

УДК 514.7

Н. М. Аушева

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКИХ СІТОК НА ОСНОВІ ІЗОТРОПНИХ КРИВИХ ЗА ГОДОГРАФОМ ПІФАГОРА

У роботі пропонується застосувати для моделювання плоскої сітки ізотропну криву за годографом Піфагора (PH). Побудова сітки здійснюється на основі конформної та квазіконформної заміни параметра. Доведено, що при конформній заміні параметра сітка буде ортогональна та ізотермічна. Розраховано коефіцієнти першої квадратичної форми. Для розрахунків використовується крива, яка задана у комплексному просторі.

Ключові слова: ізотропна крива, крива за годографом Піфагора, плоска сітка, ортогональна сітка.

Рис. 1. Літ. 7

Н. Н. Аушева**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ СЕТОК НА ОСНОВЕ ИЗОТРОПНЫХ КРИВЫХ ПО ГОДОГРАФУ ПИФАГОРА**

В работе предлагается применить для моделирования плоской сетки изотропную кривую по годографу Пифагора (PH). Построение сетки осуществляется на основе конформной и квазиконформной замены параметра. Доказано, что при конформной замене параметра сетка будет ортогональная и изотермическая. Рассчитаны коэффициенты первой квадратичной формы. Для расчетов используется кривая, которая задана в комплексном пространстве.

Ключевые слова: изотропная кривая, кривая по годографу Пифагора, плоская сетка, ортогональная сетка.

N. N. Ausheva**MODELING OF PLANAR GRIDS BASED ON ISOTROPIC CURVES BY PYTHAGOREAN HODOGRAPH**

The paper proposed to use an isotropic curve by Pythagorean hodograph (PH) for modeling a planar grid. Construction of grid is performed based on conformal and quasi-conformal replacement of parameters. It is proved that the grid is orthogonal and isothermal due to conformal replacement of parameter. Coefficients of the first quadratic form were calculated. For calculations it is used the curve, which is given in the complex space.

Keywords: isotropic curve, curve by Pythagorean hodograph, planar grid, orthogonal grid

Постановка проблеми. При моделюванні поверхонь часто виникають питання одержання поверхонь із сітками, що мають специфічні властивості. Такими властивостями можуть бути ортогональність та ізотермічність. При використанні кривих з конкретно заданою довжиною доцільно переходити до натурального параметра, що не завжди буває можливо. При роботі з поліноміальними кривими доводиться застосовувати апроксимаційні методи для розрахунку довжини кривої. Розгляд у комплексі цих питань призводить до доцільності дослідження побудови сіток на основі кривих, які дозволяють розраховувати довжину кривої без додаткових обчислень. Постійне доповнення апарату формоутворення таких сіток, призводить до полегшення розв'язання прикладних задач, які спираються на диференціальні властивості поверхонь.

Аналіз останніх досліджень. Конструюванню і перетворенню поверхонь із збереженням ортогональності сіток координатних ліній та ліній кривини присвячено дисертацію [1]. Розглянуто утворення плоских ортогональних сіток різними способами, перетворення їх у поверхні та подальше конформне перетворення одержаних поверхонь із збереженням вказаних властивостей. Авторами роботи [2] запропоновано новий метод побудови плоских ортогональних та ізотермічних координатних сіток на основі ізотропних кривих Без'є 3-го порядку. Отримано умови утворення таких сіток із застосуванням конформного та квазіконформного відображення. Наведено приклад використання існуючого способу одержання просторової ортогональної сітки на основі плоскої.

Професором Ріда Фароуки та його соавторами [3-6] досліджується застосування кривих за годографом Піфагора (PH) у геометричному дизайні, графіці, плануванні та керуванні рухом. Розглядається теорія, алгоритми та використання плоских та просторових PH-кривих. Автором роботи [7] пропонується моделювати плоску ізотропну криву за годографом Піфагора (PH). Знайдені залежності для кривої Без'є 3-го порядку за годографом Піфагора та побудовано ізотропну криву.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Метою даної роботи є розробка способу конструювання плоских сіток на основі конформної та квазіконформної заміни параметра. Використання кривих за годографом Піфагора дозволить зробити метод генерації сітки залежним від дійсної довжини напрямної кривої.

Основна частина. Існує деякий клас кривих який називається кривими за годографами Піфагора [6]. З математичної точки зору плоска крива $r(t) = [x(t) \ y(t)]$ буде кривою за годографом Піфагора (РН) тоді і тільки тоді, коли годограф (похідні) від $r(t)$ пов'язані наступним співвідношенням:

$$|r'(t)|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma(t)^2, \quad (1)$$

для деякого многочлена $\sigma(t)$.

