

УДК 514.18

В.М. Бабка

ЗМІНА НАПРЯМУ ОБЕРТАННЯ ВІДРІЗКА БЕЗ ЙОГО ЗУПИНКИ

В роботі розглянуто рух відрізка за умови, що швидкості його кінців рівні. Знайдено умови, за яких траєкторії кінців відрізка переходять з одного кола на інше. При цьому змінюється напрям обертання відрізка. Чисельним інтегруванням побудовано траєкторії руху кінців відрізка.

Ключові слова: швидкість, траєкторія, натуральне рівняння, тригранник Френе.

Бабка В.Н.

ИЗМЕНЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ВРАЩЕНИЯ ОТРЕЗКА БЕЗ ЕГО ОСТАНОВКИ.

Рассмотрено движение отрезка с условием, что скорости его концов равны. Найдены условия, при которых траектории концов отрезка переходят с одной окружности на другую. При этом изменяется направление вращения отрезка. Численным интегрированием построены траектории движения концов отрезка.

Ключевые слова: скорость, траектория, натуральное уравнение, трехгранник Френе.

Babka V.

VEERING OF TWIRL OF A SEGMENT WITHOUT ITS STOP.

Conditions at which trajectories of the ends of a segment pass from one round to another are discovered. The segment rotation sense thus varies. Driving of a segment with a condition, that velocities of its extremities the equal is observed. The numerical integration are constructed mechanical trajectories of the extremities of a segment.

Key words: velocity, trajectory, natural equation, three – edge of Frenet.

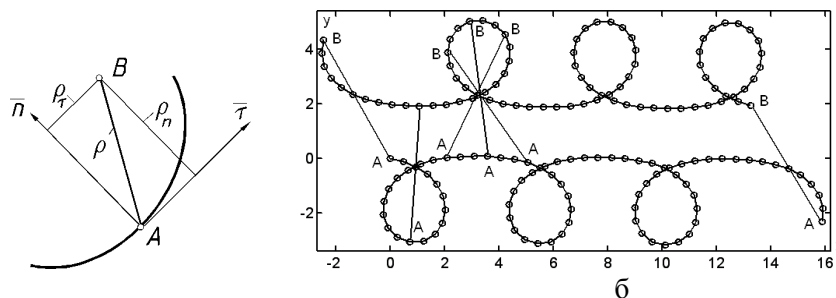
Постановка проблеми. Застосування супровідного тригранника кривої, як рухомої системи по відношенню до нерухомої дозволяє знаходити криві за наперед заданими властивостями. Наприклад, у праці [1] знайдено криву, яка за своїми кінематичними характеристиками є аналогом прямої, а саме: при однакових коефіцієнтах тертя матеріальна точка буде рухатися по них під дією сили власної ваги із однаковими сталими швидкостями (мається на увазі, що крива є ортогональним перерізом циліндра вертикальною площиною, а пряма – аналогічним перерізом похилої площини). У праці [2] досліджується такий відносний рух відрізка у системі тригранника, при якому його кінці у абсолютному русі мають однакові швидкості, причому траєкторія одного кінця задана.

Аналіз останніх досліджень. Використання тригранника Френе, який є супровідним для розшукуваної кривої із заданими властивостями, показано в згаданій праці [1]. В працях [2, 3] розглянуто рух відрізка із сталими швидкостями переміщення його кінців для заданих траєкторій руху одного кінця. Показано, зокрема, що при заданій траєкторії руху одного кінця задача має два розв'язки, одним із яких є поступальне переміщення відрізка по конгруентних кривих. Останні публікації робіт із прикладної геометрії показують, що цей напрям становить певний інтерес для досліджень кривих та їх властивостей.

Формулювання мети статті. Знайти такий рух відрізка у площині з рівними швидкостями кінців, при якому зміна його напрямку обертання навколо середини не приводить до зупинки самого відрізка.

