

УДК 539.375

І. П. Шацький

ДВОБІЧНІ ОЦІНКИ ГРАНИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ЗГИНУ ДЛЯ ПЛАСТИНИ
З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ КОНТАКТНИХ ТРІЩИН

У двовимірній постановці розглядається проблема згину пластин, ослаблених періодичними системами наскрізних прямолинійних тріщин, з урахуванням контакту берегів. З використанням локального та інтегрального по товщині силового та енергетичного критеріїв лінійної механіки руйнування побудовано верхню та нижню оцінки значень граничного навантаження.

Ключові слова: пластина, згин, закриття тріщини, граничне навантаження, двобічні оцінки.

Рис. 1. Табл. 1. Форм. 10. Літ. 14.

И. П. Шацкий

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ ИЗГИБА ДЛЯ ПЛАСТИНЫ
С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КОНТАКТНЫХ ТРЕЩИН

В двумерной постановке рассматривается проблема изгиба пластин, ослабленных периодическими системами сквозных прямолинейных трещин, с учетом контакта берегов. С использованием локального и интегрального по толщине силового и энергетического критериев линейной механики разрушения построены верхняя и нижняя оценки значений предельной нагрузки.

Ключевые слова: пластина, изгиб, закрытие трещины, предельная нагрузка, двусторонние оценки.

I. P. Shatsky

TWO-SIDE ESTIMATES OF LIMITING BENDING LOAD FOR PLATE
WITH PERIODICAL SYSTEM OF CONTACT CRACKS

A problem of plates bending, weakened by periodical systems of through rectilinear cracks, with consideration of edges contact is reviewed. A detailed analysis of solutions of a problems got earlier subject to the classical theories of plane stressed state and plate bending within the framework of a model of contact along the line has been made for following configurations of defects: periodical line of collinear cracks, periodical system of parallel cracks, star-shaped cut. The values of forces and moments intensity factors near the cracks tips have been calculated.

Process of propagation of the crack with irregularly stressed front consists of two stages: irregular over its thickness consistent growth of the crack when load reaches its lower limiting value and catastrophic unstable propagation of the crack when load reaches its upper limiting value. Analytical and numerical estimates of such extreme values are made with use of the force and energy criteria of linear mechanics of fracture.

Key words: plate, bending, crack closure, limiting load, two-side estimates.

Вступ. Успіх прогнозування ресурсу дефектних тонкостінних конструкцій, яке належить до актуальних задач механіки та матеріалознавства, значною мірою визначається адекватністю прийнятих моделей. Якщо тріщиноподібні дефекти потрапляють у зону напружень стиску, можливим стає їхнє закриття, яке слід відобразити у розрахунковій схемі. Для дослідження цього явища в задачах згину пластин та оболонок доволі ефективною є модель контакту берегів уздовж лінії в лицьовій поверхні [1, 2]. В рамках такого підходу на сьогодні, зокрема, розв'язано значне число періодичних задач про взаємодію тріщин за згину пластин з урахуванням контакту берегів [3–10]. Характерним для згаданих робіт є визначення руйнівного моменту із інтегрального по товщині енергетичного критерію лінійної механіки руйнування [12]. Однак нерівномірний розподіл напружень по товщині пластини поблизу вершин тріщини потребує детальнішого аналізу картини руйнування. У доповіді [11] запроваджено двобічні оцінки граничного навантаження згину для пластини з поодинокую прямолинійною тріщиною. При цьому поряд з інтегральним по товщині критерієм міцності використовуються і локальні критерії для найбільш напружених зон поблизу лицьової поверхні пластини.

Мета цього повідомлення – розповсюдити тактику побудови двобічних оцінок руйнівного навантаження на періодичні задачі згину пластин з контактними тріщинами. Тут подаємо загальну розрахункову схему розв'язування періодичних задач про закриття тріщин при згині пластини за умов, що локальний напружено-деформований стан біля кожної тріщини є симетричним відносно її лінії. Розглянуто приклади, що ілюструють вплив контакту берегів дефектів та періодичності їх розташування на граничну рівновагу пластини.

