

УДК 514.18

В.Д. Борисенко, І.В. Устенко*Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова***МОДИФІКАЦІЯ СПЛАЙНОВИХ КРИВИХ CATMULL-ROM**

У статті розглядається питання модифікації сплайнових кривих Catmull-Rom шляхом визначення похідних із застосуванням центральних різниць. Похідні використовуються при побудові цих кривих, поширених в комп'ютерній графіці.

Ключові слова: сплайнові криві, модифікація, уточнення похідних, центральні різниці, комп'ютерна графіка.

Рис. 2. Літ. 7.

В.Д. Борисенко, І.В. Устенко**МОДИФИКАЦИЯ СПЛАЙНОВЫХ КРИВЫХ CATMULL-ROM**

В статье рассматривается вопрос модификации сплайновых кривых Catmull-Rom путем определения производных с применением центральных разностей. Производные используются при построении сплайновых кривых, распространенных в компьютерной графике.

Ключевые слова: сплайновые кривые, модификация, уточнение производных, центральные разности, компьютерная графика.

V.D. Borisenko, I.V. Ustenko**MODIFICATION SPLINE CURVES CATMULL-ROM**

The article discusses the modification of spline curves Catmull-Rom by determining derivatives using central differences. Derivatives are used in the construction of spline curves, common in computer graphics.

Keywords: spline curves, modification, refinement derivatives, central differences, computer graphics.

Постановка проблеми. Криві лінії знаходять широке застосування в науці й техніці. Ними описуються внутрішні й зовнішні обводи різноманітних виробів, подаються результати теоретичних і експериментальних досліджень тощо. Важливу роль криві відіграють при візуалізації анімаційних сцен. Незважаючи на те, що фахівцями з прикладної геометрії та суміжних з нею галузей науки розроблено достатньо методів подання кривих, все ж таки і на цей час існують практичні завдання, які вимагають розробки нових або модифікації існуючих методів моделювання кривих ліній. В повній мірі це відноситься і до сплайнових кривих Catmull-Rom.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз літературних джерел показав, що при моделюванні кривих ліній широко застосовуються різноманітні сплайни. В сучасній літературі з питань прикладної геометрії [1–5, 7] пропонується достатньо різних варіантів сплайнових кривих, які відрізняються певними властивостями та способами побудови. Одними з подібних сплайнів є сплайнові криві Catmull-Rom [6]. Ці криві знайшли широке застосування в комп'ютерній графіці, зокрема при розв'язанні питань, пов'язаних з анімацією. Вони відносяться до інтерполяційних кривих і проходять через задані базові точки. Математично сплайнові криві Catmull-Rom визначаються параметричними рівняннями третього степеня, мають неперервну першу похідну та розривну другу. Їх застосовують при побудові як замкнутих, так і розімкнутих кривих. Цим сплайновим кривим притаманний локальний характер. Вони будуються по чотирьох значеннях деякої функції, заданої в чотирьох сусідніх точках (двох зліва та двох справа), тобто вони залежать тільки від значень функції в чотирьох сусідніх точках.

Метою дослідження є розробка, реалізація та візуалізація на ПЕОМ модифікованих сплайнових кривих, які відрізняються від оригінальних кривих іншим підходом до визначення похідних в суміжних точках.

Основні результати дослідження. Для кращого розуміння заходів, запропонованих в плані модифікації сплайнових кривих Catmull-Rom, розглянемо їх формування в оригінальній постановці. Візьмемо для прикладу триланкову ламану, яка подається чотирма вершинами, і проведемо через вершини $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ сплайнову криву Catmull-Rom (рис. 1). Специфікою цієї сплайнової кривої є те, що за чотирьох заданих вершин цей сплайн можна побудувати лише на ділянці між точками \bar{P}_1 і \bar{P}_2 .