Основна частина. Розглянемо супровідний тригранник Френе в точці A плоскої кривої. В системі самого тригранника задамо точку B , радіус-вектор якої позначимо через відстань ρ (рис. 1,а). Його проекції на орти $\bar{\tau}$ і \bar{n} тригранника запишуться довжини дуги s кривої:

$$\rho_{\tau} = \rho_{\tau}(s); \quad \rho_n = \rho_n(s). \quad (1)$$

Рисунок 1. До знаходження абсолютної траєкторії точки B :

- а) положення точки B в системі тригранника Френе (бінормаль \bar{b} проєціюється в точку);
 б) траєкторії кінців відрізка AB знайдені на основі функцій $\rho_\tau = \rho \cos as$ і $\rho_n = \rho \sin as$.

Якщо відстань $\rho=AB$ є величиною сталою, то в системі тригранника можна розглядати відносний рух відрізка AB , причому траєкторією точки A буде задана напрямна крива, а траєкторію точки B необхідно розшукати при умові рівності швидкостей кінців відрізка. У праці [4] отримано вирази для знаходження абсолютної швидкості точки B в проєкціях на орти тригранника, із яких можна отримати аналітичну умову рівності швидкостей кінців відрізка через рівняння (1) та їх похідні і натуральне рівняння $k=k(s)$ кривої, по якій рухається точка A . Ця умова має наступний вигляд:

$$(\rho'_\tau - k\rho_n + 1)^2 + (k\rho_\tau + \rho'_n)^2 = 1. \quad (2)$$

Після піднесення до квадрату і спрощень рівність (2) набуває вигляду:

$$2(\rho'_\tau - k\rho_n) + \rho'^2_\tau + \rho'^2_n + k^2(\rho^2_\tau + \rho^2_n) + 2k(\rho_\tau\rho'_n - \rho'_\tau\rho_n) = 0. \quad (3)$$

Оскільки довжина відрізка незмінна, то до рівняння (3) потрібно додати ще одне: $\rho^2_\tau + \rho^2_n = \rho^2 = const$. Для того, щоб отримати закономірність руху відрізка за рівнянням (3), необхідно задати якусь умову, наприклад, натуральне рівняння вихідної кривої $k=k(s)$. Можна також задати одну із закономірностей $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$ або $\rho_n = \rho_n(s)$ і знайти натуральне рівняння вихідної кривої. В роботі [3] розглянуті закономірності на базі тригонометричних функцій $\rho_\tau = \rho \cos as$ і $\rho_n = \rho \sin as$ і отримані відповідні траєкторії руху точок A і B (рис. 1,б). В даній праці ми розглянемо аналогічні залежності на базі гіперболічних функцій:

$$\rho_\tau = \rho / \cosh as; \quad \rho_n = \rho \tanh as, \quad (4)$$

які відповідають умові $\rho^2_\tau + \rho^2_n = \rho^2$, причому ρ і a – сталі величини. Знайдемо похідні виразів (4):

$$\rho'_\tau = -\frac{a\rho \tanh as}{\cosh as}; \quad \rho'_n = \frac{a\rho}{\cosh^2 as}. \quad (5)$$

Підставимо (4) і (5) в (3) і після спрощень отримаємо:

$$\rho \left(k + \frac{a}{\cosh as} \right) \left(k\rho + \frac{a\rho}{\cosh as} - 2 \tanh as \right) = 0. \quad (6)$$

Розв'язавши (6) відносно k , будемо мати два розв'язки:

$$k = -\frac{a}{\cosh as}; \quad k = \frac{1}{\rho \cosh as} (2 \sinh as - a\rho). \quad (7)$$

До першого розв'язку не входить довжина ланки ρ . Перехід від натурального до параметричних рівнянь кривої (траєкторії точки A) здійснимо за відомими формулами:

$$x_A = \int \cos \left(\int k ds \right) ds; \quad y_A = \int \sin \left(\int k ds \right) ds. \quad (8)$$

Після підстановки (7) в (8) і інтегрування одержимо:

$$x_A = \frac{1}{a} \arccos \left(\frac{1}{\cosh as} \right); \quad y_A = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{1}{\cosh as} \right). \quad (9)$$

