УДК 514.18

С. Ф. Пилипака, А. В. Несвідомін

МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ЧАСТИНКИ ПО ШОРСТКІЙ ПОВЕРХНІ ОДНОПОРОЖНИННОГО ГІПЕРБОЛОЇДА ОБЕРТАННЯ

Розроблено maple-модель руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні нерухомого однопорожнинного гіперболоїда обертання. Наведено результати комп'ютерних експериментів побудови траєкторних кривих, швидкості частинки та нормальної реакції в залежності її початкової швидкості, напряму кидання та коефіцієнта зовнішнього тертя.

***Ключові слова**: однопорожнинний гіперболоїд, частинка, закон руху, траєкторія, швидкість.*

Рис. 8. Літ. 3.

С. Ф. Пилипака, А. В. Несвидомин

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ПО ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОДНОПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ

Разработана maple-модель движения частицы по шероховатой внутренней поверхности неподвижного однополостного гиперболоида вращения. Приведены результаты компьютерных экспериментов построения траекторных кривых, скорости частицы в зависимости ее начальной скорости, направления бросание и коэффициента внешнего трения.

***Ключевые слова:** однополостный гиперболоида, частица, движение, траектория, скорость.*

S. F. Pylypaka, A. V. Nesvidomin

SIMULATION OF PARTICLE MOTION ROUGH SURFACE ONE-SHEETED HYPERBOLOID

Maple-developed model of a particle in the rough inner surface of the real hyperboloid of revolution. The results of computer experiments construction trajectory, particle velocity based its initial velocity, direction and throwing coefficient of external friction.

***Key words:** hyperboloid, particle, motion, trajectory, speed.*

Постановка проблеми. Сучасні методи обґрунтування технологічних процесів сепарації, переміщення та розкидання с.г. матеріалів повинні базуватися на комп'ютерному моделюванні руху частинки по шорстких поверхня, яке зводиться до формування та розв'язування досить складних диференціальних рівнянь 2-го порядку, побудови траєкторії частинки, визначення її швидкості, нормальної реакції тощо. Рішення цієї проблеми потребує розробки відповідних програмних додатків до систем комп'ютерної графіки та математики, зокрема символьної алгебри Maple [1].

Аналіз останніх досліджень. Класичні дослідження руху частинки по шорстких поверхнях для задач проектування с.г. робочих органів розглянуто в монографії [2]. Для опису рівноваги діючих сил на рухому частинку по шорсткій поверхні взято супровідні тригранники вздовж її траєкторії [3].

Формулювання мети статті. Якщо кинути частинку на будь-яку шорстку поверхню, то вона під дією сили тяжіння буде рухатися в напрямку найнижчої її точки. Траєкторія частинки та її кінематичні властивості залежать від величини коефіцієнта зовнішнього тертя f, початкової швидкості V_0, кута α_0 кидання та параметрів форми і положення поверхні. За цими вихідними умовами розробимо maple-модель формування закону руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні однопорожнинного гіперболоїда обертання та наведемо результати обчислювальних досліджень її траєкторно-кінематичних параметрів в залежності часу.

Основна частина. Одно-порожнинний гіперболоїд обертання $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ з вертикальною віссю Oz в декартовій системі координат $Oxyz$ утворимо обертанням навколо осі Oz твірної гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ в площині Oxz:

$$\boldsymbol{R}(u,v)=\boldsymbol{R}\left[\frac{u\sqrt{b^2-v^2}}{b}\cos(u),\ \frac{u\sqrt{b^2+v^2}}{b}\sin(u),\ v\right], \qquad (1)$$

де: a, b – параметри форми твірної гіперболи;

$u\in\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$, $v\subset[v_0;v_k]$ – незалежні криволінійні координати поверхні.