Для виразу (1) були знайдені умови, за якими поліноміальна крива може бути РН-кривою:

$$x'(t) = w(t)(u(t)^2 - v(t)^2), \quad y'(t) = 2w(t)u(t)v(t), \quad (2)$$

де $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ - поліноми.

Побудуємо плоску сітку на основі ізотропної кривої за годографом Піфагора, якщо крива подається у вигляді кубічної кривої Без'є:

$$r(t) = \sum_{i=0}^n r_j J_{n,j}(t), \quad \text{де } J_{n,j}(t) = \frac{n!}{i!(n-j)!} t^j (1-t)^{n-j}, \quad r_j = [x_j \ y_j], \quad n=3. \quad (3)$$

Для кубічної кривої задамо $w(t) = 1$, а залежності $u(t)$ та $v(t)$ задаються у вигляді лінійних поліномів:

$$u(t) = u_a(1-t) + u_b t, \quad v(t) = v_c(1-t) + v_d t, \quad (4)$$

де u_a, u_b, v_c, v_d - комплексні числа.

У роботі [7] було знайдено залежності для кубічної кривої Без'є за годографом Піфагора:

$$x_0 = \frac{v_c^2}{3}, \quad x_1 = \frac{u_a^2}{3}, \quad x_2 = \frac{u_a^4}{3v_c^2}, \quad x_3 = \frac{u_a^6}{3v_c^4}, \quad y_1 = \frac{2}{3}u_a v_c + y_0, \quad y_2 = \frac{2u_a^3}{3v_c} + y_1, \quad (5)$$

$$y_3 = \frac{2u_a^5}{3v_c^3} + y_2.$$

Для ізотропної кривої необхідно накласти додаткову умову:

$$v_c^2 = -u_a^2 \quad \text{або} \quad v_c^2 = u_a^2 \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad (6)$$

Підставимо в рівняння (3) $t = u + iv$, співвідношення (5) з умовою (6), будемо мати:

$$x(u + iv) = (-0.17 + 0.29i)u_a^2(1-u-iv)^3 + u_a^2(1-u-iv)^2(u+iv) +$$

$$+ (-0.5 - 0.87i)u_a^2(1-u-iv)(u+iv)^2 + (-0.17 + 0.29i)u_a^2(u+iv)^3,$$

$$y(u + iv) = y_0(1-u-iv)^3 + 3((0.34 + 0.58i)u_a^2 + y_0)(1-u-iv)^2(u+iv) +$$

$$+ 3(0.67u_a^2 + y_0)(1-u-iv)(u+iv)^2 + y_0(u+iv)^3. \quad (7)$$

Відокремимо дійсну частину від одержаних виразів (7) та проведемо дослідження. Для цього візьмемо часткові похідні:

$$x_u(u, v) = x_{u0}(u, v) + x_{u1}(u, v)u + x_{u2}(u, v)u^2, \quad \text{де}$$

$$x_{u0}(u, v) = (5u_{a\text{Im}}^2 - 5u_{a\text{Re}}^2 + 5.2u_{a\text{Re}}u_{a\text{Im}})v^2 + 12u_{a\text{Re}}u_{a\text{Im}}v + 1.73u_{a\text{Re}}u_{a\text{Im}} + 1.5u_{a\text{Re}}^2 - 1.5u_{a\text{Im}}^2,$$

$$x_{u1}(u, v) = (5.2u_{a\text{Im}}^2 - 5.2u_{a\text{Re}}^2 - 18u_{a\text{Re}}u_{a\text{Im}})v - 6u_{a\text{Re}}^2 + 6u_{a\text{Im}}^2,$$

$$x_{u2}(u, v) = -4.5u_{a\text{Im}}^2 + 4.5u_{a\text{Re}}^2 - 5.2u_{a\text{Re}}u_{a\text{Im}};$$

$$x_v(u, v) = x_{v0}(u, v) + x_{v1}(u, v)u + x_{v2}(u, v)u^2, \quad \text{де}$$

$$x_{v0}(u, v) = (-2.6u_{a\text{Im}}^2 + 2.6u_{a\text{Re}}^2 + 9u_{a\text{Re}}u_{a\text{Im}})v^2 + (6u_{a\text{Re}}^2 - 6u_{a\text{Im}}^2)v - 3u_{a\text{Re}}u_{a\text{Im}} + 0.9u_{a\text{Re}}^2 - 0.9u_{a\text{Im}}^2,$$

$$x_{v1}(u, v) = (9u_{a\text{Im}}^2 - 9u_{a\text{Re}}^2 + 10.4u_{a\text{Re}}u_{a\text{Im}})v + 12u_{a\text{Re}}u_{a\text{Im}},$$