Знайдемо траєкторію точки B за формулами, наведеними в праці [4]:

$$\begin{aligned} x_B &= \rho_\tau \cos \left(\int k ds \right) - \rho_n \sin \left(\int k ds \right) + x_A; \\ y_B &= \rho_\tau \sin \left(\int k ds \right) + \rho_n \cos \left(\int k ds \right) + y_A. \end{aligned} \quad (10)$$

Підставивши в (10) вирази (9) і перший вираз із (7), після інтегрування і спрощень одержимо:

$$x_B = \frac{1}{a} \arccos \left(\frac{1}{\cosh as} \right) + \rho; \quad y_B = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{1}{\cosh as} \right). \quad (11)$$

Порівнюючи траєкторію точки A (9) і траєкторію точки B (11), бачимо, що вони конгруентні і зміщені вздовж осі Ox на величину довжини відрізка ρ . Отже відрізок здійснює

поступальний рух (рис. 2,а). Звідси стає зрозуміло, чому до натурального рівняння траєкторії точки A (перший вираз в 7) не входить довжина відрізка ρ . Відрізок буде рухатися поступально з рівними швидкостями кінців при будь-якій довжині відрізка ρ .

Стосовно другого варіанту руху, для якого траєкторія точки A описується другим рівнянням в (7), то перехід від натурального рівняння до параметричних за формулами (8) неможливий в аналітичному вигляді, отже потрібно застосовувати чисельне інтегрування. На рис. 2,б показано фрагменти траєкторій з відрізком $AB=\rho=1$ в крайніх положеннях, одержаних при $a=0,5$.

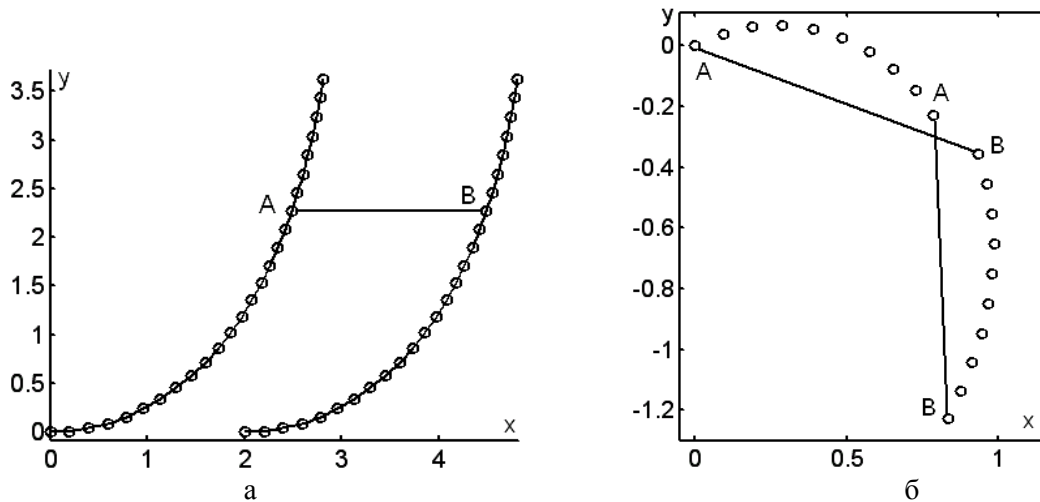


Рисунок 2. Траєкторії відрізка сталої довжини AB , у яких одна крива задається одним із натуральних рівнянь (7):

- а) траєкторія точки A задається першим рівнянням (7);
 б) траєкторія точки A задається другим рівнянням (7).

