

УДК 621.762, 539.3

В.А. Кошелюк

Луцький національний технічний університет

ЗАСТОСУВАННЯ МСЕ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ

У статті запропоновано числово-аналітичний метод розв'язування задач термопружності та визначення температурного поля структурно-неоднорідного тіла. Запропонований метод базується на методі скінченних елементів розв'язування задач термопружності. Отримано вирази для побудови температурного поля. Наведено числовий приклад.

Ключові слова: термопружність, температурне поле, структурно-неоднорідне тіло, варіаційний функціонал, тріщина

Форм. 16. Рис. 3. Табл. 2. Літ. 10.

В.А. Кошелюк**ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ**

В статье предложен численно-аналитический метод решения задач термоупругости и определения температурного поля структурно-неоднородного тела. Предложенный метод базируется на методе конечных элементов решения задач термоупругости. Получены зависимости для определения температурного поля. Приведен численный пример.

Ключевые слова: термоупругость, температурное поле, структурно-неоднородное тело, вариационный функционал, трещина

V.A. Kosheliuk**APPLICATION OF FEM TO SOLUTION OF THE THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS SOLIDS**

The paper proposes an analytical method of solution of thermoelasticity problems and determination of the temperature field in structurally inhomogeneous solids. The proposed method uses FEM for solving the thermoelasticity problems. The expressions for determination of the temperature field are obtained. The numerical examples are presented.

Key words: thermoelasticity, temperature field, structurally inhomogeneous solid, variation functional, crack

Постановка проблеми та огляд публікацій. Серед сучасних конструкційних матеріалів дуже часто використовуються композити, які завдяки своїм властивостям дають можливість зменшити вагу виробу, зберігши при цьому відповідні характеристики міцності та жорсткості. Таке широке використання анізотропних матеріалів зумовлює розвиток аналітичних та числових підходів аналізу міцності та надійності відповідних елементів, зокрема, дослідження інтенсивності напружень поблизу тріщин у них. Серед цих підходів вирізняються методи скінченних та граничних елементів. Зокрема, у роботах [7, 10] МСЕ успішно застосований до аналізу анізотропних тіл із тріщинами за їхнього механічного навантаження.

Проте при вивченні впливу теплового розширення на напружений стан тіл за допомогою методу граничних елементів, у числовій схемі слід обчислювати додатковий об'ємний інтеграл, що часто нівелює усі переваги методу граничних елементів. У випадку ізотропного тіла цей об'ємний інтеграл можна перетворити до граничного. Такий спосіб використано у роботах [7-9] при дослідженні термопружної рівноваги ізотропних тіл із тріщинами. Однак, у випадку анізотропних тіл зведення об'ємного інтегралу до поверхневого стає досить громіздким завданням. У роботі [8] для випадку неоднорідних ортотропних площин, півплощин та смуг задача термопружності зведена до інтегрального рівняння Вольтерра. Для розв'язування задачі у випадку області довільної геометрії було запропоновано низку підходів. Так у роботах [5, 6] розроблено «particular integral approach», який передбачає розбиття зайнятої тілом області на комірки, у кожній з яких температура апроксимується поліномом. У працях [7-9] запропоновано алгоритм перетворення об'ємного інтегралу до контурного. Цей підхід успішно використано при аналізі термонапруженого стану анізотропних тіл із тріщинами у роботі [9].

Тому у цій роботі запропоновано напіваналітичний скінченноелементний підхід аналізу задач термопружності структурно неоднорідних тіл.

Формулювання задачі та алгоритм пошуку розв'язку. Загальна постановка задачі термопружності для неоднорідного ізотропного тіла у випадку, якщо деформації зумовлені лише змінами в часі температурного поля, тобто механічні взаємодії відсутні, полягає в наступному.

Необхідно визначити 16 функцій координат x_k та часу, а саме: шість компонент тензору напружень σ_{ij} , шість компонент тензору деформацій ε_{ij} , три компоненти вектору переміщень u_i та температуру T , що задовольняють умовам:

$$1) \text{ трьом рівнянням рівноваги } \sum \partial \sigma_{ij} / \partial x_j = 0;$$

$$2) \text{ рівняння теплопровідності } \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial z} \right) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}$$

де λ_i - коефіцієнт теплопровідності тіла;

c - питома теплоємність тіла;

$C = c\rho$ - об'ємна теплоємність тіла

3) шість співвідношень між напруженнями та деформаціями

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [\lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0)]\delta_{ij}$$

де α_T - коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу;

λ та μ - коефіцієнти Ламе;

T_0 - початкова температура тіла.