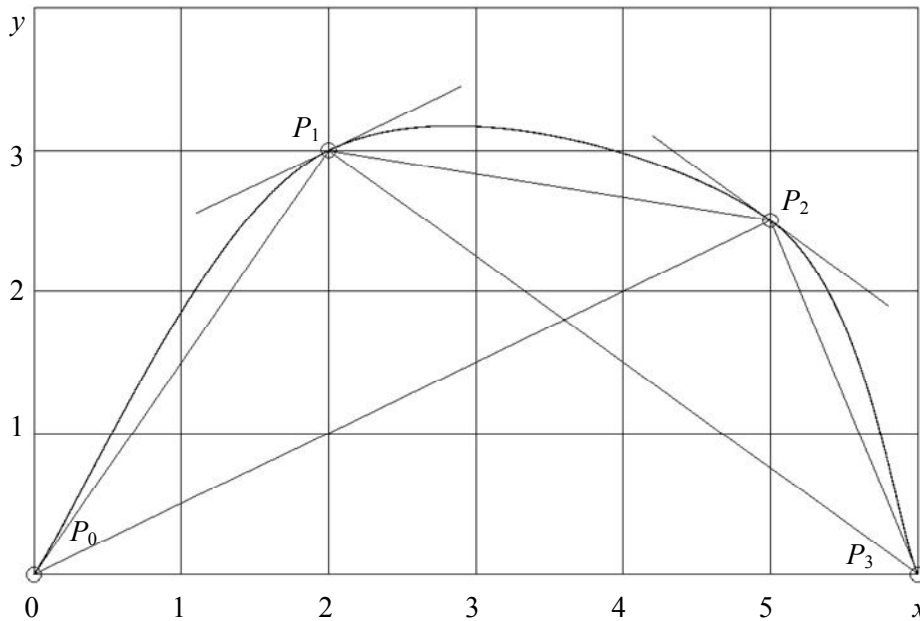


Рис. 1. Сплайнова крива Catmull-Rom

Параметрична крива Catmull-Rom, що проходить через вершини P_1 і P_2 триланкової ламаної, описується поліномами третього степеня:

$$\begin{aligned} R_x(t) &= a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x; \\ R_y(t) &= a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y, \end{aligned} \quad (1)$$

де t – параметр, який варіюється у межах від 0 до 1, в точці P_1 він дорівнює нулю, а в точці P_2 – одиниці.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів у виразах (1) застосовуються координати й похідні в точках P_1 і P_2 . Особливістю побудови кривої Catmull-Rom є своєрідний підхід до визначення похідних. Так, в точці P_1 похідна знаходиться, спираючись на значення координат точок P_0 і P_2 . Авторами цієї сплайнової кривої при визначенні похідної додатково вводиться деякий коефіцієнт m , названий ними коефіцієнтом напруження. Отже, похідна в точці P_1 визначається наступним чином:

$$\frac{dR_x(t)}{dt} = m(x_2 - x_0); \quad \frac{dR_y(t)}{dt} = m(y_2 - y_0). \quad (2)$$

Для кінцевої точки ділянки, тобто точки P_2 вирази (2) матимуть вигляд:

$$\frac{dR_x(t)}{dt} = m(x_3 - x_1); \quad \frac{dR_y(t)}{dt} = m(y_3 - y_1). \quad (3)$$

На рис. 1 у точках P_1 і P_2 проведені відрізки прямих, дотично до яких будується сплайнова крива Catmull-Rom. Ці відрізки паралельні відповідним діагоналям лоскості ої ламаної P_0P_1 і P_2P_3 . Згідно з виразами (2) і (3) довжини цих відрізків залежать також і від коефіцієнта напруження m .