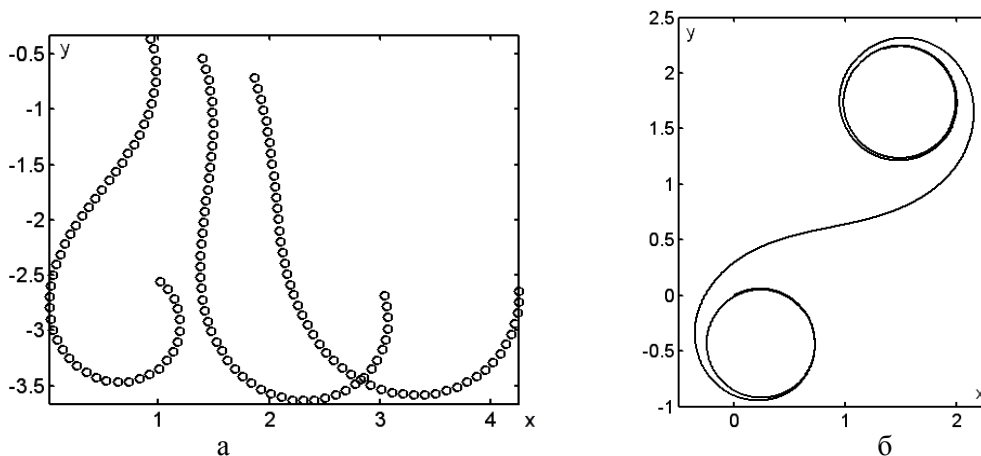


Рисунок 3. Крива, побудована чисельними методами за натуральним рівнянням

$$k = (2 \sinh as - a\rho) / (\rho \cosh as):$$

- а) дуги однакої довжини при $a=0,5$ і $\rho=1,0$; $\rho=1,5$; $\rho=2,0$;
 б) крива при зміні s від $-\infty$ до $+\infty$ ($a=0,5$; $\rho=1$).

З'ясуємо форму напрямної кривої. До її натурального рівняння входять дві сталі величини: a і ρ . Вивчимо їх вплив на форму кривої. На рис. 3,а побудовані дуги рівної довжини кривої при зміні натурального параметра в однакових межах з однаковим значенням сталої a і різними значеннями сталої ρ . На рис. 3,б зображена крива при зміні натурального параметра від мінус нескінченності до плюс нескінченності. Вона подібна до клотоїди. При необмеженому зростанні натурального параметра вона наближається до кола, яке є для неї асимптотичним. Щоб взнати його радіус, проаналізуємо натуральне рівняння кривої $k = (2 \sinh as - a\rho) / (\rho \cosh as)$. При необмеженому зростанні параметра s перша складова $2 \tanh as / \rho$ дуже швидко наближається до

значення $2/\rho$ (оскільки тангенс гіперболічний наближається до одиниці), а друга складова $-a/\cosh as$ - до нуля. Таким чином, діаметр асимптотичного кола дорівнює довжині відрізка ρ .

На рис. 4 за допомогою чисельних методів побудовано траєкторії точок A і B із зображенням проміжних положень відрізка AB при його русі по кривих. Внаслідок того, що крок інтегрування вибрано досить великий (він дорівнює відстані між сусідніми точками на кривих), самі криві побудовані не дуже точно. Проте на цьому рисунку зручно простежити рух відрізка із одного кола на друге.

Оскільки діаметр кола дорівнює довжині відрізка $AB=\rho$, то при досить великих значеннях параметра s його кінці будуть рухатися із однаковими швидкостями по колу, знаходячись в діаметрально протилежних точках, тобто відрізок AB буде проходити через центр кола.

