УДК 514.752.4

М.М. Муквич
Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і природокористування України «Ніжинський агротехнічний інститут»

КОНСТРУЮВАННЯ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ІЗОТРОПНОЇ КРИВОЇ, ЯКА ЛЕЖИТЬ НА КОНУСІ

У статті здійснено конструювання мінімальних поверхонь із використанням ізотропної кривої, яка лежить на поверхні конуса. Використано аналітичну умову того, що координатні лінії конуса утворюють ізотермічну систему.

Ключові слова: *ізотропна крива, мінімальна поверхня, лінійний елемент поверхні.*
Форм. 14. Рис. 2. Літ. 8

Н.Н. Муквич

КОНСТРУИРОВАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ИЗОТРОПНОЙ КРИВОЙ, КОТОРАЯ НАХОДИТСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА

В данной работе осуществлено конструирование минимальных поверхностей с использованием изотропной кривой, которая находится на поверхности конуса. Использовано аналитическое условие того, что координатные линии конуса образуют изотермическую систему.

Ключевые слова: *изотропная кривая, минимальная поверхность, линейный элемент поверхности.*

M.M. Mukvich

CONSTRUCTION OF MINIMAL SURFACES USING ISOTROPIC CURVE THAT LIES ON THE CONE

In the article the design of minimal surfaces using isotropic curve that lies on the surface of the cone. Used analytical condition that the coordinate lines form a cone isothermal system.

Key words: *isotropic curve, the minimum surface, line element surface.*

Постановка проблеми. Вивчення конструктивних способів побудови та аналітичного опису мінімальних поверхонь зумовлене їх застосуванням при проектуванні сучасних архітектурних конструкцій. Розширення геометричних способів конструювання мінімальних поверхонь пов'язане також із розв'язуванням варіаційної задачі: знайти поверхню найменшої площі, яка б проходила через заданий контур. Указана варіаційна задача має широке застосування при проектуванні поверхонь технічних форм.

Теорія мінімальних поверхонь налічує багато способів конструювання. Ряд учених досліджували мінімальні поверхні засобами варіаційного та тензорного числення. Основною проблемою цих досліджень були труднощі, пов'язані із знаходженням рівнянь мінімальних поверхонь у явному вигляді. Тому для спрощення аналітичного опису мінімальних поверхонь доцільно використовувати ізотропні просторові криві нульової довжини.

У дисертаційних дослідженнях [4, 6] знайдено способи конструювання просторових ізотропних кривих за формулами Шварца та Вейєрштрасса [7]. Зокрема, у статті [5] розроблено метод отримання ізотропних кривих за заданою плоскою кривою – їх горизонтальною проекцією. На основі рівнянь ізотропних кривих побудовано мінімальні та приєднані до них поверхні, при цьому геодезичною лінією мінімальної поверхні є задана плоска крива. У статті [1] для побудови ізотропних кривих Без'є застосовуються ізотропні прямі, які визначають сторони характеристичних многокутників. Робота [2] направлена на дослідження побудови мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих Без'є. Стаття [3] висвітлює метод побудови сім'ї необмежених мінімальних поверхонь методом Вейєрштрасса на базі ізотропної кривої Без'є третього порядку. Слід зазначити, що аналітичний запис ізотропної кривої тільки в окремих випадках дозволяє виконати всі необхідні перетворення для знаходження рівнянь мінімальних поверхонь в явному вигляді. Зокрема, операція інтегрування і відокремлення дійсної та уявної частин функції комплексної змінної найчастіше приводить до запису результатів у неявному вигляді. Тому при конструюванні мінімальних поверхонь важливим є розширення способів утворення ізотропних кривих.

Мета статті. Знайти параметричні рівняння ізотропної кривої, яка лежить на поверхні конуса, використавши аналітичну умову того, що координатні лінії конуса утворюють ізотермічну систему. На основі вказаної ізотропної кривої побудувати мінімальну поверхню та приєднану до неї.

Виклад основного матеріалу. Знаходження рівнянь мінімальних поверхонь в явному вигляді залежить від аналітичного запису ізотропної кривої, тому для подальшого узагальнення результатів необхідно дослідити окремі випадки утворення просторової кривої нульової довжини.