Постановка задачі та розрахункова схема. Розглянемо ізотропну пластину, яка займає в декартових координатах область $(x, y, z) \in \Omega \times [-h, h]$ і послаблена масивом прямолинійних наскрізних тріщин $L = \bigcup_k L_k$. Вважаємо, що область Ω з сукупністю розрізів L , а також задане

згинальне навантаження мають високий ступінь симетрії, такий, що всі тріщини перебувають в однакових умовах (іншими словами, розглядаємо періодичні задачі). Крім того, припускаємо, що в околі кожної з тріщин напружено-деформований стан є симетричним відносно лінії її розташування, тобто на контурах L_k відсутні розриви дотичних переміщень. Досліджуємо вплив взаємного розташування тріщин та контакту їх берегів на граничну рівновагу пластини.

При сформульованих припущеннях пружна рівновага пластини, що містить періодичну систему тріщин з контактуючими берегами, описується крайовою задачею для пари бігармонічних операторів із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах:

$$\Delta \Delta \varphi = 0, \quad D \Delta \Delta w = q(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \setminus L; \quad (1)$$

$$[u_n] = h |[\vartheta_n]| > 0, \quad M_n = h N_n \operatorname{sgn}[\vartheta_n], \quad N_n \leq 0, \quad (x, y) \in L. \quad (2)$$

Тут φ – функція Ері, w – прогин пластини, Δ – оператор Лапласа; $[u_y], [\vartheta_y]$ – стрибки переміщення та кута повороту нормалі на розрізі; N_y, M_y – мембранне зусилля та згинальний момент; q – поперечне навантаження, $D = 2Eh^3 / (3(1 - \nu^2))$, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

Припускаємо, що береги розрізів контактують на усій довжині.

На контурі $\partial\Omega$ можуть задаватися умови в зусиллях, моментах або в переміщеннях чи кутах повороту.

Для побудови розв'язку задачі (1), (2) скористаємось методом сингулярних інтегральних рівнянь. В силу періодичності крайові умови (2) достатньо виконати лише на одному розрізі. Нехай це буде відрізок L_0 , який лежить на осі абсцис. Тоді $n = y$.

Вважаємо, що відомими є інтегральні вирази зусиль та моментів через похідні від шуканих функцій стрибка:

$$N_y(x, 0) = \frac{B}{4\pi} \int_{L_0} K_{11}(\xi, x) [u_y]'(\xi) d\xi,$$

$$M_y(x, 0) = M_y^0(x, 0) - \frac{Da}{4\pi} \int_{L_0} K_{33}(\xi, x) [\vartheta_y]'(\xi) d\xi. \quad (3)$$

Тут $M_y^0(x, 0)$ – функція моменту, що відповідає відомому основному напруженому станові в пластині без тріщин при заданому $q(x, y)$ та крайових умовах на $\partial\Omega$; ядра інтегральних виразів складаються із сингулярного члена типу Коші та регулярних доданків, які залежать від взаємного розташування тріщин, форми області Ω та типу крайових умов на її межі; $B = 2Eh$, $a = (3 + \nu)(1 - \nu)$.

Підставляючи вирази (3) у крайові умови (2) та виключаючи функцію $[u_y]'$, дістаємо інтегральне рівняння для знакосталого за припущенням стрибка кута повороту нормалі:

$$\frac{Da}{4\pi} \int_{L_0} \{ \kappa K_{11}(\xi, x) + K_{33}(\xi, x) \} [\vartheta_y]'(\xi) d\xi = M_y^0(x, 0), \quad x \in L_0. \quad (4)$$

Тут $\kappa = 3(1 + \nu)/(3 + \nu)$.

Слід відзначити, що формальною підстановкою $\kappa = 0$ із співвідношення (4) дістаємо рівняння для задачі згину пластини без урахування контакту берегів тріщин, коли на розрізах виконуються умови вільного краю.

Для конкретних задач розв'язки рівняння (4), які підпорядковуються додатковій умові $[\vartheta_y](\partial L_0^\pm) = 0$, будували аналітично або чисельно методом механічних квадратур. За знайденою функцією $[\vartheta_y]'(x)$ знаходили $[u_y]'(x)$, відтак за їхніми граничними значеннями обчислювали коефіцієнти інтенсивності [12] зусиль K_N та моментів K_M в околі вершини тріщини ∂L_0^\pm . Знання цих величин дає змогу встановити нерівномірний розподіл коефіцієнта інтенсивності напружень по товщині пластини:

$$k_1(z) = \frac{1}{2h} \left(K_N + \frac{3z}{h^2} K_M \right).$$

Критерії граничної рівноваги. Гіпотетично [11] картина руйнування виглядає так: за деякого нижнього критичного значення навантаження розпочинається стійке підростання тріщини на найбільш напруженій ділянці; фронт тріщини викривляється так, щоб стати рівнонапруженим. Після досягнення верхнього значення навантаження (руйнівного) відбувається розвиток тріщини по всій товщині пластини.

