

Т. С. Пилипака
ВДОСКОНАЛЕННЯ ФОРМИ СПІРАЛЬНОЇ ПРУЖИНИ

В роботі розглянуто значний прогин статично визначених тонких стержнів під дією прикладеної сили. Наведені диференціальні рівняння пружної осі стержнів, закріплених у вигляді консолі. Здійснено чисельне інтегрування рівнянь і побудовано криві – пружні осі зігнутих стержнів. Запропоновано пружну вісь спіральної пружини.

Ключові слова: тонкий стержень, пружна вісь, консоль, диференціальне рівняння, спіральна пружина.

Т. С. Пилипака
УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ФОРМЫ СПИРАЛЬНОЙ ПРУЖИНЫ

Рассмотрен значительный прогиб статически определенных тонких стержней под действием приложенной силы. Приведены дифференциальные уравнения упругой оси стержней, закрепленных у виде консоли. Сделано численное интегрирование уравнений и построены кривые – упругие оси согнутых стержней. Предложено упругую ось спиральной пружины.

Ключевые слова: тонкий стержень, упругая ось, консоль, дифференциальное уравнение, спиральная пружина.

T. S. Pylypaka
REFINEMENT OF THE FORM OF A SPIRAL SPRING

The significant sag of statically defined thin rods under an operation of applied forces surveyed. The differential equations of an elastic axis of rods, timbered at an aspect of a cantilever are reduced. The numerical integration of the equations is made and curves - elastic axes of the bent rods built. It is offered an elastic axis of a spiral spring.

Key words: thin rod, elastic axis, cantilever, differential equation, spiral spring.

Постановка проблеми. Під дією зовнішнього навантаження прямолінійна вісь стержня згинається, перетворюючись у криву лінію. У несучих конструкціях стержні розраховуються таким чином, щоб їх прогини були мінімальними і не виходили за певні межі. Тому для практичних розрахунків прогину стержнів точне рівняння зігнутої осі стержня замінюють спрощеним лінійним диференціальним рівнянням пружної лінії, яке носить назву основного [1]. Воно дає прийнятні для практики переміщення стержня для малих деформацій при будь-яких видах навантаження. Однак є випадки, коли тонкий стержень сильно згинається при роботі матеріалу в межах пружності (спіральні пружини, акумулятори потенціальної енергії та ін.). В таких випадках переміщення при згині стають співрозмірними із довжиною самої деталі. Тут спостерігається нелінійна залежність великих переміщень від дії зовнішніх сил, хоча матеріал працює пружно [2]. Поведінка пружних деталей з великими прогинами не може бути вивчена за допомогою лінійної теорії згину.

Аналіз останніх досліджень. В підручниках із опору матеріалів [1], в працях з теорії пружності [3] детально розглянута лінійна теорія згину балок при їх невеликих переміщеннях. Для несучих конструкцій, де норми прогину складають 0,01...0,001 прольоту [1] це виправдано, оскільки заміна точного диференціального нелінійного рівняння другого порядку зігнутої осі балки на спрощене лінійне значно полегшує розрахунки і дає досить точні результати. При розрахунку значних прогинів пружних деталей потрібно користуватися спеціальною літературою [2, 4], яка не є такою поширеною, як перша. Значна деформація пружних деталей при дотриманні закону Гука в деякій літературі носить назву нелінійного згину [4]. Такий згин характерний для спіральних пружин.

Формулювання мети статті. Визначити фактори впливу на форму тонкого консольно закріпленого стержня під дією зовнішньої зосередженої сили та використати їх для вдосконалення форми спіральної пружини.

Основна частина. Будемо вважати, що матеріал стержня при деформації працює в межах пружності, тобто при припиненні дії сили він відновлює свою початкову прямолінійну форму і довжина його не змінюється. Розглянемо випадок, коли стержнем є консоль, закріплена в точці A і яка згинається під дією зосередженої сили P , прикладеної до її кінця (рис. 1,а).

Силою ваги стержня нехтуємо, оскільки вона набагато менша за силу P і її вплив на деформацію стержня буде незначний. Це буде ще більш справедливо, якщо розглядати прогин стержня не у вертикальній, а у горизонтальній площині. Будемо вважати, що сила P під час пружної деформації стержня змінює свій напрям, весь час залишаючись перпендикулярною до пружної осі в кінці стержня. Отже, момент знайдемо із виразу $M = -Ps$, де s – поточна довжина стержня. Під дією прикладеного моменту стержень зігнеться і його пружна вісь набуде криволінійної форми. Розподіл кривини вздовж осі стержня буде функцією його довжини: $k = k(s)$.

