

УДК 514.182.7

О. В. Мостовенко*Київський національний університет будівництва і архітектури***СУПЕРПОЗИЦІЇ ДИСКРЕТНО ПОДАНИХ ПОВЕРХОНЬ (ДПП) НА СІТЦІ З ПРЯМОКУТНИМИ АБО КВАДРАТНИМИ У ПЛАНІ КЛІТИНАМИ**

У публікації розглянуто можливість керування формою врівноважених оболонок, які є дискретними аналогами неперервних криволінійних поверхонь, з урахуванням об'єму, що перекривається за рахунок використання апарату суперпозицій. Виведено формулу для підрахунку числа вихідних образів (сіток). Цей спосіб керування формою поверхні при заданому об'ємі дозволяє на стадії ескізного архітектурного проектування обирати найкращу форму з двопараметричної множини форм за енергоефективними, естетичними та іншими ознаками.

Ключові слова: суперпозиція, врівноважене покриття, поверхня, дискретний каркас, управління формою, об'єм.

А.В. Мостовенко**СУПЕРПОЗИЦИИ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ (ДПП) НА СЕТКЕ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ИЛИ КВАДРАТНЫМИ В ПЛАНЕ ЯЧЕЙКАМИ**

В публикации рассмотрена возможность управления формой уравновешенных оболочек, которые являются дискретными аналогами непрерывных криволинейных поверхностей, с учетом перекрываемого объема, за счет использования аппарата суперпозиций. Выведена формула для подсчета числа исходных образов (сеток). Этот способ управления формой поверхности при заданном объеме позволяет на стадии эскизного архитектурного проектирования выбирать наилучшую форму из двухпараметрического множества форм по энергоэффективному, эстетическому и другим признакам.

Ключевые слова: суперпозиция, уравновешенное покрытие, поверхность, дискретный каркас, управление формой, объем.

A. Mostovenko**SUPERPOSITION OF DISCRETE CAST SURFACES (DCS) ON THE GRID WITH RECTANGULAR OR SQUARE IN TERMS OF CELLS**

This publication deals with the ability to control the form of balanced membranes that are discrete analogues of continuous curved surfaces, given the volume by overlapping of using superposition. We derive a formula for counting the number of output images (nets). This method of control shape of a given volume allows for preliminary architectural design stage to choose the best form of twoparametric plural forms for energy efficient, aesthetic and other features.

Keywords: superposition, balanced coverage, surface, discrete frame, form management, volume.

Постановка проблеми. Однією з важливих задач при проектуванні просторових архітектурних покриттів є енергозбереження, особливо, враховуючи наше прагнення до стрімкої євроінтеграції. В процесі архітектурного проектування задачі енергозбереження можна пов'язати з об'ємом приміщення, який, в свою чергу, пов'язано з витратами на опалення, вентиляцію та кондиціонування підоболонкового простору. При цьому виникає проблема управління формою поверхні покриття при заданому об'ємі, що перекривається. Ця проблема ускладнюється, якщо покриття є безмоментним і поверхня не може бути описана аналітичним рівнянням. Такі поверхні формуються в дискретному вигляді статико-геометричним методом [1].

Аналіз останніх досліджень. В роботі [2] для управління формою розтягнутих врівноважених сіток, що моделюють поверхні тентових покриттів, використано метод суперпозицій або складання функцій. Автором цієї роботи запропоновано спосіб управління формою врівноважених розтягнутих сіток з однаковою топологією.

