші вимоги до якості першої групи критеріїв, тим більшою має бути і ціна авто.

Якщо множина заданих функції досягає оптимуму в одній і тій же точці, то кажуть, що задача має "ідеальний розв'язок". Випадки ж існування "ідеального розв'язку" в багатокритеріальних задачах вкрай рідкісні. Тому основна проблема при рішенні задач БО - формалізація принципу оптимальності, тобто визначення того, у якому сенсі знайдений оптимальний розв'язок кращий за інші. У разі відсутності "ідеального розв'язку " в задачі БО шукається компромісне рішення. Для всякої альтернативи $X \in D$ вектор із значень цільових функцій $(f_1(X), f_2(X), ..., f_K(X))$ є векторною оцінкою альтернативи. Векторна оцінка альтернативи містить, як правило, повну інформацію про оптимальність цієї альтернативи для особи, яка приймає рішення (ОПР). Порівняння будь-яких двох можливих результатів замінюється порівнянням їх векторних оцінок [2,3].

Якщо для всіх критеріїв $f_1, f_2, ..., f_K$ є два вектора розв'язків X_1, X_2 і мають місце нерівності $f_k(X_2) \geq f_k(X_1)$, то кажуть, що вектор X_2 є кращим за X_1. Тому, у задачах багатокритеріальної оптимізації точка X_s називається оптимальною за Парето, якщо не існує іншої точки X, яка була б краща, ніж X_s на заданій множині $X \in D$. Точки, оптимальні за Парето, утворюють множину точок, які не можна, в сенсі поставленої задачі, вже покращити. Оптимальні рішення багатокритеріальної задачі слід шукати лише серед елементів множини можливих альтернатив. У цій області жоден критерій не може бути покращений без погіршення хоча б одного з інших.

Як правило, розв'язок багатокритеріальної задачі полягає в побудові множини Парето-оптимальних точок із якої потім вибирається одна на основі певних міркувань експерта. Тому, одним із основних недоліків такого визначення оптимуму є проблема вибору потрібної точки. Щоб уникнути цієї проблеми часто намагаються звести багатокритеріальну задачу до однокритеріальної, для чого, зазвичай, використовується деяка додаткова інформація, яка відсутня в початковій постановці завдання [1,4,5]. Прикладами такого роду підходів можуть служити впорядкування критеріїв по їх значимості або перехід до "суперкритерію", який є сумою зважених критеріїв початкової постановки задачі.

У роботах [6,7,8,9,10] запропоновано інший підхід, який дозволяє отримувати Парето-оптимальні рішення багатокритеріальної задачі без додаткових умов, що накладаються на початкову постановку самого завдання. У такому підході рішення будь-якої багатокритеріальної задачі інтерпретувалося, як задача оптимального упорядкування всіх її можливих розв'язків. При цьому, у просторі критеріїв оцінювалася монотонна зміна відстаней допустимих значень вектору змінних до найкращих і найгірших точок, а міра близькості або віддаленості до еталонних ставала визначальною для розв'язку. Однак, вибрана кількість критеріїв якості рішення БО у наведених роботах, на наш погляд, не дає повної відповіді про найкращий розв'язок задачі без втручання експертів.

Мета роботи. Метою роботи є удосконалення методу знаходження Парето-оптимальних рішень багатокритеріальних оптимізаційних задач на основі введення множини критеріїв якості, що у сукупності дозволяють, без втручання експертів, визначити найкращий вектор розв'язку.

Основна частина. Нехай формальна постановка задачі багатокритеріальної оптимізації задана наступним чином:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_k} = \vec{f}_k\left(x_1, x_2, x_3.., x_n\right) \to \max \\ \vec{g}_i\left(x_1, x_2, x_3..., x_n\right) \le b_i \\ \vec{X} = \left(x_1, x_2, x_3..., x_n\right) \end{cases}, \tag{4}$$

де $\vec{X} = \left(x_1, x_2, x_3..., x_n\right)$ - вектор змінних,

$f_k(\overrightarrow{X})$ - ***k*** – критерій,

$g_i\left(\overrightarrow{X}\right)$ - ***i*** – обмеження.