Диференціюванням залежностей (1) отримаємо:

$$\frac{dR_x(t)}{dt} = 3a_x t^2 + 2b_x t + c_x; \quad \frac{dR_y(t)}{dt} = 3a_y t^2 + 2b_y t + c_y.$$

За додаткові умови для визначення коефіцієнтів виразу $R_x(t)$ треба взяти наступні:

у точці P_1

$$\begin{aligned} R_x(0) &= x_1; \\ \frac{dR_x(0)}{dt} &= m(x_2 - x_0); \end{aligned}$$

у точці P_2

$$R_x(1) = x_2;$$

$$\frac{dR_x(1)}{dt} = m(x_3 - x_1).$$

Ці додаткові умови дозволяють сформуванню системи рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів, необхідних для розрахунку $R_x(t)$ на ділянці між точками P_1 і P_2 :

$$d_x = x_1;$$

$$a_x + b_x + c_x + d_x = x_2;$$

$$c_x = m(x_2 - x_0);$$

$$3a_x + 2b_x + c_x = m(x_3 - x_1).$$
(4)

У результаті розв'язання цієї системи рівнянь матимемо:

$$a_x = m(x_3 - x_1) + m(x_2 - x_0) - 2(x_2 - x_1);$$

$$b_x = m(x_3 - x_1) - 2m(x_2 - x_0) + 3(x_2 - x_1).$$

Після перетворень можна отримати наступний вираз для визначення $R_x(t)$:

$$R_x(t) = mt(-t^2 + 2t - 1)x_0 + ((2 - m)t^3 + (m - 3)t^2 + 1)x_1 +$$

$$+ ((m - 2)t^3 + (3 - 2m)t^2 + mt)x_2 + mt^2(t - 1)x_3.$$
(5)

Якщо подібні дії виконати по відношенню до залежності $R_y(t)$, то буде отримано вираз, подібний (5), для розрахунку ординат сплайнової кривої.

З розгляду виразу (5) випливає, що при варіюванні параметра t у межах від 0 до 1 сплайнова крива Catmull-Rom буде побудована між точками P_1 і P_2 . Вона точно проходить через ці вершини ламаної. Отримана крива є геометрично неперервною, але набір базових функцій однозначно визначає її форму. Тобто немає ніяких можливостей впливати на характер проходження цієї сплайнової кривої.

Сплайнова крива Catmull-Rom є інтерполяційною. Вона проходить через кожен базову точку. Але цілком слушним виникає питання щодо проведення кривої на ділянках P_0P_1 і P_2P_3 . Воно розв'язується додаванням до масиву із чотирьох точок ще двох компонент \bar{P}_{-1} і \bar{P}_4 за таких умов:

$$\bar{P}_{-1} = \bar{P}_0 \text{ і } \bar{P}_4 = \bar{P}_3.$$

Таким чином, для отримання сплайнової кривої Catmull-Rom, показаної на рис. 1, її необхідно будувати окремо для ділянок $\bar{P}_{-1}\bar{P}_0\bar{P}_1\bar{P}_2$, $\bar{P}_0\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3$ і $\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3\bar{P}_4$.

Сплайнова крива Catmull-Rom, що показана на рис. 1, була побудована із застосуванням рівняння, отриманого з виразу (5), в якому коефіцієнт m дорівнював 0,5 (саме це значення коефіцієнта напруження знайшло поширення у багатьох практичних застосуваннях [3]):

$$\bar{R}(t) = 0,5(-t(1-t)^2\bar{P}_0 + (2-5t^2+3t^3)\bar{P}_1 + t(1+4t-3t^2)\bar{P}_2 - t^2(1-t)\bar{P}_3).$$

Як випливає з розгляду рис. 1, сплайнова крива Catmull-Rom не заходить у зону, означену лоскості ої ламаною.

Оскільки при моделюванні сплайнових кривих Catmull-Rom на початковій і кінцевій ділянках додавалися точки, які збігалися з крайніми точками P_0 і P_3 , тобто ділянки $P_{-1}P_0$ і P_3P_4 мали нульову довжину, тому дотичні в цих точках відповідно збігаються зі сторонами P_0P_1 і P_3P_4 триланкової ламаної. Звідси й ділянки $P_{-1}P_0P_1P_2$ і $P_1P_2P_3P_4$ сплайнових кривих є дотичними до цих сторін, що в певній мірі погіршує загальне візуальне сприйняття складеної сплайнової кривої Catmull-Rom.