Коефіцієнти λ та μ пов'язані з технічними характеристиками матеріалу рівностями:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

де E - модуль пружності (модуль Юнга), ν - коефіцієнт Пуансона.

4) шість співвідношень між деформаціями та переміщеннями

Коефіцієнт теплопровідності, питома теплоємність, густина, коефіцієнт лінійного теплового розширення та коефіцієнти Ламе матеріалу вважаємо неперервними функціями просторових координат.

Спираючись на експериментальні дані [1-3] для подальших розрахунків вважаємо, що

1. модуль Юнга є функцією температури та пористості

$$E(T, \rho) = E_0 (1 + \alpha_1 \rho + \alpha_2 \rho^2) (1 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \dots) \quad (1)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - коефіцієнти, що отримані експериментально;

2. коефіцієнт теплопровідності матеріалу вважаємо залежним від температури та пористості [2-3]:

$$\lambda(T, \rho) = \lambda_0 \sqrt{(1-\rho)^3} (1 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \dots) \quad (2)$$

β_1, β_2 емпіричні коефіцієнти. В наведеній формулі в основні лежить теплопровідність скелету пористого тіла. Власне пори в широкому діапазоні температур практично відсутні.

3. коефіцієнт лінійного розширення матеріалу є функцією температури і не залежить від пористості. Основою для такого твердження є той факт, що від теплової взаємодії розширюється скелетна частина матеріалу як суцільного тіла, величиною пор (порожнечі) при цьому нехтуємо.

На основі експериментальних даних [1-3] отримаємо формулу $\alpha(T) = \alpha_0 (1 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \dots)$ При цьому середній коефіцієнт лінійного розширення в робочому діапазоні температур:

$$\alpha_{cp} = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T \alpha(\tau) d\tau \quad (3)$$

4. у випадку внутрішнього тепловиділення для потужності теплового джерела приймаємо залежність [1]:

$$W(T, P) = W_0 (1 - P) (1 + \gamma_1 T + \gamma_2 T^2 + \dots) \quad (4)$$

Наближені гіпотези, що описують фізико-механічний стан матеріалу, дають можливість підходити до вирішення задач з позицій механіки неоднорідних матеріалів суцільних тіл, властивості яких корельовано на пористість.

Розглянемо задачу теплопровідності для порожнинного циліндру з радіально змінною пористістю. Тепловий режим приймаємо нестационарним. Розв'язок задачі теплопровідності зводиться до інтегрування нелінійного диференціального рівняння [1]:

$$\frac{d}{dr} \left[\lambda(T, P) \frac{dT}{dr} \right] + \frac{\lambda(T, P)}{r} \frac{dT}{dr} + W(T, P) = 0 \quad (5)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} T &= T_1 \text{ при } r = R_1 \\ T &= T_2 \text{ при } r = R_2 \end{aligned} \quad (6)$$

де $\lambda(T, P)$ - коефіцієнт теплопровідності матеріалу як функція температури та пористості;

$P(r)$ - об'ємна пористість;

$W(T, P)$ - питома об'ємна потужність джерела тепла.

На основі експериментальних даних [1-3], апроксимуємо $\lambda(T, P)$, $W(T, P)$ функціями (2) та (4):

$$\lambda(T, P) = \lambda_0 \sqrt{(1-\rho)^3} (1 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \dots)$$

$$W(T, P) = W_0 (1-P) (1 + \gamma_1 T + \gamma_2 T^2 + \dots)$$

Розв'язок нелінійного рівняння із змінними коефіцієнтами (5) будемо шукати по схемі методу послідовних наближень, вихідне рівняння до серії виду:

$$\frac{d}{dr} \left[\lambda^{(m-1)}(r) \frac{dT^{(m)}}{dr} \right] + \frac{\lambda^{(m-1)}(r)}{r} \frac{dT^{(m)}}{dr} + W [T^{(m-1)}, P] = 0 \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

При $m=1$ приймаємо $\lambda^{(0)}(r) = \lambda_0 \sqrt{(1-\rho)^3}$ та $W^{(0)}(r) = W_0 (1-P)$