Розв'язок такої багатокритеріальної задачі шукається у n - вимірному просторі. Для того, щоб вектор розв'язку $\vec{X} = \left(x_1, x_2, x_3..., x_n\right)$ знаходився в одиничному гіперкубі нормуємо значення цільових функцій до безрозмірних величин із діапазону від 0 до 1, використовуючи наступний вираз:

$$\overrightarrow{f_k^n}(x_n) = \frac{\overrightarrow{f_k}(x_n) - \min f_k}{\max f_k - \min f_k}. \tag{5}$$

При відсутності обмежень виду $\vec{g}_i\left(x_1, x_2, x_3..., x_n\right) \le b_i$, радіус-вектор з координатами $\vec{r}_{\max} = \left(1,1,1...,1\right)$ n - вимірного одиничного гіперкуба буде найкращим розв'язком задачі (4) (рис. 1). Довжина такого вектора визначається:

$$\left|r_{\max}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1}. \tag{6}$$

Ця довжина є своєрідним мірилом якості вектору розв'язків системи (4). Зведемо поставлену багатокритеріальну задачу до множини однокритеріальних задач, замінивши (4) наступними системами:

1. Довжина вектора $\vec{X} = \left(x_1, x_2, x_3..., x_n\right)$ повинна прагнути до максимуму.

$$\begin{cases} \left|r_k\right| \to \max \\ \vec{g}_i\left(x_1, x_2, x_3..., x_n\right) \le b_i \\ \vec{X} = \left(x_1, x_2, x_3..., x_n\right) \end{cases}. \tag{7}$$

2. Відношення довжини вектора-мірила до довжини вектора розв'язків повинно бути мінімальним.

$$\begin{cases} \dfrac{\left|r_{\max}\right|}{\left|r_k\right|} \to \min \\ \vec{g}_i\left(x_1, x_2, x_3..., x_n\right) \le b_i \\ \vec{X} = \left(x_1, x_2, x_3..., x_n\right) \end{cases}. \tag{8}$$

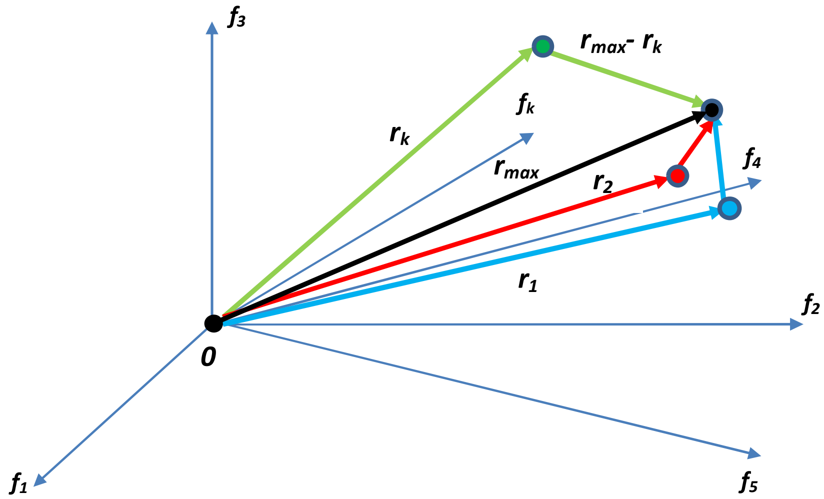

Рис. 1. **Графічна інтерпретація пошуку вектора найбільш близького за характеристиками до вектора-мірила у багатовимірному просторі**

3. Відношення довжини вектора-мірила до відстані між векторами $r_{\max}$ і r_k - прагне до максимуму.

$$\begin{cases} \dfrac{|r_{\max}|}{|r_{\max} - r_k|} \to \max \\ \vec{g}_i\left(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n\right) \le b_i \\ \vec{X} = \left(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n\right) \end{cases} . \tag{9}$$

4. Відношення відстані між векторами $r_{\max}$ і r_k до довжини вектору розв'язків повинно бути мінімальним.

$$\begin{cases} \dfrac{|r_{\max} - r_k|}{|r_k|} \to \min \\ \vec{g}_i\left(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n\right) \le b_i \\ \vec{X} = \left(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n\right) \end{cases} . \tag{10}$$