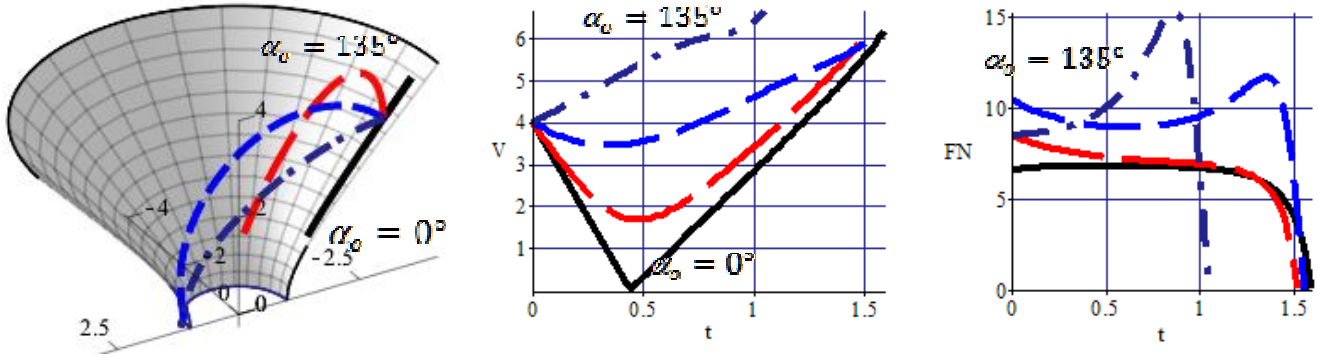
© С. Ф. Пилипака, А. В. Несвідомін

Горизонтальне та похиле положення поверхні однопорожнинного гіперболоїда (1) в декартовій системі координат $Oxyz$ здійснимо обертанням $R(u,v)$ на кут ξ навколо осі Ox:

$$K(u,v) = K\left[\frac{a\sqrt{h^2+v^2}\cos(u)}{b},\ \frac{a\sqrt{h^2+v^2}\sin(u)\cos(\xi)-h\,v\sin(\xi)}{b},\ \frac{a\sqrt{h^2+v^2}\sin(u)\sin(\xi)-h\,v\cos(\xi)}{b}\right]. \qquad (2)$$

Розроблена maple-модель автоматично формує послідовність виведення закону руху частинки по шорсткій поверхні однопорожнинного гіперболоїда обертання, яка є досить громіздкою. Тому не повторюватимемо ці аналітичні викладки, а наведемо тільки результати проведених обчислювальних експериментів дослідження руху частинки за різними вихідними умовами.

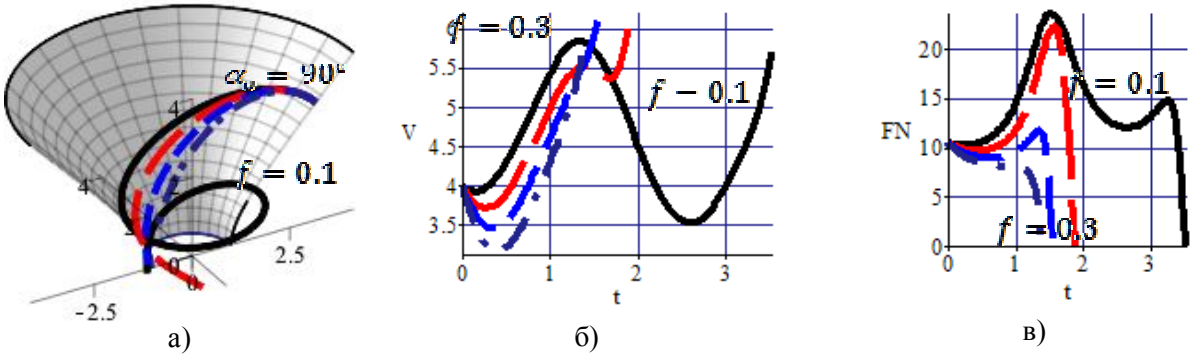
Рух частинки по шорсткій внутрішній поверхні вертикального однопорожнинного гіперболоїда обертання (1) може відбуватися тільки у верхній його частині, оскільки поблизу горловини частинка неодмінно відірветься від поверхні. На рис.1 побудовано траєкторії $r(t)$ частинки, графіки її швидкості $V(t)$ та нормальної реакції $F_N(t)$ за різним кутом кидання $\alpha_0 = 0°,45°,90°,135°$ за наступних вихідних умов: параметрами форми $a = 1$ і $b = 1$ напрямної гіперболи; початкової швидкості $V_0 = 4$ м/с частинки; її початковим положенням $u_0 = \pi,\ v_0 = 3$; коефіцієнтом тертя $f = 0.3$. Побудовані зображення демонструють, що частинки не зупиняться на поверхні і всі вони будуть відриватися від неї не доходячи до горловини - нормальна реакція $F_N(t)$ наближається до нуля. Найшвидше відірветься частинка кинута під кутом $\alpha_0 = 135°$ – через проміжок $t \simeq 1.2c$. Частинки кинуті під кутами $\alpha_0 = 0°,45°,90°$ відірвуться від поверхні майже через однаковий проміжок часу $t \cong 1.5c$ і майже з однаковою швидкістю $V \cong 6$м/с.