$$x_{v2}(u, v) = 2.6u_{a\text{Im}}^2 - 2.6u_{a\text{Re}}^2 - 9u_{a\text{Re}}u_{a\text{Im}};$$

$$y_u(u, v) = y_{u0}(u, v) + y_{u1}(u, v)u + y_{u2}(u, v)u^2, \text{ де}$$

$$y_{u0}(u, v) = (-3u_{aIm}^2 + 3u_{aRe}^2 + 10.4u_{aRe}u_{aIm})v^2 + (6.9u_{aRe}^2 - 6.9u_{aIm}^2)v - 3.5u_{aRe}u_{aIm} + u_{aRe}^2 - u_{aIm}^2,$$

$$y_{u1}(u, v) = (10.4u_{aIm}^2 - 10.4u_{aRe}^2 + 12u_{aRe}u_{aIm})v + 12u_{aRe}u_{aIm},$$

$$y_{u2}(u, v) = 3u_{aIm}^2 - 3u_{aRe}^2 - 10.4u_{aRe}u_{aIm};$$

$$y_v(u, v) = y_{v0}(u, v) + y_{v1}(u, v)u + y_{v2}(u, v)u^2, \text{ де}$$

$$y_{v0}(u, v) = (-5.2u_{aIm}^2 + 5.2u_{aRe}^2 - 6u_{aRe}u_{aIm})v^2 - 13.9u_{aRe}u_{aIm}v - 2u_{aRe}u_{aIm} - 1.73u_{aRe}^2 + 1.73u_{aIm}^2$$

$$y_{v1}(u, v) = (-6u_{aIm}^2 + 6u_{aRe}^2 + 20.78u_{aRe}u_{aIm})v + 6.9u_{aRe}^2 - 6.9u_{aIm}^2,$$

$$y_{v2}(u, v) = (5.2u_{aIm}^2 - 5.2u_{aRe}^2 + 6u_{aRe}u_{aIm}).$$

Проведений аналіз показав, що $x_v(u, v) \neq y_u(u, v)$, $x_u(u, v) \neq -y_v(u, v)$.

При підстановці у вирази для першої квадратичної форми одержимо: $F \neq 0$, $E \neq G$, тобто сітка не буде ортогональною та ізотермічною.

Для виконання умов ортогональності та ізотермічності необхідно, щоб виконувались умови :

$$x_v(u, v) = y_u(u, v), \quad x_u(u, v) = -y_v(u, v) \quad (8)$$

Розглянемо детальніше вирази часткових похідних. При аналізі видно, що відмінність часткових похідних для координати x від часткових похідних для координати y складає певну константу. Для знаходження цієї константи візьмемо результат ділення : $\frac{x_v(u, v)}{y_u(u, v)}$, одержимо

$const = 1.154700577$. Аналогічно порівняємо $x_u(u, v)$ та $y_v(u, v)$, одержимо:

$$\frac{x_u(u, v)}{y_v(u, v)} = -const = -1.154700577.$$

Розглянемо узагальнений підхід до формування базисних функцій (4). Для виконання умови (8) необхідно накласти наступні обмеження:

$$v_{cRe} = -u_{aIm}, \quad v_{cIm} = u_{aRe}, \quad v_{dIm} = u_{bRe}, \quad v_{dRe} = -u_{bIm}. \quad (9)$$

Вирази (9) визначають умови ортогональності та ізотермічності сітки, побудованої на основі РН-кривої для лінійних базових функцій.

Координати кривої Без'є визначаються на основі виразів:

$$x_1 = \frac{u_a^2 - v_c^2}{3} + x_0, \quad x_2 = \frac{u_a u_b - v_c v_d}{3} + x_1, \quad x_3 = \frac{u_b^2 - v_d^2}{3} + x_2, \quad (10)$$

$$y_1 = \frac{2u_a v_c}{3} + y_0, \quad y_2 = \frac{u_a v_d - v_c u_b}{3} + y_1, \quad y_3 = \frac{2u_b v_d}{3} + y_2.$$

Якщо узагальнити даний підхід, то отримуємо наступне твердження: для моделювання ортогональної та ізотермічної сітки, побудованої на основі плоскої РН-кривої, необхідно, щоб виконувалась умова:

$$v(t) = iu(t). \quad (11)$$

Дослідимо сітку, побудовану на основі квазіконформного відображення $t = ku + iv$ та ізотропної кубічної кривої Без'є за годографом Піфагора. При дослідженні часткових похідних, прийдемо до рівнянь (12):

$$kx_v(u, v) = y_u(u, v), \quad x_u(u, v) = -ky_v(u, v) \quad (12)$$

Тепер розрахуємо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$F = -ky_v(u, v)x_v(u, v) + kx_v(u, v)y_v(u, v) = 0, \quad E = k^2(x_v(u, v)^2 + y_v(u, v)^2),$$

$$G = x_v(u, v)^2 + y_v(u, v)^2, \text{ тобто } E = k^2G.$$

Сітка буде ортогональна, але не ізотермічна.