5. Скалярний добуток векторів $r_{\max}$ і r_k повинен бути мінімальним.

$$\begin{cases} \dfrac{r_{\max} \times r_k}{|r_{\max}| \times |r_k|} \to \min \\ \vec{g}_i\left(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n\right) \le b_i \\ \vec{X} = \left(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n\right) \end{cases} . \tag{11}$$

Кожна із систем (7)-(11) має наступну властивість. Оптимальний вектор розв'язання кожної із систем (7), (8), (9), (10), (11) дасть оптимальний по Парето вектор рішення задачі (4). А сукупність розв'язків систем дасть Парето-оптимальний вектор рішення багатокритеріальної задачі (4) за множиною однокритеріальних задач (7)-(11). Графічно така властивість інтерпретується як пошук вектора найбільш близького за 5 якісними характеристиками до вектора-мірила $\vec{r}_{\max} = (1,1,1 \ldots,1)$ (рис. 1).

Для перевірки запропонованої методики розв'язання багатокритеріальних задач спробуємо оцінити роботу колективів 6 кафедр МБФ Луцького НТУ за 7 критеріями, які є базовими для

Міністерства освіти і науки України при визначенні рейтингів роботи ВНЗ за рік. Довжина вектора-мірила у семивимірному просторі відповідно (6) - $|r_{\max}| = 2.646$.

Критерії:
1. Якість кадрового потенціалу кафедри.
2. Кількість штатних докторів наук.
3. Середня кількість наукових публікацій на 1 викладача кафедри.
4. Середня кількість наукових публікацій у виданнях, що входять до науково-метричної бази Scopus на 1 викладача кафедри.
5. Середня кількість винаходів на 1 викладача кафедри.
6. Кількість фінансових поступлень по госпдоговірній тематиці на 1 викладача кафедри.
7. Кількість перемог студентів у Всеукраїнських олімпіадах і конкурсах наукових робіт на 1 викладача.

Показники роботи 6 кафедр МБФ наведені у таблиці 1.

Таблиця 1

N кафедри МБФ	Кількість виділених ставок	Кількість працюючих викладачів	Кількість штатних докторів	Кількість наукових публікацій	Кількість наукових публікацій у базах Scopus	Кількість винаходів та поданих заявок	Кількість фінансових поступлень по госпдоговірній тематиці 77грн.	Кількість перемог у олімпіадах і конкурсах
1-ІКГ	5.4	6	1	10	0	1	3800	2
2-АТТ	21	23	-	57	1	5	19250	3
3-ІКЗ	10.3	12	-	38	3	9	15100	1
4-ОПВ	7	7	-	19	1	7	3000	0
5-МЛП	10.01	13	-	10	0	0	3000	1
6-ОЛК	8.8	8	1	24	0	3	7000	1

Відповідно до показників розраховані значення вибраних критеріїв (таблиця 2).

Таблиця 2

N кафедри МБФ	Якість кадрового потенціалу	Кількість штатних докторів	Середня кількість публікацій на 1 викладача	Середня кількість публікацій у Scopus на 1 викладача	Середня кількість винаходів на 1 викладача	Кількість фінансових поступлень по госпдоговірній тематиці на 1 викладача грн..	Кількість перемог у олімпіадах і конкурсах на 1 викладача
1	67%	1	1.85	0	0.185	703.7	0.37
2	91%	-	2.71	0.05	0.24	916.7	0.14
3	100%	-	3.69	0.29	0.87	1466	0.1
4	100%	-	2.71	0.14	1	428.6	0
5	92%	-	1	0	0	300	0.1
6	87.5%	1	2.73	0	0.34	795.5	0.11

За виразом (5) нормуємо показники для 7-вимірного простору критеріїв (таблиця 3).

Отже, по всім критеріям якості у запропонованому методі та даних таблиці 4 сумарний рейтинг кафедр факультету вибудовується наступним чином: Р (3, 6, 4, 1, 2, 5). Аналізуючи результати роботи кафедр за окремими критеріями якості можна оцінити за рахунок яких величини показників або їх комплексу кафедра посіла відповідне місце у загальному рейтингу.