а) б) в)

Рис. 1. **Траєкторії $r(t)$ частинки, графіки швидкості $V(t)$ та нормальної реакції $F_N(t)$ в залежності кута кидання α_0**

На рис.2 побудовано траєкторії $r(t)$ частинки, графіки її швидкості $V(t)$ та нормальної реакції $F_N(t)$ за різним коефіцієнтом тертя $f = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ при постійному куту кидання $\alpha_0 = 90°$. Частинка з коефіцієнтом тертя $f = 0.1$ буде рухатися по поверхні без відриву близько $t \simeq 3.5c$, що майже в двічі довше за частинку з коефіцієнтом тертя $f = 0.3$ - $t \cong 1.7c$. Хоча, частинки з коефіцієнтами тертя $f = 0.2, 0.3, 0.4$ будуть відриватися від поверхні приблизно через однаковий часовий проміжок $t \cong 1.4..1.8c$.

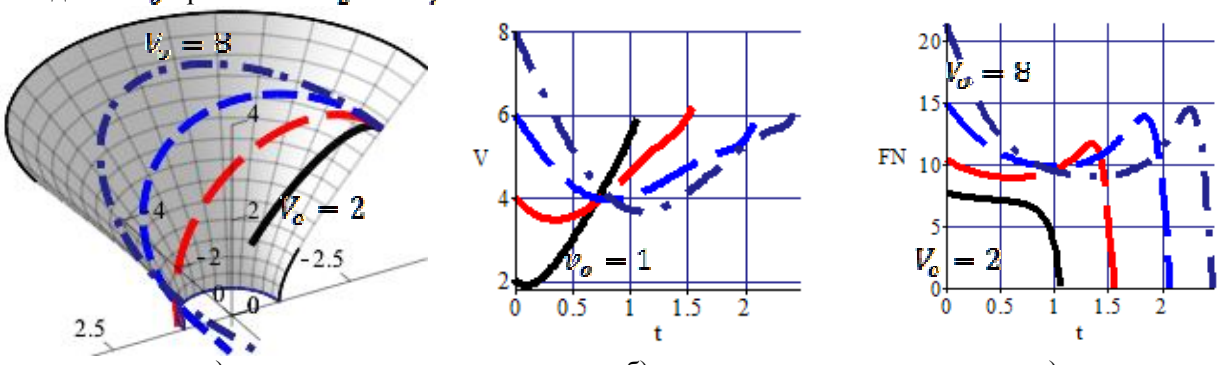


а) б) в)

Рис.2. **Траєкторії $r(t)$ частинки, графіки швидкості $V(t)$ та нормальної реакції $F_N(t)$ в залежності коефіцієнта тертя f**

© *С. Ф. Пилипака, А. В. Несвідомін*

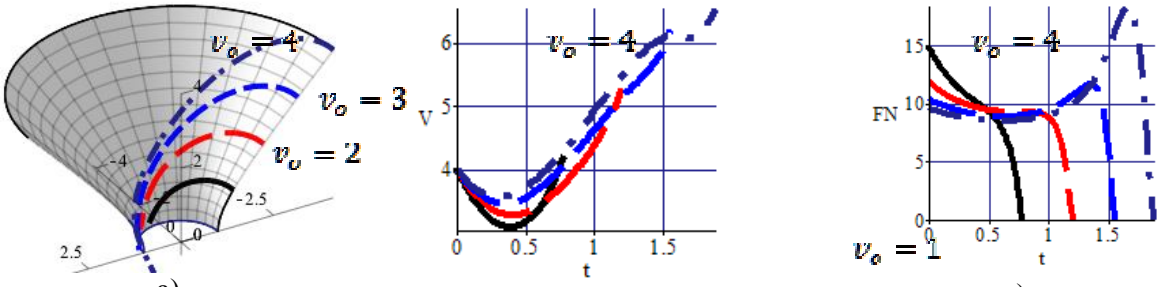
На рис. 3 побудовано траєкторії $\boldsymbol{r(t)}$ частинки, графіки її швидкості $\boldsymbol{V(t)}$ та нормальної реакції $\boldsymbol{F_N(t)}$ за різною початковою швидкістю $\boldsymbol{V_o = 2,4,6,8\ м/с}$ – при постійних значеннях коефіцієнта тертя $\boldsymbol{f = 0.3}$, куту кидання $\boldsymbol{\alpha_o = 90°}$ і початковому положенні $\boldsymbol{v_o = 3}$ частинки. При початковій швидкості $\boldsymbol{V_o = 2}$ частинка відірветься від поверхні через проміжок часу $\boldsymbol{t \cong 1.1c}$. При збільшенні початкової швидкості $\boldsymbol{V_o}$ частинки в двічі, час $\boldsymbol{t}$ її руху по поверхні вже не збільшується в двічі. Звернемо також увагу, що швидкість відриву частинок майже не залежить від її початкової швидкості $\boldsymbol{V_o}$ - рівняється $\boldsymbol{V_в \cong 6\ м/с}$.



