УДК 514.18

Е.В. Конопацкий

ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБОБЩЁННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В работе предложены аналитические зависимости, которые позволяют вычислять обобщённые тригонометрические функции через координаты точек треугольника.

Ключевые слова: *БН-исчисление, обобщённые тригонометрические функции, инвариант параллельного проецирования, координаты точек, метрический оператор трёх точек прямой.*

Рис. 3. Лит.10.

Є.В. Конопацький

ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ УЗАГАЛЬНЕНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

В роботі запропоновані аналітичні залежності, які дозволяють розраховувати узагальнені тригонометричні функції через координати точок трикутника.

Ключові слова: *БН-числення, узагальнені тригонометричні функції, інваріант паралельного проекціювання, координати точок, метричний оператор трьох точок прямої.*

E.V. Konopatskiy

THE FEATURES OF CALCULATING GENERALIZED TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

In this paper propose analytical relationships that allow us to calculate the generalized trigonometric functions of the coordinates of points in the triangle.

Key words: *BN-calculation, generalized trigonometric functions, invariant parallel projection, coordinates of points, metric operator of three points on the line.*

Постановка проблемы. В работах [1-3] были введены в прикладную геометрию обобщённые тригонометрические функции, которые являются инвариантом параллельного проецирования и позволяют делать покоординатный расчёт не только для простого отношения трёх точек прямой, но и для отношения трёх точек прямой с изломом. В рамках БН-исчисления обобщённые тригонометрические функции могут эффективно использоваться:

- для определения дуг плоских кривых в нужной на практике параметризации и для перехода от одной параметризации к другой;
- для конструирования замкнутых плоских кривых с двумя осями симметрии с помощью угловых и радиальных параметризаций;
- для аналитического определения траектории движения рабочих органов телескопических механизмов;
- для задания многофокусных кривых;
- для координации точек на топографической поверхности в геодезии;
- для разработки алгоритмов автоматической трассировки движения рабочих механизмов манипулятора, оптимизированных по затратам ресурсов…

Всё это позволило значительно расширить возможности БН-исчисления как аппарата моделирования геометрических многообразий. Все геометрические объекты, полученные в БН-исчислении, описываются с помощью точечных уравнений или расчётных алгоритмов на их основе. Однако точечные уравнения являются лишь символьной записью, которая позволяет осуществлять покоординатный расчёт и на его основе переходить к вычислительным алгоритмам, понятным для ЭВМ. Поэтому для практического использования обобщённых тригонометрических функций с применением современной компьютерной техники необходимо иметь возможность их вычисления через координаты точек.

Анализ последних исследований. Обобщенные тригонометрические функции были введены в работах [1-3] на основе теоремы синусов, обобщение на многомерное пространство которой было предложено в работе [4]. Далее в работе [5] были исследованы некоторые свойства обобщенных тригонометрических функций, что обогатило инструментарий теории обобщенных тригонометрических функций и расширило возможности их использования. В этой работе были заложены основы обобщенной гониометрии. Примеры использования обобщенных тригонометрических функций для определения плоских кривых, а также для перехода от параметризации одного вида к другому, были рассмотрены в работах [6]. Параллельно были исследованы возможности использования обобщенных тригонометрических функций для задания геометрических многообразий в плоскости общего положения [7]. Также была получена и доказана основная теорема обобщённых тригонометрических функций [8] и исследованы её свойства. Однако чем больше развивалась теория обобщённых тригонометрических, тем острее становился вопрос о способах вычисления обобщённых тригонометрических функций.

Все исследования по данной теме проводятся в рамках математического аппарата геометрического моделирования – БН-исчисление [9-10].

Формулировка целей статьи. Разработать способы вычисления обобщённых тригонометрических функций.

Основная часть. Для БН-исчисления (точечное исчисление Балюбы-Найдыша) важным является выбор параметра, который должен быть инвариантным относительно параллельного проецирования для обеспечения покоординатного расчёта. Таким свойством обладает простое отношение трёх точек прямой. Стандартные тригонометрические функции определяются углом, который при проецировании искажается, следовательно, стандартные тригонометрические функции не могут быть параметрами БН-исчисления.