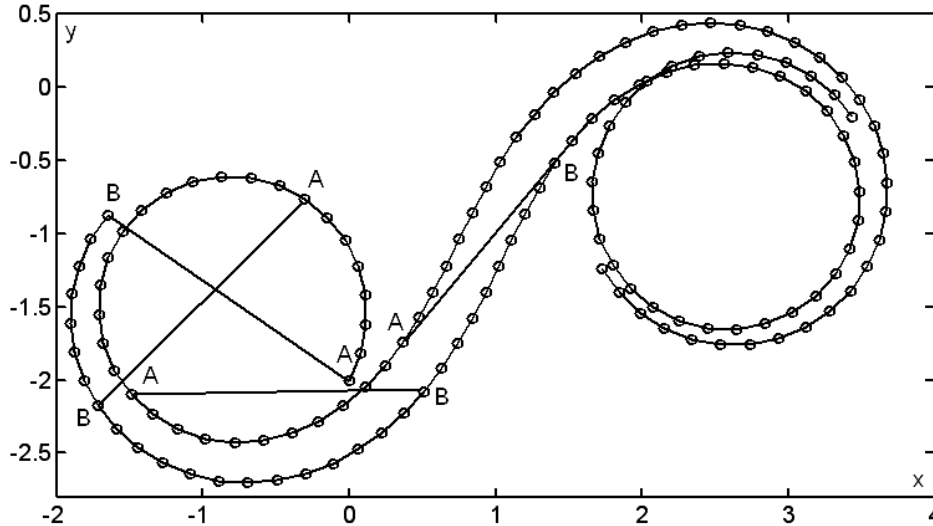


Рисунок 4. Рух відрізка AB з рівними швидкостями його кінців по кривих, які забезпечують перехід його із одного кола на інше.

При послідовному русі відрізка з лівого кола на праве (рис. 4) кутова швидкість змінює свій напрям на протилежний (проти годинникової стрілки на лівому колі і за годинниковою стрілкою на правому колі).

З'ясуємо, як впливає на траєкторію точки A (вихідну криву) величина сталої a . На рис. 5,а побудовано криву при тому ж значенні $\rho=2$, що і на рис. 4, а величину сталої a збільшили від 0,5 до 2. Із рисунка видно, що міжцентрова відстань зменшилася. Таким чином, з'ясовано вплив величини сталої a і ρ на форму і параметри вихідної кривої $k = (2 \sinh as - a\rho)/(\rho \cosh as)$.

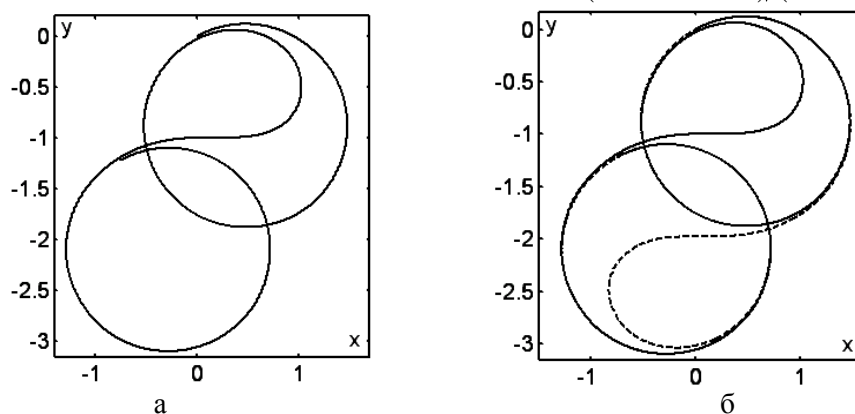


Рисунок 5. Криві, що забезпечують рух відрізка з одного кола на інше ($\rho=2$; $a=2$):
 а) траєкторія руху точки A ;
 б) траєкторії руху двох точок (штриховою лінією показана траєкторія руху точки B).

Зменшимо міжцентрову відстань між колами вихідної кривої, збільшивши величину сталої a . На рис 6 побудовані траєкторії руху точок A і B при різних значеннях сталої a . На рис. 6,а показані положення відрізка AB на початку переходу на друге коло, в середині переходу і в кінці переходу. При такому переході з'ясовано цікаві властивості руху відрізка. По-перше, прослідкувавши за рухом точки A (або B), можна побачити, що відрізок міняє напрям

обертального руху (про що вже говорилося), а по-друге, середина відрізка в процесі такого переходу рухається по прямій лінії з точки O до O' . Отже можна поміняти напрям обертального руху відрізка на протилежний без його зупинки, перемістивши центр обертання по прямій лінії із одного положення в друге, при цьому кінці відрізка повинні рухатися по спеціальних траєкторіях.

