

УДК514.182.7

**А. В. Золотова**  
**ДИСКРЕТНА ОДНОВИМІРНА КУСКОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПРИ**  
**КОМБІНОВАНОМУ РОЗПОДІЛІ ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

*У статті розглянуто формування складеної дискретно визначеної кривої статико-геометричним методом під дією комбінованого навантаження, що складається з рівномірного та лінійно-розподіленого. Визначено умову гладкого стикування частин кривої в дискретному вигляді, що дозволяє виключити похибку дискретизації в околі точки стику.*

*Ключові слова:* статико-геометричний метод, дискретно-визначена крива, похибка дискретизації, складена крива.

*Рис. 6. Табл. 1. Літ. 5.*

**А. В. Золотова**  
**ДИСКРЕТНАЯ ОДНОМЕРНАЯ КУСОЧНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРИ**  
**КОМБИНИРОВАННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ**

*В статье рассмотрено формирование составной дискретно определенной кривой статико-геометрическим методом под действием комбинированной нагрузки, состоящей из равномерной и линейно-распределенной. Определены условия гладкой стыковки частей кривой в дискретном виде, позволяющие исключить погрешность дискретизации в окрестности точки стыка.*

*Ключевые слова:* статико-геометрический метод, дискретно определенная кривая, погрешность дискретизации, составная кривая.

**A. V. Zolotova**  
**DISCRETE ONE-DIMENSIONAL PIECEWISE INTERPOLATION WITH A COMBINED**  
**EXTERNAL LOAD DISTRIBUTION**

*The article deals with the formation of a composite discrete specified by curve static geometric method under the combined load, consisting of uniform and discrete distributed. The conditions are determined, which makes possible to exclude the sampling error in the vicinity of the joint.*

*Keywords:* static-geometric method, discrete defined curve, the sampling error, composite curve.

**Постановка проблеми.** Відомо, що при формуванні дискретно визначеної кривої (далі ДВК) під дією рівномірного зовнішнього навантаження, її вузли належать параболі другого порядку [1]. У випадку лінійного розподілу навантаження формується крива, вузли якої належать кубічній параболі [2]. При комбінованому навантаженні (рівномірному та лінійному) формується складена крива, вузли якої в околі точки стику не відповідають зазначеним неперервним аналогам. Ця розбіжність збільшується із збільшенням кроку дискретизації [3]. Виникає задача формування складеної дискретно визначеної кривої, вузли якої належать неперервному аналогу.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** В роботі [4] було розглянуто формування складених кривих статико-геометричним методом під дією рівномірно-кускового та лінійно-кускового зовнішнього навантаження, що має злам або перепад у точці стику. Було визначено скінченно-різницеві рівняння, що забезпечують виключення похибки дискретизації в околі лінії стику складених ДВК.

**Формулювання цілей статті.** Ціллю даної статті є розробка способу формування складеної кривої під дією комбінованого навантаження, яке складається з рівномірного та лінійно-розподіленого, з виключенням похибки дискретизації в околі лінії стику.

**Основна частина.** Аналітичний опис умов гладкого стикування кривих спрощується, якщо ці криві віднесено до локальної афінної координатної системи  $uSv$ , і це ніяк не впливає на результат у глобальному випадку, коли складену криву віднесено до глобальної координатної системи  $xOy$ . Тому у подальшому всі викладки надаються у локальній системі координат, початком якої є точка  $S$  стику кривих (рис.1).

До глобальної системи координат завжди можна перейти за формулами перетворення координат [1]:

$$x_i = x_s + u \cos \alpha - v \sin \alpha ; \quad (1)$$

$$y_i = y_s + u \sin \alpha + v \cos \alpha , \quad (2)$$

де  $x_s, y_s$  – координати точки  $S$  (точка відліку локальної системи координат),

$\alpha$  – кут між осями  $u$  та  $x$ .

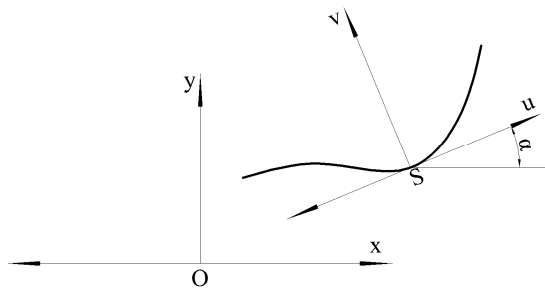


Рис.1. Глобальна  $xOy$  і локальна  $uSv$  системи координат

Якщо одна ділянка ДВК формується під дією рівномірного навантаження, а друга – лінійно розподіленого, то координати вузлів ДВК на цих ділянках відповідають кривим, що описуються рівняннями (3) і (4) (рис.2)