Для позбавлення виявлених недоліків сплайнових кривих Catmull-Rom пропонується визначати похідні в точках P_1 і P_2 із застосуванням коефіцієнта напруження m та відомих в обчислювальній математиці центральних різниць, які для координати x мають вигляд:

$$R'_x(s_i) = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left(-\delta_{i+1}x_{i-1} + \frac{(\delta_{i+1}^2 - 1)}{\delta_{i+1}}x_i + \frac{1}{\delta_{i+1}}x_{i+1} \right),$$

де

$$\delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i}; \quad h_{i+1} = s_{i+1} - s_i; \quad h_i = s_i - s_{i-1};$$

$$H_i^{i+1} = h_i + h_{i+1}.$$

Аналогічним чином знаходиться похідна $R'_y(s_i)$. Слід зазначити, що при визначенні похідних під s_i розуміється довжина i -ої ланки. Діленням $R'_y(s_i)$ на $R'_x(s_i)$ отримуємо похідну dy/dx в необхідній точці, а далі кут нахилу в ній дотичної.

Для точки P_1 індекс i дорівнює одиниці, тому при розрахунку похідної будуть задіяні точки P_0 і P_2 . Для точки P_2 індекс i дорівнює двом і отже до при розрахунку похідної будуть задіяні точки P_1 і P_3 .

Треба зазначити, що вирази (2) і (3) в певній мірі можна також вважати центральними різницями, але які розраховані для точок, що рівномірно розташовані.

Підставивши значення похідних у кінцевих точках P_1 і P_2 , які отримані із застосуванням центральних різниць, до виразів (2) і (3), формуємо систему рівнянь, подібну (4). Розв'язавши цю систему матимемо коефіцієнти залежностей (1), які описуватимуть модифіковану сплайнову криву на ділянці між точками P_1 і P_2 .

Для прикінцевих ділянок пропонується визначати похідні в точках P_0 і P_3 із застосуванням лівих і правих різниць:

$$R'_x(s_i) = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left(-(2 + \delta_{i+1})x_{i-1} + \frac{(1 + \delta_{i+1})^2}{\delta_{i+1}}x_i - \frac{1}{\delta_{i+1}}x_{i+1} \right);$$

$$R'_y(s_i) = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left(\delta_{i+1}x_{i-1} + \frac{(1 + \delta_{i+1})^2}{\delta_{i+1}}x_i + \frac{(2 + \delta_{i+1})}{\delta_{i+1}}x_{i+1} \right).$$

При визначенні похідних із застосуванням лівих різниць будуть задіяні базові точки P_0, P_1 і P_2 , а при визначенні похідних із застосуванням правих різниць – точки P_2, P_3 і P_4 .

Залежності для визначення центральних, лівих і правих похідних отримані розкладанням на нерівномірній сітці функції, що диференціюється, в ряд Тейлора.

Змодельована за цих пропозицій крива показана на рис. 2. Модифікованій сплайновій кривій Catmull-Rom відповідає лінія, що має більшу товщину обведення. Тонкою лінією показана оригінальна сплайнова крива Catmull-Rom. У точках P_1 і P_2 проведені прямі, які є дотичними до побудованих сплайнових кривих. Відрізки прямих меншої довжини є повторенням відповідних