Проведемо дослідження сітки, яка побудована за допомогою відображення $t = u + ivk$, одержимо:

$$x_v(u, v) = ky_u(u, v), \quad kx_u(u, v) = -y_v(u, v) \quad (13)$$

Розрахуємо коефіцієнти для першої квадратичної форми:

$$F = x_u(u, v)ky_u(u, v) - y_u(u, v)kx_u(u, v) = 0,$$

$$E = x_u(u, v)^2 + y_u(u, v)^2, G = k^2(y_u(u, v)^2 + x_u(u, v)^2), \text{ тобто } k^2 E = G.$$

Сітка буде ортогональна, але не ізотермічна.

Приклад.. Побудуємо сітку на основі кривих за годографом Піфагора.

Задамо : $u(t) = (4 - 5i)(1 - t) + (5 - 3i)t$, $x_0 = 2 + 3i$, $y_0 = 3 + 4i$. На основі виразу (11) розрахуємо $v(t)$: $v(t) = (5 + 4i)(1 - t) + (3 + 5i)t$.

Застосовуючи вирази (10), знайдемо інші координати реперних точок:

$$x_1 = -4 - 23.67i, \quad x_2 = -0.67 - 48.33i, \quad x_3 = 10 - 68.33i,$$

$$y_1 = 29.67 - 2i, \quad y_2 = 54.33 + 1.33i, \quad y_3 = 74.33 + 12i.$$

На рис.1 відображено побудовані дійсні сітки на основі кривої Без'є за годографом Піфагора.