Початок стійкого підростання тріщини можна оцінити за силовим критерієм лінійної механіки руйнування [13], застосувавши його до найбільш напружених, близьких до лицьової поверхні, ділянок

$$\max_z \sqrt{\pi} k_1(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2h} \left(K_N + 3 \frac{|K_M|}{h} \right) = \sqrt{2E\gamma_*}. \quad (5)$$

Тут $\sqrt{2E\gamma_*}$ – тріщиностійкість матеріалу, γ_* – питома поверхнева енергія.

За енергетичним критерієм стійке просування тріщини у найбільш небезпечних точках розпочнеться [11], якщо

$$\max_z G(z) = \frac{\pi}{(2h)^2 E} \left(K_N^2 + (3 + \kappa) K_N \frac{|K_M|}{h} + 3\kappa \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right) = 2\gamma_*. \quad (6)$$

Нарешті, розвиток тріщини як наскрізного об'єкта можна оцінити за середнім значенням потоку енергії у її вершину [12]:

$$\langle G \rangle = \frac{\pi}{(2h)^2 E} \left(K_N^2 + \kappa \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right) = 2\gamma_*. \quad (7)$$

Як показано в доповіді [11], критерії (5) та (6) слугують нижніми оцінками, а критерій (7) – верхньою оцінкою граничного навантаження згину для пластин з контактними тріщинами.

Перейдемо до розгляду конкретних конфігурацій систем дефектів.

Система колінеарних розрізів на одній прямій. Нехай безмежна пластини містить періодичну систему наскрізних прямолінійних тріщин завдовжки $2l$, розташованих на осі абсцис з віддалю d між їхніми центрами. Розглядаємо рівномірний згин на безмежності ($M_y^0(x, 0) = m = \text{const}$, $L_0 = (-l, l)$). Ядра інтегральних подань (3) для цієї задачі мають вигляд [13, 14]:

$$K_{11}(\xi, x) = K_{33}(\xi, x) = \pi \operatorname{ctg} \frac{\pi(\xi - x)}{d}.$$

Розв'язок рівняння (4) у цьому разі такий:

$$\frac{Da}{4} [\mathfrak{G}_y]'(x) = \frac{m}{1 + \kappa} \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi \lambda x}{2l} \right)}{\cos \left(\frac{\pi \lambda}{2} \right) \sqrt{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi \lambda}{2} \right) - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi \lambda x}{2l} \right)}},$$

$$\frac{Da}{4} [\mathfrak{G}_y](x) = -\frac{m}{1 + \kappa} \frac{2}{\pi \lambda} \operatorname{Atanh} \left(\cos \left(\frac{\pi \lambda}{2} \right) \sqrt{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi \lambda}{2} \right) - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi \lambda x}{2l} \right)} \right),$$

де $\lambda = 2l/d \in [0, 1)$ – безрозмірний параметр.

Тоді

$$K_N = \frac{\kappa |m| \sqrt{l}}{h(1 + \kappa)} F(\lambda), \quad K_M = \frac{m \sqrt{l}}{1 + \kappa} F(\lambda), \quad F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \lambda}{2} \right)}. \quad (8)$$

Критерії (5), (6) та (7) дають відповідно значення граничних моментів:

$$|m_*^1| = \frac{1 + \kappa}{3 + \kappa} \frac{m^0}{F(\lambda)}, \quad |m_*^2| = \frac{1 + \kappa}{\sqrt{2\kappa(3 + \kappa)}} \frac{m^0}{F(\lambda)}, \quad |m_*^3| = \sqrt{\frac{1 + \kappa}{\kappa}} \frac{m^0}{F(\lambda)}, \quad (9)$$

де $m^0 = 2h^2 \sqrt{\frac{2E\gamma_*}{\pi l}}$ – нормувальний множник.