Як відомо, меридіани і паралелі на поверхні обертання утворюють ізотермічну систему [7], яка конформно відображається на прямокутну сітку координатних ліній на площині. Координатні лінії поверхні, які утворюють ізотермічну систему, відображаються у вигляді нескінченно малих квадратів. Розглянемо поверхню обертання – конус, який задано параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned} X(t;v) &= e^{t\cos\beta}\cdot\cos v; \\ Y(t;v) &= e^{t\cos\beta}\cdot\sin v; \\ Z(t;v) &= e^{t\cos\beta}\cdot tg\beta, \end{aligned} \tag{1}$$

де $t\in R,\ v\in[0;\,2\pi),\ \beta\in\left[0;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ – параметр конуса.

Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми конуса за формулами [7]:

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)^2; \\ F &= \frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial Y}{\partial t}\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{\partial Z}{\partial t}\frac{\partial Z}{\partial v}; \\ G &= \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2, \end{aligned} \tag{2}$$

Диференціюючи вирази (1), після перетворень згідно (2), отримаємо: $E=G=e^{2t\cdot\cos\beta}$; $F=0$. Тоді лінійний елемент конуса, віднесеного до ізотермічної системи, має вигляд:

$$ds = e^{2t\cdot\cos\beta}\cdot\left(dv^2+dt^2\right). \tag{3}$$

Розклавши на множники вираз (3) отримаємо:

$$ds = e^{2t\cdot\cos\beta}\cdot(dv-i\cdot dt)(dv+i\cdot dt),$$

де i – уявна одиниця.

Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$v = i\cdot t + C \tag{4}$$

або

$$v = -i\cdot t + C, \tag{5}$$

де C – довільна стала інтегрування.

Вирази у правій частині рівностей (4) та (5) називають координатами Дарбу (Darboux) [7].

Лінійний елемент (3) конуса визначає довжину будь-якої кривої, яка лежить на його поверхні. Тому при підстановці виразів (4) або (5) у параметричні рівняння конуса (1) отримаємо параметричні рівняння двох сімей уявних ізотропних кривих нульової довжини.

Зокрема, при підстановці виразу (4) у рівняння (1) для кожного значення C отримаємо параметричні рівняння уявної ізотропної кривої, яка лежить на конусі:

$$x(t) = e^{t\cos\beta} \cdot \cos(i \cdot t + C);$$
$$y(t) = e^{t\cos\beta} \cdot \sin(i \cdot t + C); \qquad (6)$$
$$z(t) = e^{t\cos\beta} \cdot tg\beta.$$

Для знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні для функцій комплексної змінної (6) уведемо заміну [8]: $t = u + i \cdot v$. Тоді отримаємо параметричні рівняння мінімальної поверхні $X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)$:

$$X(u,v) = \operatorname{Re}\{x(u + i \cdot v)\};\ Y(u,v) = \operatorname{Re}\{y(u + i \cdot v)\};\ Z(u,v) = \operatorname{Re}\{z(u + i \cdot v)\}; \qquad (7)$$

та приєднаної поверхні $X^*(u,v), Y^*(u,v), Z^*(u,v)$:

$$X^*(u,v) = \operatorname{Im}\{x(u + i \cdot v)\};\ Y^*(u,v) = \operatorname{Im}\{y(u + i \cdot v)\};\ Z^*(u,v) = \operatorname{Im}\{z(u + i \cdot v)\}. \qquad (8)$$

Відокремивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій (6), маємо рівняння мінімальної поверхні:

$$X(u,v) = e^{u\cdot\cos\beta} \cdot [\cos(C - v) \cdot \cos(v\cos\beta) \cdot \operatorname{ch}(u) + \sin(C - v) \cdot \sin(v\cos\beta) \cdot \operatorname{sh}(u)];$$
$$Y(u,v) = e^{u\cdot\cos\beta} \cdot [\sin(C - v) \cdot \cos(v\cos\beta) \cdot \operatorname{ch}(u) - \cos(C - v) \cdot \sin(v\cos\beta) \cdot \operatorname{sh}(u)]; \qquad (9)$$
$$Z(u,v) = e^{u\cdot\cos\beta} \cdot [\cos(v\cos\beta) \cdot tg\beta];$$