Таблиця 3

N кафедри МБФ	Якість кадрового потенціалу Норм.	Кількість штатних докторів Норм.	Середня кількість публікацій на 1 викладача Норм.	Середня кількість публікацій у Scopus на 1 викладача Норм.	Середня кількість винаходів на 1 викладача Норм.	Кількість фінансових поступлень по госпдоговірній тематиці на 1 викладача Норм.	Кількість перемог у олімпіадах і конкурсах на 1 викладача Норм.
1	0	1	0.32	0	0.185	0.35	1
2	0.73	0	0.64	0.17	0.22	0.53	0.38
3	1	0	1	1	0.7	1	0.27
4	1	0	0.64	0.48	1	0.11	0
5	0.76	0	0	0	0	0	0.27
6	0.62	1	0.643	0	0.38	0.43	0.3

В результаті застосування систем (7)-(11) отримаємо наступні результати ранжування кафедр факультету.

Таблиця 4

N кафедри	r_k max	Місце	$\frac{\lvert r_{\max}\rvert}{\lvert r_k\rvert}$ min	Місце	$\frac{\lvert r_{\max}\rvert}{\lvert r_{\max}-r_k\rvert}$ max	Місце	$\frac{\lvert r_{\max}-r_k\rvert}{\lvert r_k\rvert}$ min	Місце	$\frac{r_{\max}\times r_k}{\lvert r_{\max}\rvert\times\lvert r_k\rvert}$ min	Місце	Сума місць	Рейтинг
1	1.503	3	1.76	3	1.404	5	1.253	4	0.77	5	20	***4***
2	1.202	5	2.201	5	1.5	3	1.466	5	0.575	3	21	***5***
3	2.136	1	1.239	1	2.07	1	0.6	1	0.496	1	5	***1***
4	1.629	2	1.625	2	1.48	4	1.1	3	0.723	4	15	***3***
5	0.807	6	3.128	6	1.12	6	2.929	6	1.067	6	30	***6***
6	1.572	2	1.777	4	1.68	2	1.06	2	0.543	2	12	***2***

Висновок.

У даній роботі проаналізовані відомі підходи до пошуку множини Парето-оптимальних розв'язків багатокритеріальних оптимізаційних задач. Визначено, що основною проблемою таких способів є кінцевий вибір однієї оптимальної точки на основі певних міркувань експерта, причому для цього необхідна додаткова інформація, що відсутня у початковій постановці задачі оптимізації. Запропоновано удосконалений метод знаходження Парето-оптимальних рішень багатокритеріальних оптимізаційних задач на основі введення множини критеріїв якості, які, у сукупності, дозволяють, без втручання експертів визначити найкращий вектор розв'язку. Перевірено ефективність запропонованого алгоритму на тестовому прикладі ранжування кафедр МБФ Луцького НТУ за заданою множиною критеріїв ефективності їх роботи.

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука. - 1982. - 254 с.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. -М.:Наука, 1980.
3. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. - М.: Наука, 1982.
4. Жилинскас А.Г. Глобальная оптимизация. Вильнюс, 1986.
5. Будаева А.А. Применение таксономии для групповой оценки объектов (альтернатив) //Устойчивое развитие горных территорий: проблемы и перспективы интеграции науки и образования: Материалы V Международной конференции. Владикавказ: Изд-во «Терек», 2004. С. 563-565.
6. Гроппен В.О. Принципы оптимизации программного обеспечения ЭВМ. //Ростов н/Д: Изд-во Ростовского университета. 1993.
7. Гроппен В.О. Новые технологии принятия решений, их развитие и применение. Труды Международной научно-технической конференции "Информационные технологии и системы: новые информационные технологии в науке, образовании, экономике", Владикавказ, 2003 г. Т. 1, стр. 60-61.
8. Гроппен В.О. Основы теории принятия решений. СКГМИ, Изд. "Терек", 2004. 106 с.
9. Гроппен В.О. Принципы принятия решений с помощью эталонов.// РАН, ж. Автоматика и телемеханика, № 4, 2006. С. 167-184.
10. Гроппен В.О. Принципы решения многокритериальных задач с помощью эталонов. Труды XII Всеросийской научно-методической конференции. Телематика, Санкт-Петербург, 6-9 июня 2005. Т. 1. С. 125-128.