Із курсу опору матеріалів відомо, що кривина пружної осі прямо пропорційна прикладеному моменту M і обернено пропорційна жорсткості стержня EJ [1]:

$$k = \frac{M}{EJ}, \tag{1}$$

де E – модуль Юнга;
 J – момент інерції плоского перерізу стержня.

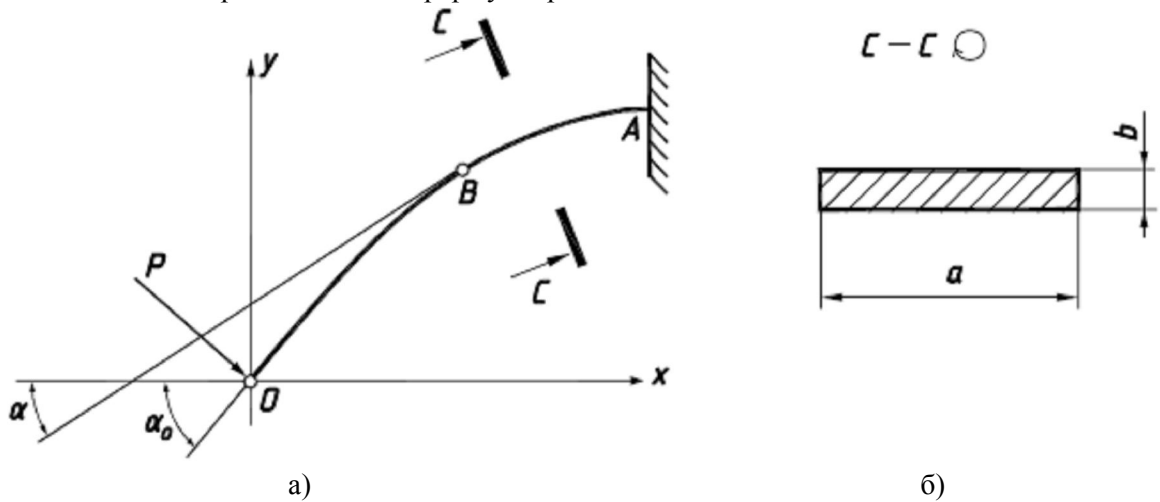


Рис. 1. До визначення прогину тонкого стержня під дією сили P :
 а) форма пружної осі стержня, б) форма поперечного перерізу стержня

При прямокутному перерізі стержня із сторонами a і b (рис. 1,б) момент інерції запишеться:

$$J = \frac{ab^3}{12} \tag{2}$$

Після підстановки у (1) моменту інерції (2) і моменту сили $M=-Ps$ отримаємо залежність кривини $k=k(s)$, тобто натуральне рівняння пружної осі:

$$k = -\frac{12P}{Eab^3} s. \tag{3}$$

Перехід від натурального до параметричних рівнянь будемо здійснювати за відомими формулами диференціальної геометрії [5]:

$$x = \int \cos \alpha ds; \quad y = \int \sin \alpha ds, \tag{4}$$

де α – поточне значення кута між віссю Ox і дотичною до пружної осі в поточній точці B (рис. 1,а). Визначення кривини теж відоме: $k = da/ds$. Звідси маємо: $da = k ds$. Із врахуванням виразу для k (3) можемо записати:

$$\alpha = \int k ds = -\frac{12P}{Eab^3} \int s ds = -\frac{6Ps^2}{Eab^3}. \tag{5}$$

Підстановка (5) у (4) дасть параметричні рівняння пружної осі тонкого стержня:

$$x = \int \cos\left(-\frac{6Ps^2}{Eab^3}\right) ds; \quad y = \int \sin\left(-\frac{6Ps^2}{Eab^3}\right) ds. \tag{6}$$

Вирази (6) проінтегрувати не вдається. Вони відомі в диференціальній геометрії як такі, що описують криву, яка носить назву клотоїди [5, стор. 84, формули (13)].

Чисельне інтегрування виразів (6) було застосовано для консольно закріпленої металевої лінійки довжиною 0,3 м і поперечним перерізом $a=18$ мм і $b=0,3$ мм. При величині сили $P=5$ Н, модулі Юнга $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Па її пружна вісь приймає форму спіралі (клотоїди), тобто лінійка

перетворюється у спіральну пружину (рис. 2,а). Із рис. 2,а видно, що біля місця закріплення лінійки її кривина найбільша і її витки досить щільно розташовані один біля одного. Таким чином, при роботі пружини виникає тертя між сусідніми витками, що знижує її коефіцієнт корисної дії. Якщо ж її помістити у циліндричний барабан, то очевидно, що тертя зросте ще більше. Для зменшення сил тертя застосовують різні мастила [6].