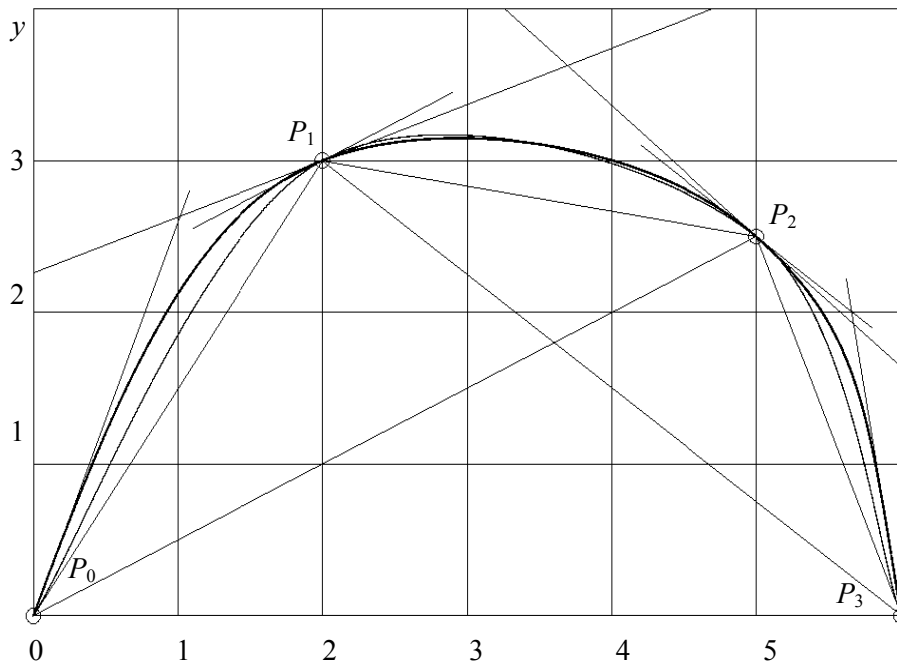


Рис. 2. Модифікована та оригінальна сплайнові криві Catmull-Rom

прямих, які можна побачити на рис. 1. Візуальною оцінкою розташування похідних можна прийти до висновку, що між кутами їх нахилу існує певна різниця, яка впливає на проходження згенерованої сплайнової кривої. Цю різницю на ділянці між точками P_1 і P_2 можна також оцінити візуально.

Зазначимо, що для модифікованих сплайнових кривих Catmull-Rom коефіцієнт напруження m має бути більшим за одиницю.

У цій роботі розглянуто побудову оригінальних і модифікованих сплайнових кривих Catmull-Rom на базі довільно обраної лоскості ої ламаної, але кількість вихідних точок може бути будь-якою. У цьому плані ніяких обмежень на побудову сплайнових кривих не існує. Для всіх проміжних точок, крім першої і останньої, похідні для модифікованих кривих визначаються із застосуванням центральних різниць. Похідні в початковій і кінцевій точках розраховуються із застосуванням лівих і правих різниць. При побудові замкнутої сплайнової кривої Catmull-Rom на підставі $(n+1)$ заданих точок приймається, що $\bar{P}_{-1} = \bar{P}_n$ і $\bar{P}_{n+2} = \bar{P}_0$.

Висновки. Модифікацією сплайнових кривих Catmull-Rom шляхом визначення похідних із застосуванням центральних, лівих і правих різниць можна дещо поліпшити форму результуючої кривої, особливо на початковій і кінцевій ділянках.

1. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование [Текст] / Н. Н. Голованов. – М.: Физматлит, 2002. – 472 с.
2. Михайленко В.Е. Геометрические моделирования и машинная графика в САПР [Текст] / [В.Е. Михайленко, В.Н. Кислоокый, А.А. Лященко и др.] – К.: Вища школа, 1991. – 374 с.
3. Поляков А.Ю. Методы и алгоритмы компьютерной графики в примерах на Visual C++ [Текст] / А.Ю. Поляков, В.А. Брусенцев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 560 с.
4. Фокс А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве [Текст] / А. Фокс, М. Пратт. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
5. Шикин Е.В. Кривые на плоскости и в пространстве [Текст] / Е.В. Шикин, М.М. Каменецкий. – М.: Фазис, 1997. – 325 с.
6. Catmull E. A class of local interpolating splines [Text] / E. Catmull, R. Rom / Computer Aided Geometric Design, Academic Press, New York, 1974. – P. 317 – 326.
7. Farin G. Curves and surfaces for computer-aided geometric design [Text] / G. Farin. – Academic Press Inc., 1997. – [4-th edition]. – 447 p.

Стаття надійшла до редакції 05.04.2015.