Сітка із заданими параметрами управління формою утворюється при функціональному додаванні координат вузлів врівноважених вихідних сіток з певними ваговими коефіцієнтами $k_{i,j}$:

$$X_{i,j} = k_{1x} \cdot X'_{i,j} + k_{2x} \cdot X''_{i,j} + k_{3x} \cdot X'''_{i,j} + \dots + k_{nx} \cdot X^n_{i,j}; \quad (1)$$

$$Y_{i,j} = k_{1y} \cdot Y'_{i,j} + k_{2y} \cdot Y''_{i,j} + k_{3y} \cdot Y'''_{i,j} + \dots + k_{ny} \cdot Y^n_{i,j}; \quad (2)$$

$$Z_{i,j} = k_{1z} \cdot Z'_{i,j} + k_{2z} \cdot Z''_{i,j} + k_{3z} \cdot Z'''_{i,j} + \dots + k_{nz} \cdot Z^n_{i,j}, \quad (3)$$

де $X_{i,j}, Y_{i,j}, Z_{i,j}$ – координати нової сітки;

$k_{1x}, k_{2x}, \dots, k_{nx}, k_{1y}, k_{2y}, \dots, k_{ny}, k_{1z}, k_{2z}, \dots, k_{nz}$ – коефіцієнти суперпозиції.

Якщо задано координати вузлів всіх вихідних сіток і коефіцієнти суперпозиції за формулами (1-3) можна підрахувати всі координати нової сітки, яка також буде врівноважена зусиллями:

$$P_{i,j} = k_{1z} \cdot P'_{i,j} + k_{2z} \cdot P''_{i,j} + k_{3z} \cdot P'''_{i,j} + \dots + k_{nz} \cdot P^n_{i,j}. \quad (4)$$

Дійсно формули (1-3) можна розглядати, як суму афінних перетворень вихідних сіток і тому нова сітка буде також врівноваженою під дією вертикальних зусиль (4).

Дослідження в роботі [2] не пов'язані з формуванням врівноважених сіток, що перекривають задані об'єми.

Основна частина. Метод суперпозицій дозволяє використовувати необмежене (з теоретичної точки зору) число параметрів управління формою ДПП. Ця властивість надає додаткові можливості для управління формою опорного контура сітки. Основною умовою використання методу суперпозицій є однакова топологія вихідних образів (сіток).

Оскільки дане дослідження пов'язане з підрахунком об'ємів, що перекриваються дискретно визначеними поверхнями на правильній у плані сітці, абсциси і ординати вузлів сітки не потребують складних перетворень. Тому рівняння (1), (2) в подальшому розглядати не будемо. Рівняння (3) дозволяє керувати формою ДПП на заданій у плані правильній сітці. Число n коефіцієнтів $k_{1z}, k_{2z}, \dots, k_{nz}$ відповідає числу вихідних поверхонь. Конструктивними параметрами ДПП є аплікати окремих вузлів, які можуть бути заданими.

Для того, щоб число рівнянь відповідало числу невідомих, коефіцієнти $k_{1z}, k_{2z}, \dots, k_{nz}$ повинні бути невідомими.

Якщо відповідні задані вузли вихідних і результуючої поверхонь мають однакові аплікати, то для таких вузлів рівняння суперпозиції набуває вигляду:

$$k_{1z} + k_{2z} + \dots + k_{nz} = 1. \quad (5)$$

Якщо вихідні і результуюча ДПП мають l таких вузлів, при m заданих, то число вихідних поверхонь суперпозиції підраховуються за формулою:

$$n = m - l + 1. \quad (6)$$

Для пояснення формули (6) наведемо тривіальний приклад для однієї клітини сітки:

Приклад 1.

Задано аплікати кутових вузлів чотирьох вихідних образів (рис. 1):

$$\begin{aligned} Z_A^I &= Z_A^{II} = Z_A^{III} = Z_A^{IV}; & Z_B^I, Z_B^{II}, Z_B^{III}, Z_B^{IV}; \\ Z_C^I &= Z_C^{II} = Z_C^{III} = Z_C^{IV}; & Z_D^I, Z_D^{II}, Z_D^{III}, Z_D^{IV} \end{aligned} \quad (7)$$

Задано також аплікати кутових вузлів результуючого образу:

$$Z_A, Z_B, Z_C, Z_D (Z_A = Z'_A; Z_C = Z'_C) \quad (8)$$

Необхідно знайти коефіцієнти суперпозиції вихідних образів для отримання заданого результату.