Таким чином, збільшення сталої a веде до зменшення міжцентрової відстані OO' і також до зменшення величини петлі, яку описують кінці відрізка при зміні напрямку кутової швидкості обертання на протилежний. Можна припустити, що нескінченному зростанні величини a обидва кола збігаються, а петля перетвориться в точку звороту. В цьому випадку зміна напрямку обертання відрізка відбувається в момент його зупинки. Зменшення сталої a веде до збільшення петлі і більш плавної зміни напрямку обертання відрізка навколо його середини без зупинки.

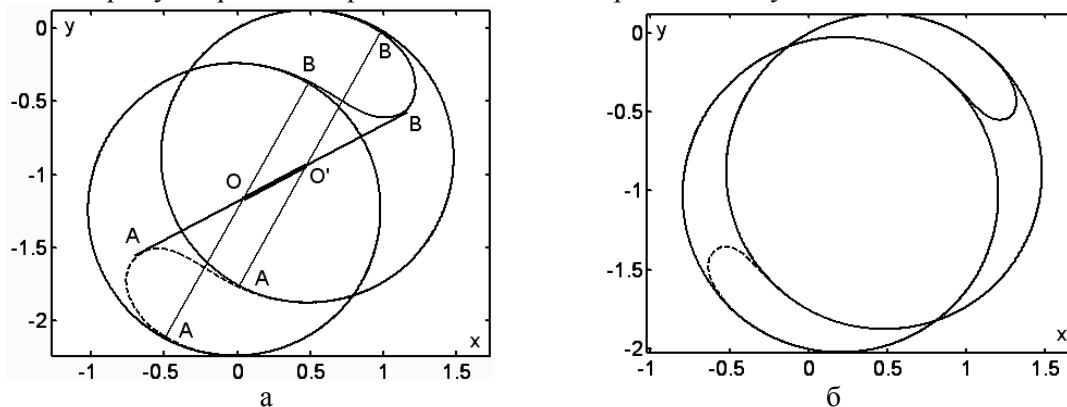


Рис. 6. Траєкторії точок A і B , побудовані при $\rho=2$ і різних значеннях сталої a :
а) $a=5$; б) $a=10$.

Висновки. На основі залежностей $\rho_\tau = \rho / \cosh as$; $\rho_n = \rho \tanh as$, які задають проекції руху точки A в системі тригранника Френе на його орти знайдені траєкторії кінців відрізка AB при умові рівності швидкостей його кінців. Ці траєкторії дозволяють поміняти напрям обертального руху відрізка на протилежний без його зупинки, перемістивши центр обертання по прямій лінії із одного положення в друге, при цьому кінці відрізка повинні рухатися по спеціальних траєкторіях у вигляді петель. До і після здійснення зміни напрямку обертання відрізок обертається навколо своєї середини, а його кінці рухаються по колах. Під час зміни напрямку обертання кінці відрізка рухаються по петлях, форма яких визначається чисельним інтегрування складених диференціальних рівнянь.

1. Пилипака С. Ф. Параметричні та натуральні рівняння кривих із заданими кінематичними характеристиками / С. Ф. Пилипака, В. М. Несвідомін, Т. С. Пилипака // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 69–75.
2. Пилипака С.Ф. Кінематика відрізка, кінці якого описують задані лінії у площині / С.Ф. Пилипака, В.М. Бабка, Т.С. Пилипака // Прикл. геометрія та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2007. – Вип. 77. – С. 36–42.
3. Бабка В. М. Рух відрізка у площині із рівними швидкостями його кінців / В. М. Бабка, Т. С. Пилипака // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за галузями знань "Машино-будування та металообробка", "Інженерна механіка", "Металургія та матеріалознавство". – Вип. 29.–Луцьк: ЛНТУ, 2010. – С. 4 – 8.
4. Пилипака С. Ф. Теорія складного руху матеріальної точки на площині. Частина перша. Абсолютна швидкість і траєкторія / С. Ф. Пилипака // Електротехніка і механіка. – К., 2006. - № 1. – С. 84 -94.

Стаття надійшла в редакцію .