$$v_1 = a_1 u + a_2 u^2; \quad (3)$$

$$v_2 = b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3. \quad (4)$$

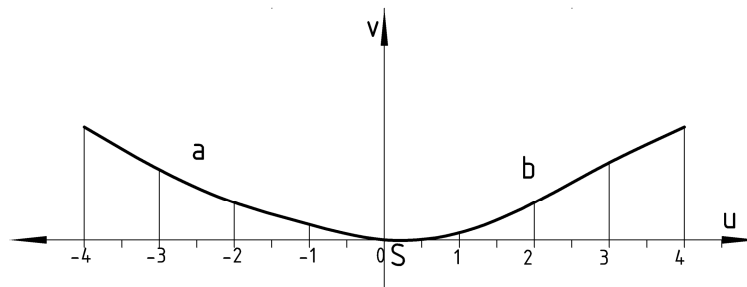


Рис.2. Складена крива

Умовою гладкого стикування кривих з першим порядком гладкості є рівність перших похідних від функцій кривих. Умова тотожності відповідних похідних виразів (3) і (4) забезпечується при тотожності їх вільних членів.

$$a_1 = b_1.$$

Тоді рівняння кубічної параболи (4) можна переписати у вигляді:

$$v_2 = a_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3. \quad (5)$$

Рівняння (3) і (5) в сумі мають чотири незалежних параметри. Підставляючи координати п'яти точок в околі точки  $O$ , отримуємо систему рівнянь (6)

$$\begin{aligned} v_{-2} &= -2a_1 + 4a_2; \\ v_{-1} &= -a_1 + a_2; \\ v_1 &= a_1 + b_2 + b; \\ v_2 &= 2a_1 + 4b_2 + 8b_3; \\ v_3 &= 3a_1 + 9b_2 + 27b_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Виключаючи параметри  $a_i$  і  $b_i$  з системи рівнянь (6), отримуємо залежність між координатами складеної ДВК при гладкому стикуванні з першим порядком гладкості

$$-3v_{-2} + 12v_{-1} + 18v_1 - 9v_2 + 2v_3 = 0. \tag{7}$$

При переході до глобальної системи координат [1] умова гладкого стику кривих (7) набуває вигляду

$$-3y_{-2} + 12y_{-1} - 20y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3 = 0. \tag{8}$$

Рівняння (8) є умовою точного гладкого стикування (з першим порядком гладкості) двох ДВК, одна з яких формується під дією рівномірного навантаження, а друга – лінійно-розподіленого.

**Приклад 2.4.** Задано дві криві a і b (рис. 3). Крива a проходить через точки D(-4; 3), C(-2; 1) і O(0; 0), крива b - через O(0; 0), A(2; 1) і B(4; 3).

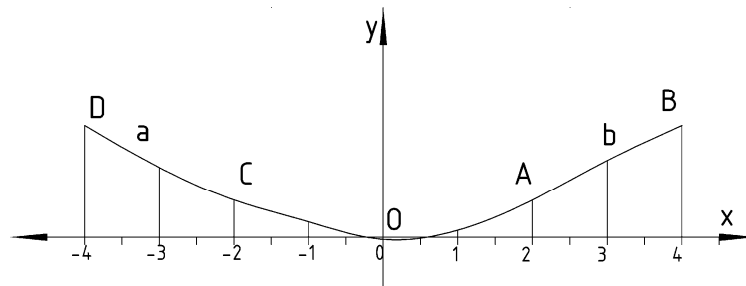


Рис. 3. Неперервна складена крива

Проведемо апроксимацію цих кривих і визначимо їх рівняння.

a:  $y = -0.25x + 0.125x^2$ ;

b:  $y = -0.25x + 0.5x^2 - 0.0625x^3$ .

Коефіцієнти при x рівні за умовою гладкого стикування з першим порядком гладкості. Потрібно визначити ординати внутрішніх вузлів дискретно визначеної складеної кривої.

Складаємо рівняння рівноваги для кожного внутрішнього вузла. Отримуємо систему рівнянь, розв'язуємо її і результати записуємо у таблицю 1.

Таблиця 1. Ординати вузлів складеної кривої

i	1	2	3	4
	Неперервна форма	ДВК1	ДВК2	ДВК3 (з врахуванням умови гладкого стикування)
-4	3	3	3	3
-3	1.875	1.8542	1.8912	1.875
-2	1	1	1	1
-1	0.375	0.4375	0.3264	0.375
0	0	0.1667	-0.1296	0
1	0.1875	0.1875	0.1875	0.1875
2	1	1	1	1
3	2.0625	2.1042	2.0301	2.0625
4	3	3	3	3

У першому стовпчику таблиці 1 – ординати неперервного аналога складеної кривої. У другому – ординати ДВК1 (рис.4), коли зовнішнє формоутворююче навантаження у вузлі O дорівнює P<sub>a</sub>, у третьому стовпчику – ординати вузлів ДВК2 (рис.5), коли зовнішнє навантаження на вузол O дорівнює P<sub>b</sub>. У четвертому стовпчику представлені ординати вузлів ДВК3 (рис.6), коли рівняння рівноваги вузла O замінено на умову гладкого стикування (7). Ординати вузлів складеної ДВК3 збігаються з ординатами неперервного аналога кривої.