а) б) в)

Рис.3. **Траєкторії $\boldsymbol{r(t)}$ частинки, графіки швидкості $\boldsymbol{V(t)}$ та нормальної реакції $\boldsymbol{F_N(t)}$ в залежності початкової швидкості $\boldsymbol{V_o}$**

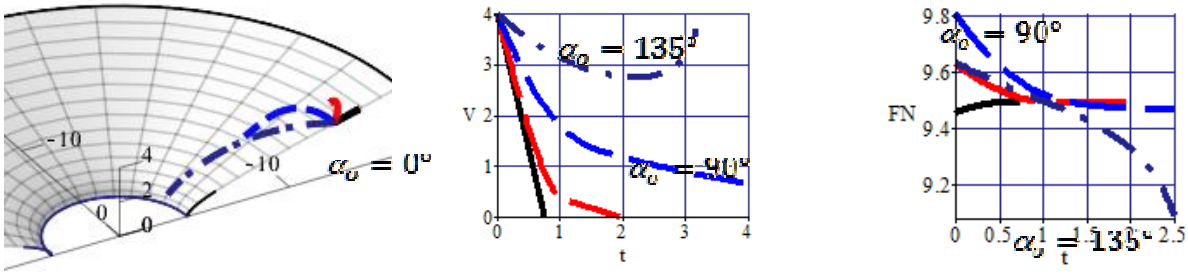
На рис. 4 побудовано траєкторії $\boldsymbol{r(t)}$ частинки, графіки її швидкості $\boldsymbol{V(t)}$ та нормальної реакції $\boldsymbol{F_N(t)}$ за різним її початковим положенням $\boldsymbol{v_o = 1,2,3,4}$ – внутрішній $\boldsymbol{v}$–координаті на твірній гіперболі та при постійних значеннях коефіцієнта тертя $\boldsymbol{f = 0.3}$, кута кидання $\boldsymbol{\alpha_o = 90°}$ і початкової швидкості $\boldsymbol{V_o = 4\ м/с}$ частинки. Так частинка, яка знаходиться до горловини найближче ($\boldsymbol{v_o = 1}$) відірветься від поверхні найпершою ($\boldsymbol{t \cong 0.7c}$) із найменшою швидкістю відриву $\boldsymbol{V_в \cong 4.1\ м/с}$.



а) б) в)

Рис. 4. **Траєкторії $\boldsymbol{r(t)}$ частинки, графіки швидкості $\boldsymbol{V(t)}$ та нормальної реакції $\boldsymbol{F_N(t)}$ в залежності початкового положення $\boldsymbol{v_o}$**

Нехай параметри форми гіперболоїда обертання рівняються: $\boldsymbol{a = 4}$ і $\boldsymbol{b = 1}$. На рис.5 побудовано траєкторії $\boldsymbol{r(t)}$ частинки, графіки її швидкості $\boldsymbol{V(t)}$ та нормальної реакції $\boldsymbol{F_N(t)}$ за різним кутом кидання $\boldsymbol{\alpha_o = 0°,45°,90°,135°}$ за наступних вихідних умов: початкова швидкість $\boldsymbol{V_o = 4\ м/с}$; початкове положення $\boldsymbol{u_o = \pi,\ v_o = 3}$; коефіцієнт тертя $\boldsymbol{f = 0.3}$.