Без урахування контакту результати такі:

$$\bar{K}_N = 0, \quad \bar{K}_M = m\sqrt{l}F(\lambda), \quad |\bar{m}_*^1| = \frac{m^0}{3F(\lambda)}, \quad |\bar{m}_*^2| = \frac{m^0}{\sqrt{3\kappa F(\lambda)}}, \quad |\bar{m}_*^3| = \frac{m^0}{\sqrt{\kappa F(\lambda)}}. \quad (10)$$

Система паралельних розрізів. Нехай безмежна пластина послаблена періодичною системою наскрізних паралельних розрізів завдовжки $2l$. Розрізи паралельні до осі абсцис, а їх центри розміщені на осі ординат з періодом d . На безмежності перпендикулярно до лінії розташування дефектів діє рівномірно розподілене згинальне навантаження $m = \text{const}$.

Для цієї задачі в інтегральних рівняннях (3) слід прийняти [3, 13, 14]:

$$K_{11}(z) = \frac{\pi}{2} \left(2 \operatorname{cth} \frac{\pi z}{d} - \frac{\pi z}{d} \operatorname{csch}^2 \frac{\pi z}{d} \right), \quad K_{33}(z) = \frac{\pi}{2} \left((1 + \kappa_0) \operatorname{cth} \frac{\pi z}{d} - \kappa_0 \operatorname{csch}^2 \frac{\pi z}{d} \right),$$

$$z = \xi - x, \quad \kappa_0 = (1 - \nu)/(3 + \nu), \quad M_y^0(x, 0) = m, \quad L_0 = (-l, l).$$

На основі методу апроксимації ядер [14] побудовано наближений замкнутий розв'язок задачі у всьому діапазоні зміни $\lambda = 2l/d \in [0, \infty)$. Після заміни ядра його наближеним виразом

$$\kappa K_{11}(z) + K_{33}(z) \approx (1 + \kappa) A \operatorname{cth} \frac{Az}{l}, \quad A = \frac{\pi \lambda}{2} \left(1 + \frac{\kappa - \kappa_0}{1 + \kappa} \right),$$

дістали інтегральне рівняння

$$\frac{Da}{4\pi} \int_{L_0} (1 + \kappa) A \operatorname{cth} \frac{A(\xi - x)}{l} [\vartheta_y]'(\xi) d\xi = m(x), \quad x \in L_0,$$

яке обертається точно:

$$\frac{Da}{4} [\vartheta_y]'(x) = \frac{m}{1 + \kappa} \frac{\operatorname{th}(Ax/l)}{\operatorname{ch} A \sqrt{\operatorname{th}^2 A - \operatorname{th}^2(Ax/l)}},$$

$$\frac{Da}{4} [\vartheta_y](x) = -\frac{m}{1 + \kappa} \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ch} A \sqrt{\operatorname{th}^2 A - \operatorname{th}^2(Ax/l)} \right).$$

Тоді для коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів і для граничних навантажень справедливі формули (8), (9), в яких слід прийняти $F(\lambda) = \sqrt{\frac{\operatorname{th} A}{A}}$. Аналогічно у виразах (10)

треба покласти $F(\lambda) = \sqrt{\frac{\operatorname{th} \bar{A}}{\bar{A}}}$, $\bar{A} = \frac{\pi \lambda}{2} (1 - \kappa_0)$.

Зірчастий розріз. Розглянемо безмежну ізотропну пластину, послаблену циклічно симетричною системою N радіальних розрізів завдовжки l , внутрішні вершини яких сполучаються в початку координат. Досліджуємо вплив контакту берегів розрізів на граничний стан пластини у разі її всебічного згину рівномірно розподіленими моментами.

Ця задача зводиться до інтегрального рівняння (4) відносно стрибка кута повороту нормалі. Під контуром L_0 тут слід розуміти інтервал $(0, l)$. У правій частині $M_y^0(x, 0) = m$. Ядра – такі [10, 14]:

$$K_{11}(\xi, x) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{z_x}{r^2} \left(1 + \frac{2z_y^2}{r^2} \right) \cos \frac{2\pi k}{N} - \frac{z_y}{r^2} \left(1 - \frac{2z_x^2}{r^2} \right) \sin \frac{2\pi k}{N} \right\},$$

$$K_{33}(\xi, x) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{z_x}{r^2} \left(1 - \kappa_0 \frac{2z_y^2}{r^2} \right) \cos \frac{2\pi k}{N} + \kappa_0 \frac{z_y}{r^2} \left(1 - \frac{2z_x^2}{r^2} \right) \sin \frac{2\pi k}{N} \right\};$$