та приєднаної поверхні:

$$X^*(u,v) = e^{u\cdot\cos\beta} \cdot [\cos(C - v) \cdot \sin(v\cos\beta) \cdot \operatorname{ch}(u) - \sin(C - v) \cdot \cos(v\cos\beta) \cdot \operatorname{sh}(u)];$$
$$Y^*(u,v) = e^{u\cdot\cos\beta} \cdot [\sin(C - v) \cdot \sin(v\cos\beta) \cdot \operatorname{ch}(u) + \cos(C - v) \cdot \cos(v\cos\beta) \cdot \operatorname{sh}(u)]; \qquad (10)$$
$$Z^*(u,v) = e^{u\cdot\cos\beta} \cdot [\sin(v\cos\beta) \cdot tg\beta].$$

На рис.1 та рис.2 зображено мінімальну поверхню, побудовану за рівняннями (9) при $\beta = \frac{\pi}{4}$; $C = \frac{\pi}{2}$.

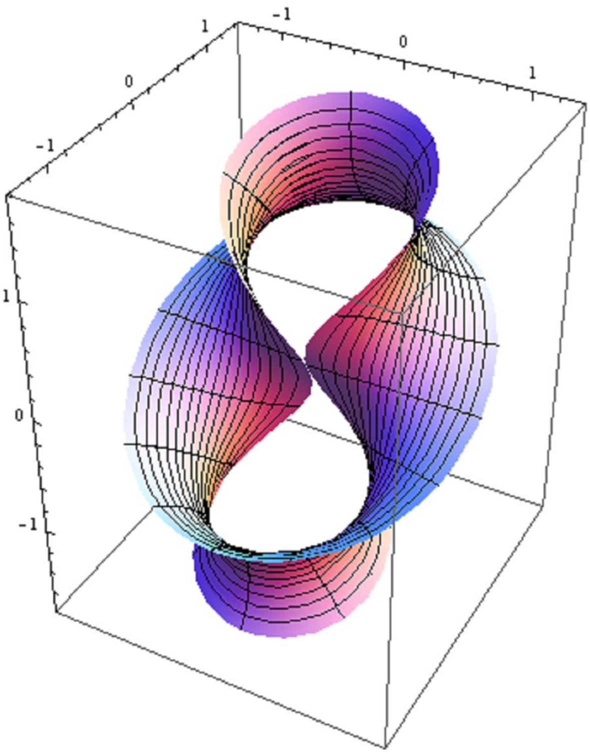

Рис. 1. **Мінімальна поверхня, побудована за рівняннями (9)**

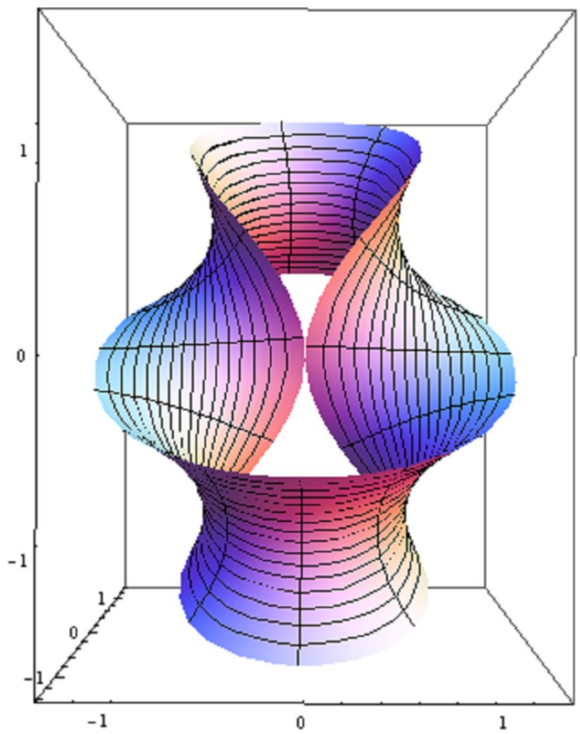

Рис.2. **Фронтальна проекція мінімальної поверхні**

Приєднана мінімальна поверхня, утворена за рівняннями (10), має форму побудованої на рис. 1 та 2 відповідної мінімальної поверхні, тому її аксонометрія у даній роботі не наводиться.