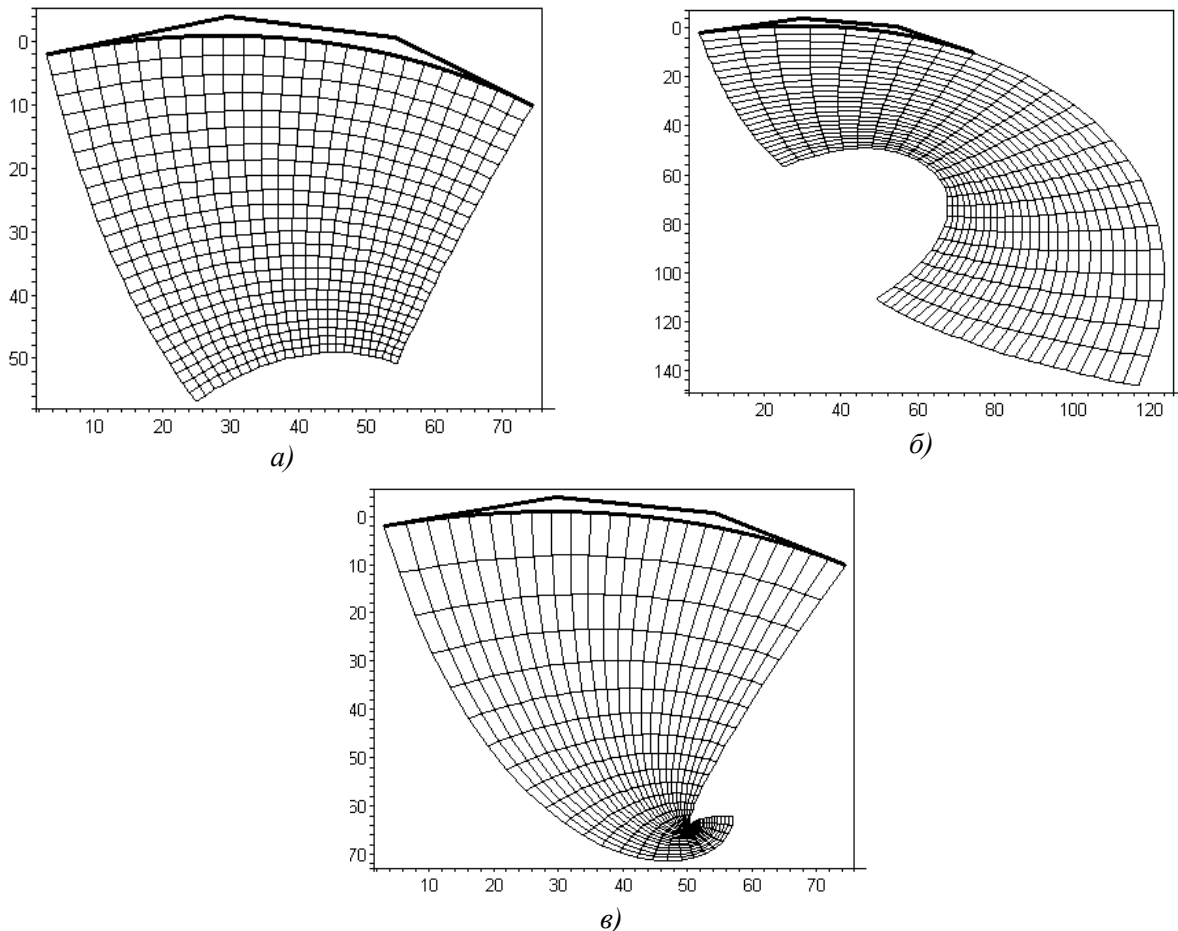


Рис. 1. Дійсні сітки на основі кривої Без'є за годографом Піфагора при різній заміні параметра (а - $t = u + iv$, б - $t = 3u + iv$, в - $t = u + 3iv$)

Рівняння для дійсної сітки на основі кривої за годографом Піфагора:

а) при заміні $t = u + iv$ (рис. 1а):

$$x(u, v) = 2 - 18u + 79.99v - 28v^2 + 28u^2 - 12uv + 5.99uv^2 - 1.99u^3 + 2.66v^3 - 8u^2v,$$

$$y(u, v) = 3 - 80u + 18v + 6v^2 - 6u^2 - 55.99uv + 7.99uv^2 - 2.66u^3 - 1.99v^3 + 5.99u^2v;$$

б) при заміні $t = 3u + iv$ (рис. 1б):

$$x(u, v) = 2 - 54u + 79.99v - 28v^2 + 252u^2 - 35.99uv + 17.99uv^2 - 53.99u^3 + 2.66v^3 - 72u^2v,$$

$$y(u, v) = 3 - 240u + 18v + 6v^2 - 54u^2 - 168uv + 23.99uv^2 - 71.99u^3 - 1.99v^3 + 53.99u^2v;$$

в) при заміні $t = u + 3iv$ (рис. 1в):

$$x(u, v) = 2 - 18u + 239.99v - 252v^2 + 28u^2 - 35.99uv + 53.99uv^2 - 1.99u^3 + 72v^3 - 24u^2v,$$

$$y(u, v) = 3 + 80u + 54v + 54v^2 - 6u^2 - 168uv + 71.99uv^2 - 2.66u^3 - 53.99v^3 + 17.99u^2v.$$

Висновки. Дослідження показали, що застосування конформного та квазіконформного відображення до ізотропної кривої Без'є за годографом Піфагора породжує сітки на площині з властивістю ортогональності, що відкриває нові можливості щодо конструювання поверхонь на основі заданої довжини напрямної кривої.

1. Дзюба В.В. Конструювання і перетворення поверхонь із збереженням ліній кривини: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 „Прикладна геометрія, інженерна графіка” / В.В. Дзюба. - К.: КНУБА, 2008. - 21 с.
2. Аушева Н. М. Побудова поверхонь з ортогональними координатними сітками на основі ізотропних кривих / Н.М. Аушева, А.А. Демчишин // Прикладна геометрія та інженерна графіка : міжв. наук.-техн. збірник. – К. : КНУБА, 2013. – Вип. 91. – С. 2–7.
3. Farouki R.T. Algorithms for spatial Pythagorean–hodograph curves / R.T. Farouki, C.Y. Han // Geometric Properties for Incomplete Data. – Springer, 2006. – P.43–58.
4. Farouki R.T. Construction of Bezier surface patches with Bezier curves as geodesic boundaries / R.T. Farouki, N. Szafran, L. Biard // Preprint submitted to Elsevier. – 2009. – 28 P.
5. Farouki R.T. Pythagorean hodographs / R.T. Farouki, T. Sakkalis // IBM J. Res. Develop. – № 34(5). – 1990. – P.736–752.
6. Farouki R.T. Pythagorean–Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable / R.T. Farouki. – Springer, 2008. – 728 p.
7. Аушева Н. М. Конструювання плоскої ізотропної кривої на основі рівняння кривої за годографом Піфагора / Н.М. Аушева // Технічна естетика і дизайн : міжв. наук.-техн. зб. – К. : КНУБА, 2013. – Вип. 12.– С. 7–11.

Стаття надійшла до редакції 16.04.2015.