При $m > 1$ отримаємо

$$\begin{aligned} \lambda^{(m)}(r) &= \lambda^{(0)}(r) [1 + \beta_1 T_{(m-1)} + \beta_2 T_{(m-2)}^2 + \dots], \\ W^{(m-1)}(r) &= W^{(0)}(r) [1 + \gamma_1 T_{(m-1)} + \gamma_2 T_{(m-1)}^2 + \dots] \end{aligned} \quad (8)$$

Розв'язок граничної задачі (6)-(7) замінимо еквівалентною варіаційною постановкою з пошуком мінімуму відповідного функціоналу:

$$J_{(m)} = 2\pi l \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \frac{\lambda^{(m-1)}(r)}{2} \left[\frac{dT_m}{dr} \right]^2 - T_m W_{m-1}(r) \right\} r dr + \int_S W_s T_m dS + \int_S \frac{\alpha}{2} (T_m^2 - 2T_m T_{m-1} + T_{m-1}^2) dS \quad (9)$$

МСЕ на основі варіаційного формулювання. Для реалізації мінімуму функціоналу (9) скористаємось методом скінченних елементів [4]

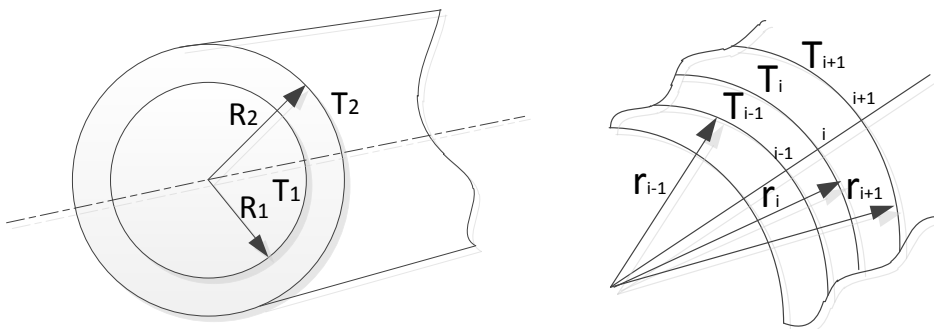


Рис. 1. Схема поділу циліндру на скінченні елементи по радіусу

Поділимо тіло по радіусу на n кільцевих елементів та пронумеруємо їх границі $i=1, 2, \dots, n+1$. Позначимо T_i шукану температуру в i -ому вузлі; відповідно отримаємо $T=T_1$ при $i=1$, $T=T_2$ при $i=n+1$. Розглянемо два суміжних елементи 1 та 2, що є спільними для вузла i та представимо функціонал J у вигляді суми $J = J_1 + J_2$, де отримаємо:

$$J_1^{(m)} = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \left\{ \frac{\lambda^{(m-1)}(r)}{2} \left[\frac{dT_m}{dr} \right]^2 - T_m W^{(m-1)}(r) \right\} r dr + \int_S W_s T_m dS + \int_S \frac{\alpha}{2} (T_m^2 - 2T_m T_{m-1} + T_{m-1}^2) dS$$

$$J_2^{(m)} = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left\{ \frac{\lambda^{(m-1)}(r)}{2} \left[\frac{dT_m}{dr} \right]^2 - T_m W^{(m-1)}(r) \right\} r dr + \int_S W_s T_m dS + \int_S \frac{\alpha}{2} (T_m^2 - 2T_m T_{m-1} + T_{m-1}^2) dS$$

Інші елементи можна не враховувати оскільки вони не містять вузол i . Множником $2\pi l$ перед інтегралом нехтуємо.

Представимо функцію температури в кожному з елементів лінійним сплайном

$$T_{(i-1,j)} = \alpha_{11} + \alpha_{12}r$$

$$T_{(i,j+1)} = \alpha_{21} + \alpha_{22}r$$

В останній системі коефіцієнти форми позначені через вузлові температури у вигляді:

$$\alpha_{11} = T_{i-1} - \frac{r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}}(T_i - T_{i-1}) \quad \alpha_{12} = \frac{1}{r_i - r_{i-1}}(T_i - T_{i-1})$$

$$\alpha_{21} = T_i - \frac{r_i}{r_{i+1} - r_i}(T_{i+1} - T_i) \quad \alpha_{22} = \frac{1}{r_{i+1} - r_i}(T_{i+1} - T_i)$$