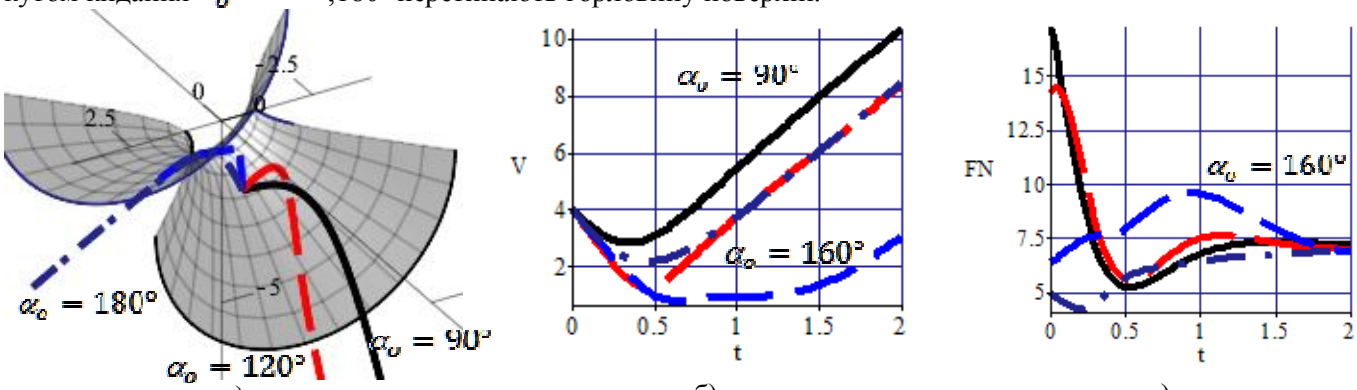
а) б) в)

Рис.5. **Рух частинки по поверхні гіперболоїда обертання: а) траєкторії $\boldsymbol{r(t)}$; б) швидкість $\boldsymbol{V(t)}$; в) нормальна реакція $\boldsymbol{F_N(t)}$**

© С. Ф. Пилипака, А. В. Несвідомін

Оскільки $\frac{b}{a} < f$, то тільки частинка кинута в напрямку горловини ($\alpha_o = 135°$) не зупиниться на поверхні. Якщо початкове положення частинок взяти ще на більшій відстані від горловини гіперболоїда, наприклад, $v_o = 4$, тоді вже всі частинки зупиняться на поверхні при вище прийнятих вихідних умовах її кидання.

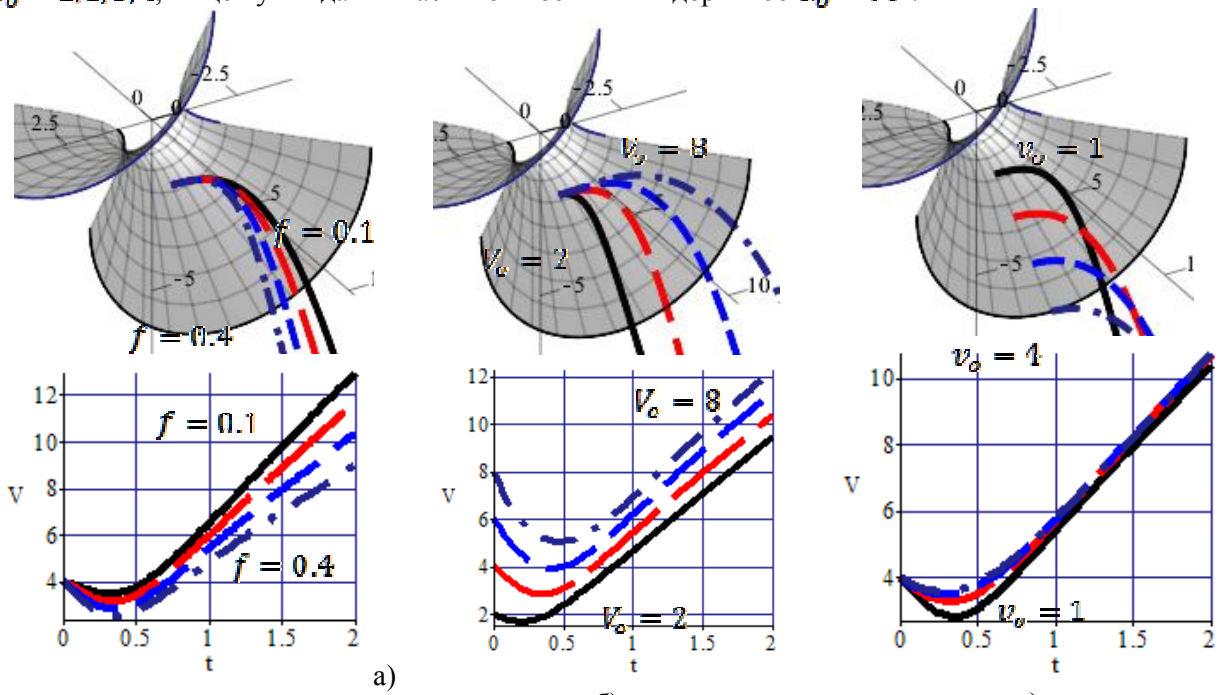
На рис.6 побудовано траєкторії $\boldsymbol{r}(t)$, графіки швидкості $V(t)$ та нормальної реакції $F_N(t)$ руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні гіперболоїда обертання з горизонтальною віссю ($\xi = 90°$) в залежності кута кидання $\alpha_o = 90°,120°,160°,180°$ за вихідними початковими умовами: положенням $u_o = 90°, v_o = 1$; швидкості $V_o = 4$ м/с; параметрами форми $a = 1$ і $b = 1$ напрямної гіперболи та коефіцієнтом тертя $f = 0.3$. Побудовані зображення демонструють, що не одна із частинок не відірветься від поверхні ($F_N(t) > 0$) і після деякого зменшення їх швидкості $V(t)$ починають їх набирати. В залежності від початкових умов кидання, деякі частинки можуть переміститися по іншу сторону горловини гіперболоїда обертання - траєкторії $\boldsymbol{r}(t)$ частинок з кутом кидання $\alpha_o = 160°,180°$ перетинають горловину поверхні.