Число вихідних образів (чотири) відповідає числу заданих аплікат результуючого образу. Аналітичний вираз суперпозиції має вигляд:

$$\begin{aligned}
 Z_A &= k_1 Z_A^I + k_2 Z_A^{II} + k_3 Z_A^{III} + k_4 Z_A^{IV}; \\
 Z_B &= k_1 Z_B^I + k_2 Z_B^{II} + k_3 Z_B^{III} + k_4 Z_B^{IV}; \\
 Z_C &= k_1 Z_C^I + k_2 Z_C^{II} + k_3 Z_C^{III} + k_4 Z_C^{IV}; \\
 Z_D &= k_1 Z_D^I + k_2 Z_D^{II} + k_3 Z_D^{III} + k_4 Z_D^{IV},
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

де число невідомих коефіцієнтів відповідає числу рівнянь, але відповідно до умов (7) та (8) перше і третє рівняння системи (9) стають однаковими:

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 1. \tag{10}$$

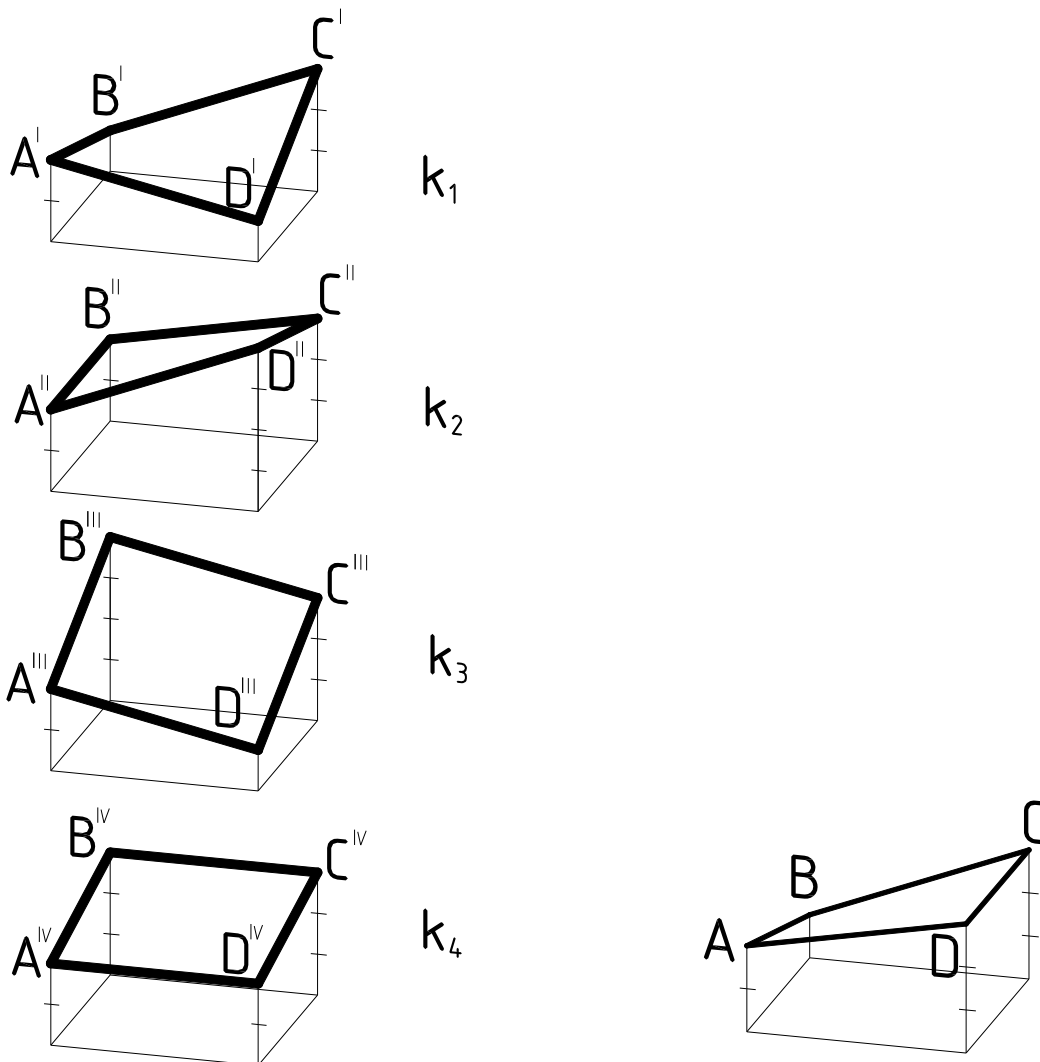


Рис. 1. Суперпозиція чотирьох елементарних призм.

Тому невідомих коефіцієнтів стає на одиницю більше, ніж число рівнянь і один з вихідних образів стає зайвим, як і один з коефіцієнтів.

При виключенні зайвого рівняння (10) яке повторюється двічі і вважаючи коефіцієнт $k_4 = 0$, система (9) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
 k_1 + k_2 + k_3 &= 1; \\
 Z_B &= k_1 Z_B^I + k_2 Z_B^{II} + k_3 Z_B^{III}; \\
 Z_D &= k_1 Z_D^I + k_2 Z_D^{II} + k_3 Z_D^{III}.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Тепер число невідомих коефіцієнтів повністю відповідає формулі (6).

Розв'язання системи (11) дає результат:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{(Z_B''' - Z_B'')(Z_D'' - Z_D''') - (Z_B'' - Z_B''')(Z_D''' - Z_D'')}{(Z_B'' - Z_B''')(Z_D' - Z_D''') - (Z_B' - Z_B''')(Z_D'' - Z_D''')}, \\ k_2 &= \frac{(Z_B''' - Z_B'')(Z_D' - Z_D''') - (Z_B' - Z_B''')(Z_D''' - Z_D'')}{(Z_B' - Z_B''')(Z_D'' - Z_D''') - (Z_B'' - Z_B''')(Z_D' - Z_D''')}, \\ k_3 &= \frac{(Z_B'' - Z_B''')(Z_D' - Z_D'') - (Z_B' - Z_B'')(Z_D'' - Z_D''')}{(Z_B'' - Z_B''')(Z_D'' - Z_D') - (Z_B'' - Z_B') (Z_D''' - Z_D')}. \end{aligned} \quad (12)$$