Коефіцієнти першої квадратичної форми мінімальної поверхні (9) та приєднаної поверхні (10), знайдені за формулами (2), дорівнюють:

$$E = G = e^{2u\cdot\cos\beta}\cdot\left(ch(u) + sh(u)\cdot\cos\beta\right)^2;\ F = 0. \qquad (11)$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми мінімальної поверхні (9) та приєднаної поверхні (10), знайдені за відомими формулами диференціальної геометрії [8], дорівнюють:

$$N = -L = e^{u\cdot\cos\beta}\cdot\cos(v\cdot\cos\beta)\cdot\sin\beta.$$

Тоді середня кривина поверхонь (9) та (10), обчислена за формулою [8] $H = \dfrac{E\cdot N - 2\cdot F\cdot M + G\cdot L}{2(E\cdot G - F^2)}$, дорівнює нулеві.

При підстановці виразу (5) у рівняння (1) для кожного значення C отримаємо параметричні рівняння іншої уявної ізотропної кривої, яка лежить на конусі:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{t\cos\beta}\cdot\cos(-i\cdot t + C); \\ y(t) &= e^{t\cos\beta}\cdot\sin(-i\cdot t + C); \\ z(t) &= e^{t\cos\beta}\cdot tg\beta. \end{aligned} \qquad (12)$$

Використовуючи для функцій комплексної змінної (12) заміну $t = u + i\cdot v$, можна знайти за формулами (7) і (8) параметричні рівняння мінімальної поверхні та приєднаної до неї. Параметричні рівняння вказаних мінімальних поверхонь відрізняються від рівнянь (9) і (10) відповідно, але мають одні й ті самі коефіцієнти першої квадратичної форми (11), тобто допускають згинання одна на одну.

Вираз (3) можна розкласти на множники у вигляді:

$$ds = e^{2t\cdot\cos\beta}\cdot(dt - i\cdot dv)(dt + i\cdot dv) \qquad (13)$$

Прирівнюючи до нуля праву частину рівності (13), після інтегрування отримаємо:

$$t = i\cdot v + C \text{ або } t = -i\cdot v + C, \qquad (14)$$

Підставивши вирази (14) у параметричні рівняння конуса (1), отримаємо рівняння двох сімей уявних ізотропних кривих нульової довжини. Для кожного значення C за знайденими ізотропними кривими можна побудувати мінімальні поверхні та приєднані до них. Тоді, у параметричних рівняннях мінімальної та приєднаної поверхонь, у порівнянні з виразами (9) і (10) відповідно, змінні t і v "поміняються місцями".

Висновок. На поверхні конуса можна побудувати чотири сім'ї ізотропних ліній і кожній лінії поставити у відповідність мінімальну поверхню та приєднану до неї. Спосіб аналітичного опису уявної ізотропної кривої, яка лежить на поверхні конуса, дозволяє керувати процесом утворення мінімальної поверхні при відокремленні дійсної та уявної частин функції комплексної змінної.

1. Аушева Н.М. Ізотропні багатокутники ізотропних кривих Без'є / Н.М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка.– К.: КНУБА, 2011.– № 88.– С.57–61.
2. Аушева Н.М. Моделювання поверхонь Без'є / Н.М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип.4, т.50. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011.– С.105 – 109.
3. Аушева Н.М. Визначення сім'ї мінімальних поверхонь з напрямною кривою Без'є на базі процесора SIMD-архітектури / Н.М. Аушева, А.А. Демчишин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип.4, т.57. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013.– С.10 – 16.
4. Коровіна І.О. Конструювання поверхонь сталої середньої кривини за заданими лініями інциденції: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / І.О. Коровіна. – К.: КНУБА, 2012. – 20 с.
5. Пилипака С.Ф. Мінімальні поверхні, отримані з ізотропних кривих / С.Ф. Пилипака, Е.О. Чернишова // Збірник наукових праць КНУДТ (спецвипуск): Доповіді третьої кримської науково-практичної конференції "Геометричне та комп'ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн". – К.: ДОП КНУТД, 2006. – С. 40 – 45.
6. Чернишова Е.О. Використання функцій комплексного змінного для побудови поверхонь технічних форм: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Е.О. Чернишова. – К.: КНУБА, 2007. – 20 с.
7. Фиников С.П. Теория поверхностей / Фиников С.П. – М.–Л.: ГТТИ, 1934.– 206 с.
8. Норден А.П. Теория поверхностей / Норден А.П. – М.: ГТТЛ, 1956. – 261 с.

Стаття надійшла до редакції 17.04.2015.