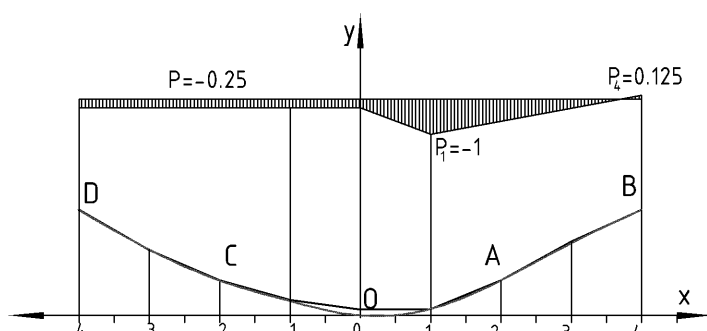


Рис.4. Схема навантаження і графічна інтерпретація ДВК1

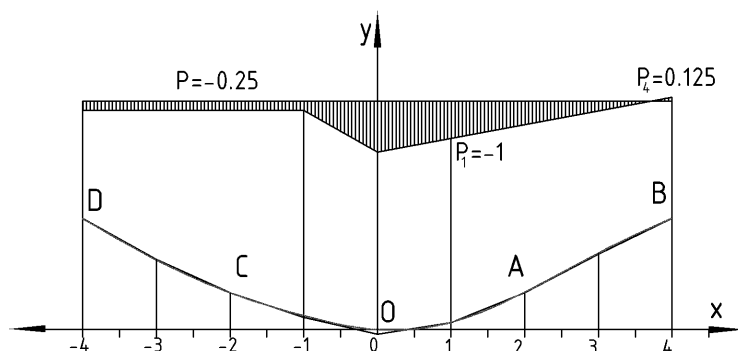


Рис.5. Схема навантаження і графічна інтерпретація ДВК2

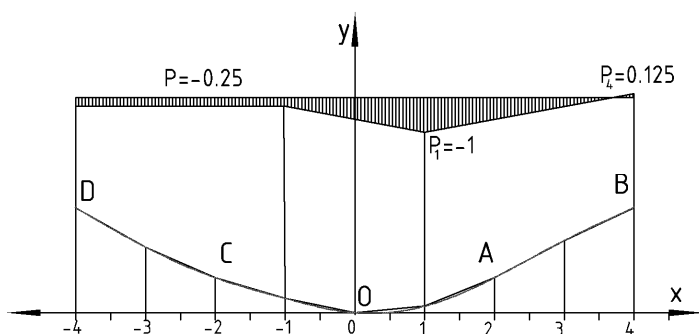


Рис.6. Схема навантаження і графічна інтерпретація ДВК3

Для виключення похибки дискретизації в околі точки стику при дискретному формуванні складеної ДВК статико-геометричним методом під дією рівномірного і лінійно-розподіленого навантаження, достатньо замінити рівняння рівноваги вузла стику на скінченно-різницеve рівняння, що описує умову точного стикування складових ДВК.

**Висновки.** Розроблено спосіб формування складеної ДВК статико-геометричним методом під дією рівномірного і лінійно-розподіленого навантаження, яке має перепад або злам у точці стику, вузли якої точно належать неперервному аналогу. Це дозволяє у дискретному вигляді розв'язувати задачі інтерполяції з довільним числом вихідних даних за аналогією з кусковою неперервною інтерполяцією.

1. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике [Текст] / Выгодский М.Я. – М.: Наука, 1977. – 871 с.
2. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. Под редакцией А.П. Нордена [Текст] / А.А. Савелов – М.: Физматгиз, 1960. – 293с.
3. Ковалёв С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: дис. ... доктора техн. наук. 05.01.01[Текст] / Ковалёв С.М. – М.: МАИ, 1986. – 348с.
4. Ковальов С.М. Точність формування складеної дискретно-визначеної кривої при кусково-лінійному розподілі зовнішнього навантаження [Текст] / С.М. Ковальов, А.В. Золотова // Прикладна геометрія та інженерна графіка: зб. наук. праць. – Вип. 79. – К.: КНУБА, 2008, – С. 19 – 23
5. Золотова А.В. Одновимірна кускова дискретна інтерполяція точок на площині [Текст] / А.В. Золотова // Наукові нотатки. – Луцьк, 2008. – Вип. 22. – С. 125 – 130.

Стаття надійшла до редакції 14.04.2015.