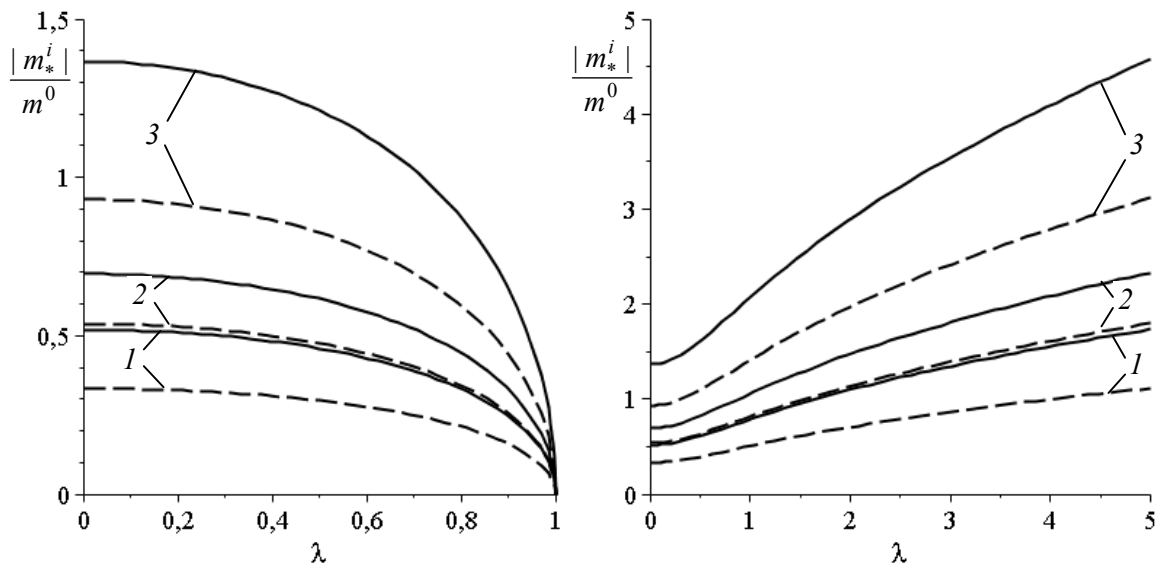
$$z_x = \xi \cos \frac{2\pi k}{N} - x, \quad z_y = \xi \sin \frac{2\pi k}{N}, \quad r^2 = z_x^2 + z_y^2.$$

Шуканий розв'язок підкоряємо додатковим умовам:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} [\vartheta_y]'(x) = 0, \quad [\vartheta_y](l) = 0.$$

Числовий розв'язок задачі для зірчастої тріщини побудували методом квадратур.

Аналіз результатів. Ілюстрації аналітичних та числових результатів розв'язання розглянутих задач, отриманих при $\nu = 0,3$, подані на рисунку та в таблиці.



Граничні навантаження для періодичних рядів розрізів:

зліва – колінеарні, справа – паралельні тріщини; суцільні лінії – з урахуванням, штрихові – без урахування контакту берегів; 1 – $i = 1$, 2 – $i = 2$, 3 – $i = 3$

Коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів та граничні навантаження за всебічного згину пластини із зірчастим розрізом

N	з урахуванням контакту					без урахування контакту				
	$\frac{hK_N}{ m \sqrt{l}}$	$\frac{K_M}{m\sqrt{l}}$	$\frac{ m_*^1 }{m^0}$	$\frac{ m_*^2 }{m^0}$	$\frac{ m_*^3 }{m^0}$	$\frac{hK_N}{ m \sqrt{l}}$	$\frac{K_M}{m\sqrt{l}}$	$\frac{ m_*^1 }{m^0}$	$\frac{ m_*^2 }{m^0}$	$\frac{ m_*^3 }{m^0}$
2	0,542	0,458	0,516	0,692	1,359	0	1,000	0,329	0,531	0,920
3	0,534	0,452	0,523	0,702	1,378	0	1,052	0,313	0,505	0,874
4	0,504	0,426	0,554	0,744	1,461	0	1,041	0,316	0,510	0,883
5	0,437	0,400	0,591	0,792	1,556	0	1,012	0,325	0,525	0,909
6	0,446	0,377	0,627	0,841	1,651	0	0,977	0,337	0,544	0,942
7	0,422	0,357	0,661	0,887	1,743	0	0,942	0,350	0,564	0,977
8	0,402	0,340	0,696	0,933	1,833	0	0,908	0,363	0,585	1,013
9	0,384	0,325	0,728	0,977	1,919	0	0,877	0,376	0,606	1,049
10	0,368	0,311	0,760	1,019	2,002	0	0,848	0,388	0,626	1,085

Зближення колінеарних (паралельних) тріщин призводить до закономірного зменшення (збільшення) значень граничного навантаження за усіма критеріями. Для зірчастого розрізу з урахуванням контакту берегів втрачаються немонотонні залежності коефіцієнтів інтенсивності та граничного навантаження від числа променів, властиві згиніві за відсутності контакту.