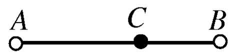

Рис. 1. **Простое отношение трех точек прямой**

Рассмотрим более подробно простое отношение трех точек прямой (рис. 1), которое в рамках аффинной геометрии является инвариантом параллельного проецирования и выражается следующим соотношением длин отрезков: $ABC = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{A-C}{C-B}$. Представим прямую ACB (рис. 1), как вырожденный треугольник, для которого угол при вершине C равен π.

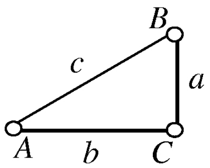

Рис. 2. **Простое отношение трёх точек прямой с изломом**

Если это угол будет равен $\dfrac{\pi}{2}$ (рис. 2), то получим прямоугольный треугольник, в котором отношение отрезков определяется через стандартные тригонометрические функции: $ABC = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{b}{a} = ctgA = tgB$.

Аналогичным образом можно представить стандартные синус и косинус с помощью простого отношения трёх точек прямой с изломом: $CAB = \dfrac{CB}{BA} = \sin A$; $CBA = \dfrac{AC}{BA} = \cos A$.

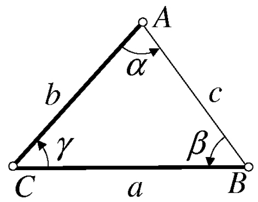

Рис. 3. **К понятию обобщённых тригонометрических функций**

Если угол γ при вершине C будет не кратным $\dfrac{\pi}{2}$ (рис. 3), то получим более общий случай, для которого простое отношение длин сторон треугольника определяет обобщенные тригонометрические функции. Обобщенные тригонометрические функции определяются с помощью двух углов: аргумента и базового угла (аналог прямого угла в прямоугольном треугольнике). Так как в аффинной геометрии сумма углов любого треугольника равняется π, зафиксировав два угла из трех, тем самым фиксируем конкретный треугольник. Поскольку, в рамках аффинной геометрии треугольник является инвариантом параллельного проецирования, то и обобщенные тригонометрические функции также будут инвариантны относительно параллельного проецирования и могут быть использованы в качестве параметра в БН-исчислении. В общем случае обобщенные тригонометрические функции определяются через отношение длин сторон треугольника. Можно выразить любую обобщенную функцию через углы с помощью теоремы синусов.

$$\begin{gathered} CBA=\frac{AC}{BA}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\sin_{\gamma}\beta=\cos_{\gamma}\alpha. \\ CAB=\frac{CB}{BA}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\sin_{\gamma}\alpha=\cos_{\gamma}\beta. \\ BAC=\frac{CB}{AC}=\frac{\sin_{\gamma}\alpha}{\cos_{\gamma}\alpha}=tg_{\gamma}\alpha. \\ ABC=\frac{AC}{CB}=\frac{\cos_{\gamma}\alpha}{\sin_{\gamma}\alpha}=ctg_{\gamma}\alpha. \end{gathered} \tag{1}$$

Используя геометрический смысл обобщенных тригонометрических функций, который выражается соотношениями (1), определим их с помощью метрического оператора трёх точек прямой БН-исчисления:

$$\begin{gathered} \sin_{\gamma}\alpha=\frac{|CB|}{|BA|}=\sqrt{\frac{\sum_{BB}^{C}}{\sum_{AA}^{B}}}. \quad \cos_{\gamma}\alpha=\frac{|AC|}{|BA|}=\sqrt{\frac{\sum_{CC}^{A}}{\sum_{AA}^{B}}}. \\ tg_{\gamma}\alpha=\frac{|CB|}{|AC|}=\sqrt{\frac{\sum_{BB}^{C}}{\sum_{CC}^{A}}}. \quad ctg_{\gamma}\alpha=\frac{|AC|}{|CB|}=\sqrt{\frac{\sum_{CC}^{A}}{\sum_{BB}^{C}}}. \end{gathered} \tag{2}$$

Переходя от точечной к координатной форме для трёхмерного пространства получим:

$$\begin{gathered} \sin_{\gamma}\alpha=\sqrt{\frac{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2}{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}. \\ \cos_{\gamma}\alpha=\sqrt{\frac{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2+(z_A-z_C)^2}{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}. \\ tg_{\gamma}\alpha=\sqrt{\frac{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2}{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2+(z_A-z_C)^2}}. \\ ctg_{\gamma}\alpha=\sqrt{\frac{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2+(z_A-z_C)^2}{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2}}. \end{gathered} \tag{3}$$

Для остальных углов треугольника ABC (рис. 3) можно получить аналогичные соотношения.