Прикладання сили P з обох кінців лінійки можна розглядати, як дві симетричні консолі. При $P=1,8 \text{ Н}$ кінці лінійки сходяться і пружна лінія складається із двох симетричних частин клоатоїди (рис. 2,б). Після припинення дії сил лінійка повністю відновлює свою прямолінійну форму. Однак слід мати на увазі, що при тривалій дії зазначених сил можуть виникнути залишкові деформації, тобто в ненапруженому стані лінійка матиме початкову кривину.

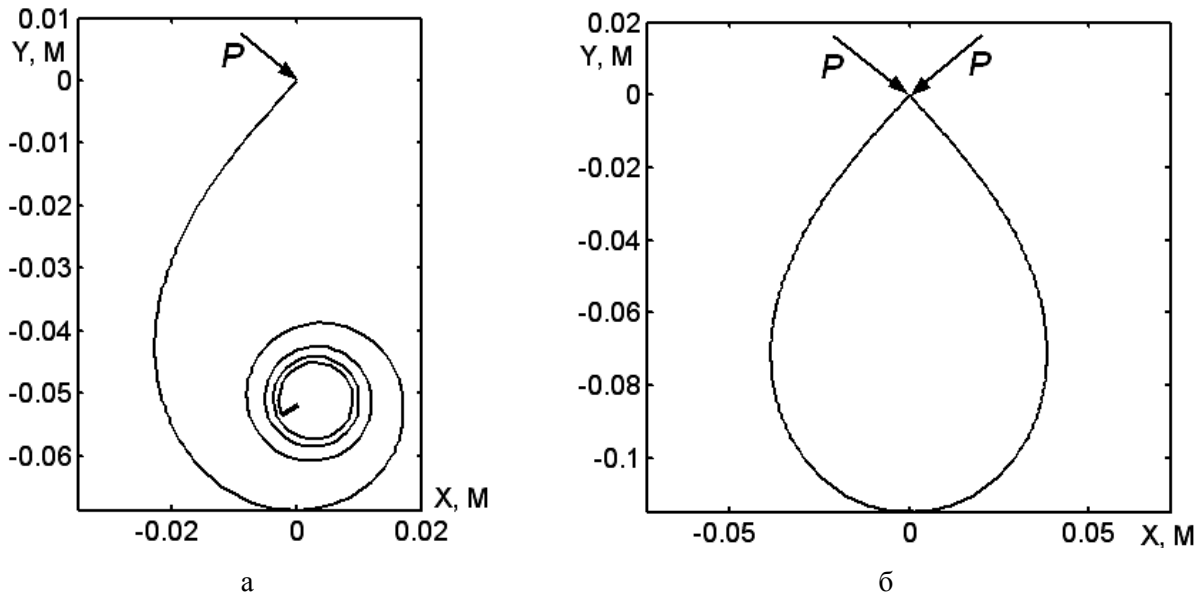


Рис. 2. Прогин металевої лінійки під дією зосередженої сили P :
а) лінійка закріплена у вигляді консолі; $P=5 \text{ Н}$, б) лінійка зігнута двома рівними силами $P=1,8 \text{ Н}$

Аналізуючи форму пружної осі у вигляді спіралі (рис. 2,а), бачимо нерівномірність прилягання сусідніх витків між собою. Ближче до периферії відстань між ними різко зростає. Постає питання оптимізації форми пружини шляхом забезпечення рівномірного проміжку між витками. Такою кривою є евольвента кола, яка має наступне натуральне рівняння:

$$k = \frac{1}{\sqrt{2rs}}, \quad (7)$$

де r – радіус початкового кола при відомому способі її побудови.