При $\lambda = 0$ чи $N = 2$ усі наведені результати узгоджуються з точними аналітичними розв'язками для прямолінійної тріщини завдовжки $2l$ [1, 2, 11]

Висновки. Для всіх розглянутих систем дефектів урахування контакту берегів тріщин за згину пластини збільшує розрахункову міцність на десятки процентів. Нижні оцінки граничного навантаження згину $|m_*^1|$ чи $|m_*^2|$ за критеріями (5) чи (6) відрізняються від верхньої оцінки

$|m_*^3|$ за критерієм (7) більше, ніж удвічі. Для прогнозування руйнівного навантаження, яке відповідає нестійкому розповсюдженню наскрізної тріщини доцільно обирати інтегральний енергетичний критерій (7), який враховує інформацію про напружений стан на усьому фронті тріщини, а не лише у найбільш напруженій точці.

Пропонований підхід до побудови двобічних оцінок руйнівного згинального навантаження без значних зусиль можна розповсюдити q на інші конфігурації періодичних систем контактних тріщин [5–9].

1. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І. П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
2. Шацький І. П. Развитие модели контакта берегов трещины в изгибаемой пластине / И. П. Шацкий // Теорет. и прикл. механика. – 2000. – Вып. 31. – С. 91–97.
3. Шацький І. П. Изгиб пластини, содержащей периодическую систему параллельных разрезов с контактирующими кромками / И. П. Шацкий // Прикл. механика. – 1991. – Т. 27, № 12. – С. 56–61.
4. Shatsky I. P. A cracks closure in combined tension and bending of plates / I. P. Shatsky // Fracture from defects. Proc. 12th Bien. Conf. of Fract. – ECF-12. (Sheffield, 14-18 Sept. 1998). Ed. M. W. Brown e.a. – V. 2. – P. 733–738.
5. Перепічка В. В. Згин напівнескінченної пластини, ослабленої періодичною системою розрізів з урахуванням контакту берегів / В. В. Перепічка, І. П. Шацький // Мат. методи та фіз.-мех. поля – 1999. – Т. 42, № 1. – С. 114–117.
6. Даляк Т. Періодичні задачі контакту берегів тріщин при згині пластин / Т. Даляк, В. Перепічка, І. Шацький // Машинознавство. – 2000. – № 4–5 (34–35). – С. 20–24.
7. Опанасович В. Згин кусково-однорідної пластини з періодичною системою прямолінійних тріщин, паралельних до лінії поділу матеріалів з урахуванням контакту берегів / В. Опанасович, І. Звізло // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2002. – Вип. 60. – С. 148–154.
8. Шацький І. Циклічно-симетрична задача згину пластинки з системою тріщин, береги яких контактують / І. Шацький, Т. Даляк // Машинознавство. – 2003. – № 3. – С. 7–12.
9. Даляк Т. М. Згин пластини з періодичною системою паралельних взаємозміщених тріщин, береги яких контактують / Т. М. Даляк // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – Т. 40, № 1. – С. 115–117.
10. Шацький І. Згин пластини із зірчатою тріщиною, береги якої контактують / І. Шацький, Т. Даляк // Машинознавство. – 2013. – № 1–2. – С. 42–46.
11. Шацький І. Двобічні оцінки граничного навантаження згину для пластини з прямолінійною тріщиною / І. Шацький // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: зб. наук. праць 5-ї Міжнар. конф. (24–27 черв. 2014 р., Львів) / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Фіз.-мех. ін.-т ім. Г.В.Карпенка НАН України, 2014. – С. 425–430.
12. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами / Осадчук В. А. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
13. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / Панасюк В. В., Саврук М. П., Дачышин А. П. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
14. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.

Стаття прийнята в редакцію 25.03.2015.