а) б) в)

Рис.6. **Траєкторії $\boldsymbol{r}(t)$ частинки, графіки швидкості $V(t)$ та нормальної реакції $F_N(t)$ в залежності кута кидання α_o**

На рис.7 побудовано траєкторії $\boldsymbol{r}(t)$ та графіки швидкості $V(t)$ руху частинки по поверхні гіперболоїда обертання з горизонтальною віссю в залежності: а) коефіцієнта тертя $f = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$; б) початкової швидкості $V_o = 2, 4, 6, 8$ м/с: в) початкового положення $v_o = 1, 2, 3, 4$, якщо кут кидання частинок постійний і дорівнює $\alpha_o = 90°$.



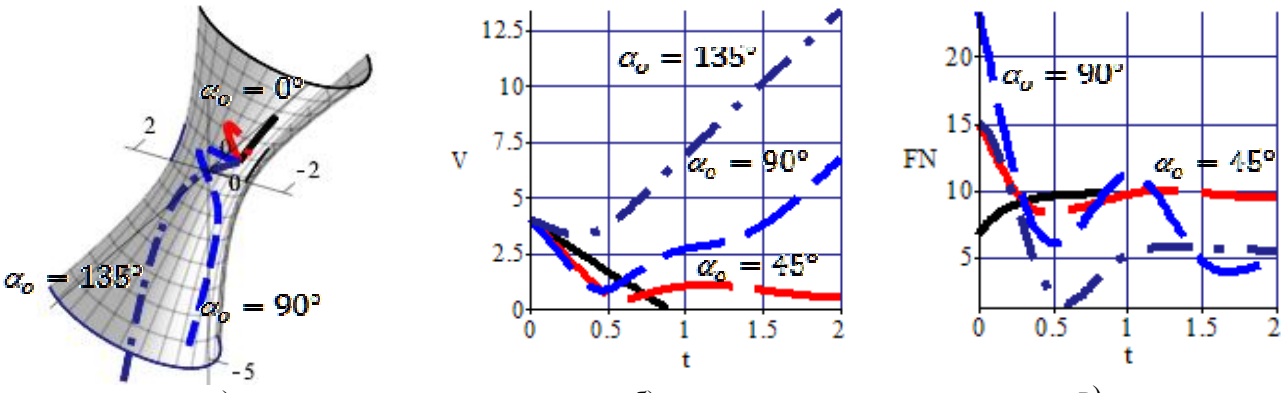
а) б) в)

Рис. 7. **Траєкторії $\boldsymbol{r}(t)$ та графіки швидкості $V(t)$ руху частинки по поверхні гіперболоїда обертання з горизонтальною віссю в залежності: а) коефіцієнта тертя f; б) початкової швидкості V_o; в) початкового положення v_o**

© С. Ф. Пилипака, А. В. Несвідомін

Можна стверджувати, що суттєвий вплив коефіцієнта тертя f відбувається після розгону частинки на поверхні. Якщо на початку руху різниця в початковій швидкості V_0 частинок рівнялася 2 м/с, то вже через проміжок часу $t = 1c$ ця різниця зменшилася до значення $\cong 0.5$ м/с. Частинки кинуті з різних місць v_0 вздовж меридіана у вертикальній площині, через проміжок часу $t = 1c$ мають майже однакову швидкість $\simeq 5.8$ м/с.