Вираз для кута α отримаємо інтегруванням виразу (7) згідно (5):

$$\alpha = \int \frac{ds}{\sqrt{2rs}} = \sqrt{\frac{2}{r}} s. \quad (8)$$

За формулами (4) знаходимо параметричні рівняння евольвенти кола підстановкою в них (8):

$$x = r \cos \sqrt{\frac{2s}{r}} + \sqrt{2rs} \sin \sqrt{\frac{2s}{r}}; \quad y = r \sin \sqrt{\frac{2s}{r}} - \sqrt{2rs} \cos \sqrt{\frac{2s}{r}}. \quad (9)$$

На рис. 3,а побудовано евольвенту кола за рівняннями (9) при $r=0,001 \text{ м}$ і довжині пружної осі $s=0,6 \text{ м}$. Відстань між сусідніми витками отриманої кривої приблизно дорівнює $2\pi r$, що дозволяє співставляти цю величину із товщиною b металевої смуги (рис. 1,б) і приймати необхідне

значення радіуса r . Для прийнятого радіуса ця відстань приблизно дорівнює 6 мм. За формулою (8) знаходимо значення кута α при зміні s від 0 до $0,6$: $\alpha=34,6$ рад. Звідси легко знайти число витків: $34,6/2\pi=5,5$.

Тепер залишилося взяти смугу такої форми, щоб її пружна вісь набула форми евольвенти кола. Очевидно, що ширина такої смуги (розмір a) має бути не постійною, а змінною і зменшуватися до периферії пружини. Щоб знайти вказану закономірність $a=a(s)$, прирівняємо вирази (3) і (7):

$$-\frac{12P}{Eab^3}s = \frac{1}{\sqrt{2rs}}, \quad \text{звідки} \quad a = -\frac{12Ps}{Eb^3}\sqrt{2rs}. \quad (10)$$

За залежністю $a=a(s)$, отриманою в (10), була отримана закономірність зміни ширини смуги в залежності від її довжини (рис. 3,б) при $P=5$ Н, $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Па, $r=0,001$ м, $b=0,0005$ м, $s=0,6$ м. Як видно із рисунка, найбільша ширина $a \approx 0,04$ м смуги має бути в місці консольного кріплення її в центрі пружини. Закономірність зміни ширини смуги близька до лінійної.

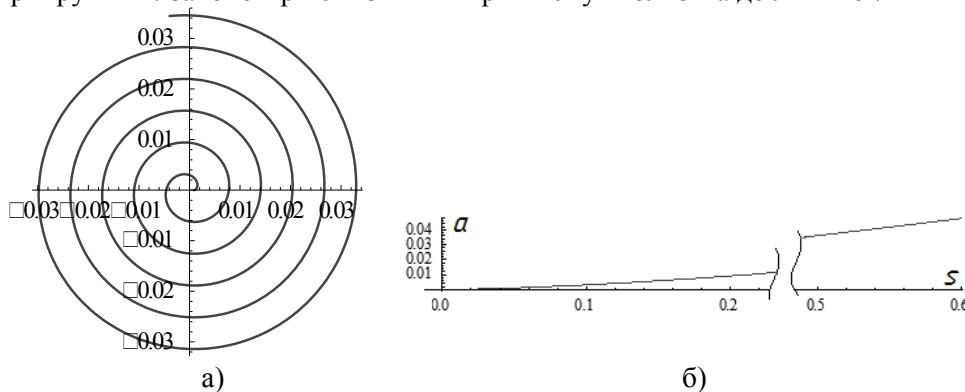


Рис. 3. До розрахунку ширини смуги для виготовлення спіральної пружини:
а) бажана форма пружної осі у вигляді евольвенти кола, б) закономірність зміни ширини смуги для забезпечення заданої форми.

Висновки. При значних прогинах стержнів у межах пружності для описання їх пружної осі не може бути застосована теорія лінійного згину. Для цього доцільно застосовувати натуральне рівняння – залежність кривини осі від дії прикладених моментів у функції довжини дуги цієї осі. Це дозволяє не тільки знаходити форму пружної осі, але за рахунок зміни поперечного перерізу стержня задавати потрібну форму осі. Такий підхід використано для знаходження змінної ширини смуги спіральної пружини з метою вдосконалення її форми і зменшення розмірів.

1. Сопротивление материалов // Под ред. акад. АН УССР Писаренко Г.С. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. - 775 с.
2. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней / Е. П. Попов. – М.: Наука, 1986. - 286 с.
3. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1979. - 560 с.
4. Захаров Ю. В. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней / Ю. В. Захаров, К. Г. Охоткин // Прикладная механика и техническая физика, 2002. - № 5. – С. 124 – 131.
5. Милинский В. И. Дифференциальная геометрия / В.И. Милинский. - Л.: КУБУЧ, 1934. - 332 с.
6. Анурьев В. И. Справочник конструктора-машиностроителя / В. И. Анурьев. - В 3-х томах. – Т.3. – М.: Машиностроение, 1979. – 557 с.

Стаття надійшла в редакцію 15.03.2015.