Как было сказано ранее, обобщённый синус был получен на основе теоремы синусов. Используя геометрический смысл метрического оператора трёх точек прямой [9], получим соотношения, связывающие обобщённые тригонометрические функции со стандартными косинусами углов треугольника.

$$\sin_\gamma \alpha = \frac{\cos\alpha \sum_{AB}^{C}}{\cos\gamma \sum_{BC}^{A}}, \quad \cos_\gamma \alpha = \frac{\cos\beta \sum_{AB}^{C}}{\cos\gamma \sum_{AC}^{B}}.$$
$$tg_\gamma \alpha = \frac{\cos\alpha \sum_{AC}^{B}}{\cos\beta \sum_{BC}^{A}}, \quad ctg_\gamma \alpha = \frac{\cos\beta \sum_{BC}^{A}}{\cos\alpha \sum_{AC}^{B}}, \qquad (4)$$

где $\sum_{BC}^{A}$, $\sum_{AC}^{B}$ и $\sum_{AB}^{C}$ – метрические операторы трёх точек прямой.

Выводы. В статье получены аналитические зависимости, которые позволяют вычислять обобщённые тригонометрические функции через координаты точек, что позволяет использовать инвариантные свойства обобщенных тригонометрических функций в БН-исчислении для определения геометрических многообразий, поскольку они позволяют осуществить покоординатный расчёт и дают возможность перейти от символьной записи точечных уравнений к уравнениям параметрическим, которые определены в глобальной декартовой системе координат.

1. Геометричний сенс узагальнених тригонометричних функцій. / [Балюба І.Г., Верещага В.М., Конопацький Є.В., Шацький В.В.] // Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 55. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С.42-47.
2. Конопацкий Е.В. Тригонометрические функции инвариантные относительно параллельного проецирования / Конопацкий Е.В. // Международная молодежная научная конференция по естественнонаучным и техническим дисциплинам «Научному прогрессу – творчество молодых», 19-20 апр. 2013 г. Материалы и доклады в 3 ч. Ч.1. – Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2013. – С.89-91.
3. Конопацький Є.В. Суть узагальнення стандартних тригонометричних функцій / Конопацький Є.В. // Матеріали ІІ-ї Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності». Вип. 2. – К.: ДІЯ, 2013 р. – С.112-117.
4. Верещага В.М. Теорема синусів у багатовимірному просторі / Верещага В.М., Конопацький Є.В. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип. 91. – К.: КНУБА, 2013. – С.131-136.
5. Конопацький Є.В. Дослідження властивостей узагальнених тригонометричних функцій / Конопацький Є.В. // Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 56. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – С.263-267.
6. Балюба І.Г. Використання узагальнених тригонометричних функцій для визначення плоских кривих / Балюба І.Г., Верещага В.М., Конопацький Є.В. // Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 57. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – С.119-124.
7. Конопацкий Е.В. Особенности параметризации геометрических объектов в БН-исчислении / Конопацкий Е.В. // Научная дискуссия: вопросы технических наук. № 8-9(11): сборник статей по материалам XIII-XIV международной заочной научно-практической конференции. – М., Изд. «Международный центр образования и науки», 2013. – С.12-16.
8. Конопацький Є.В. Основна теорема узагальнених тригонометричних функцій / Конопацький Є.В. // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В. Найдиш. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. – Вип. 3. – С.73-77.
9. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: диссертация на соискание научной степени доктора технических наук: 05.01.01 / Балюба Иван Григорьевич – Макеевка: МИСИ, 1995. – 227 с.
10. Найдыш В.М. Алгебра БН-исчисления / Найдыш В.М., Балюба И.Г., Верещага В.М. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип. 90. – К.: КНУБА, 2012. – С.210-215.

Статья пришла в редакцию 17.04.2015.