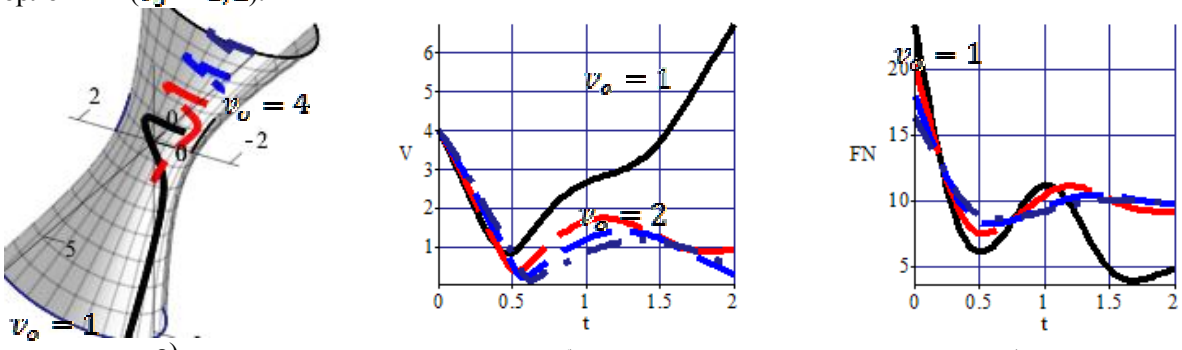
Нахилимо вісь гіперболоїда обертання на кут $\xi = 60°$ від вертикального положення та змінимо параметри форми напрямної гіперболи - $a = 1$ і $b = 2$ (рис.8). При початковій швидкості $V_0 = 4$м/с, коефіцієнта тертя $f = 0.3$ та початковому положенні $v_0 = 1$ тільки частинки кинуті під кутом $\alpha_0 = 0°,45°$ у верхній частині горловини поверхні гіперболоїда обертання там же і зупиняться, на відміну від частинок кинутих під кутом $\alpha_0 = 90°,135°$.



а) б) в)

Рис. 8. **Траєкторії $r(t)$ частинки, графіки швидкості $V(t)$ та нормальної реакції $F_N(t)$ в залежності кута кидання α_0**

Нехай частинки мають однакову початкову швидкість $V_0 = 4$м/с, кут кидання $\alpha_0 = 90°$, та коефіцієнт тертя $f = 0.3$, але різні положення $v_0 = 1,2,3,4$ вздовж меридіана гіперболоїда обертання (рис.9). За цих умов тільки частинки з початковим положенням $v_0 = 3,4$ зупиняться у верхній частині гіперболоїда обертання, на відміну від частинок, які знаходилися по ближче до горловини ($v_0 = 1,2$).



а) б) в)

Рис. 9. **Траєкторії $r(t)$ частинки, графіки швидкості $V(t)$ та нормальної реакції $F_N(t)$ в залежності початкового положення v_0**

Висновки. Результати обчислювальних експериментів з аналізу руху частинок по шорсткій поверхні однопорожнинного гіперболоїда показують складний взаємовплив параметрів її положення та вихідних умов кидання.

1. Аладьев В. З. Программирование и разработка приложений в Maple / В. З. Аладьев, В. К. Бойко, Е. А. Ровба. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 458 с.
2. Василенко П. М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П. М. Василенко. – К.: УАСХН, 1960. – 283 с.
3. Пилипака С. Ф. Тригранник і формули Френе: теорія складного руху матеріальної точки та задачі на кінематику і динаміку при її русі по шорстких поверхнях / С. Ф. Пилипака // Академік П. М. Василенко – яскравий погляд у майбутнє. – К.: Хай-Тек Прес, 2010. – С.297–397.

Стаття надійшла до редакції 12.04.2015.

© С. Ф. Пилипака, А. В. Несвідомін