Оскільки суперпозиція (3) є сумою афінних перетворень, то об'єми, що перекриваються ДПП, повністю відповідають властивостям афінних перетворень.

$$V = k_1 V_1 + k_2 V_2 + \dots + k_n V_n. \quad (13)$$

Одне з рівнянь системи (11) можна замінити рівнянням (13), тоді замість заданої аплікати одного з вузлів (наприклад Z_D) заданим буде об'єм V :

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= 1; \\ Z_B &= k_1 Z_B^I + k_2 Z_B^{II} + k_3 Z_B^{III}; \\ V &= k_1 V^I + k_2 V^{II} + k_3 V^{III}. \end{aligned} \quad (14)$$

Висновки і перспективи. Апарат суперпозицій як і апарат афінних перетворень дозволяє керувати формою врівноваженої поверхні при заданому об'ємі, що перекривається і обирати архітектору чи проектувальнику на стадії ескізного проектування потрібну йому форму з двопараметричної множини форм.

Планується найближчим часом дослідити використання апарату суперпозицій та афінних перетворень для управління формою врівноважених поверхонь з урахуванням об'єму, що перекривається, з правильними триангуляційними клітинами в плані.

1. Ковалёв С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: дисс. докт. техн. наук: 05.01.01/ Ковалёв Сергей Николаевич - М., 1986. – 320 с.
2. Хай Ч.Х. Управление формой растянутых систем на основе функционального сложения: дисс. канд. техн. наук: 05.01.01/ Хай Чанг Хонг – К., 1994. – 148 с.

Стаття надійшла до редакції 15.04.2015.