Представимо функціонали $J_1^{(m)}$, $J_2^{(m)}$ у вигляді:

$$J_1^{(m)} = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_1^{(m-1)} \left[\frac{dT_{(i-1,j)}^{(m)}}{dr} \right]^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{12}r) W_1^{(m-1)} \right\} r dr +$$

$$+ \int_S W_s (\alpha_{11} + \alpha_{12}r) dS + \int_S \frac{\alpha}{2} \left((\alpha_{11} + \alpha_{12}r)^2 - 2(\alpha_{11} + \alpha_{12}r)T_0 + T_0^2 \right) dS$$

$$J_2^{(m)} = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_2^{(m-1)} \left[\frac{dT_{(i,j+1)}^{(m)}}{dr} \right]^2 - (\alpha_{21} + \alpha_{22}r) W_2^{(m-1)} \right\} r dr +$$

$$+ \int_S W_s (\alpha_{21} + \alpha_{22}r) dS + \int_S \frac{\alpha}{2} \left((\alpha_{21} + \alpha_{22}r)^2 - 2(\alpha_{21} + \alpha_{22}r)(\alpha_{11} + \alpha_{12}r) + (\alpha_{11} + \alpha_{12}r)^2 \right) dS$$

де було прийнято

$$\lambda_1^{(m-1)} = \frac{\lambda_i^{(m-1)} + \lambda_{i-1}^{(m-1)}}{2} \quad W_1^{(m-1)} = \frac{W_i^{(m-1)} + W_{i-1}^{(m-1)}}{2}$$

Відповідно заміною індексів можна отримати λ_2 , W_2 .

Умовою екстремуму функціоналу J буде

$$\frac{\partial J}{\partial T_i} = \frac{\partial J_1}{\partial T_i} + \frac{\partial J_2}{\partial T_i} = 0$$

Виконавши відповідні операції з функціоналами та на основі (12) – (14) отримаємо алгебраїчну систему рівнянь відносно вузлових температур для m -ого наближення

$$T_i^{(m)} = \frac{1}{A} \left[B_i T_{i+1}^{(m)} + C_i T_{i-1}^{(m)} + D_i \right]$$

де позначено

$$A_i = B_i + C_i; \quad B_i = \frac{\lambda_1^{(m-1)}}{2} \left[\frac{r_i + r_{i+1}}{r_{i+1} - r_i} \right]; \quad C_i = \frac{\lambda_2^{(m-1)}}{2} \left[\frac{r_{i-1} + r_i}{r_i - r_{i-1}} \right]$$

$$D_i = -\frac{W_1^{(m-1)}}{6} \left[2r_i^2 - r_{i+1}^2 - r_i r_{i+1} \right] - \frac{W_2^{(m-1)}}{6} \left[r_i r_{i-1} + r_{i-1}^2 - 2r_i^2 \right]$$

При дослідженні тіл із тріщинами для врахування кореневої особливості при реалізації цієї схеми використовуються квадратичні сплайни і зміщення вузлів у скінченних елементах у вершині тріщини на четвертину довжини елемента [6]

Чисельний приклад. Тріщина в скінченній анізотропній пластині. Розглянемо анізотропну прямокутну пластинку з центральною тріщиною (рис. 2). Ширина пластинки W , а її висота – $4W$. Довжина тріщина – $2a$, а кут її нахилу до осі Ox_1 – γ . Пластинка виготовлена зі склопластику з такими властивостями [9]: $E_{11} = 55$ ГПа, $E_{22} = 21$ ГПа, $\nu_{12} = 0.25$, $G_{12} = 9.7$ ГПа, $\alpha_{11} = 6.3 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, $\alpha_{22} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, $k_{11}/k_{22} = 3.46/0.35$. Сторони AD та BC пластини теплоізолювані. Сторона AB знаходиться при відліковій температурі ($\theta=0$), а сторона DC охолоджена до температури θ_0 . Крім цього, сторони AB та DC шарнірно закріплені так, що складові їхніх переміщень уздовж осі Ox_2 дорівнюють нулю.

Результати розрахунку КІН у вершинах P та Q тріщини, порівняно із даними роботи [9] подано в табл. 1. У таблиці використано такі позначення: ЕТМ – це «exact transformation method» [9], за якого об'ємний інтеграл перетворюється до контурного у відображеній області; Sup. – superposition approach [9], коли розв'язок отримують шляхом накладання полів теплових та пружних деформацій. Коефіцієнт нормування $K_0 = E_{22}\alpha_{22}\theta_0\sqrt{\pi a}$. При розбитті методом скінченних елементів використано адаптивну сітку із 540 вузлами.

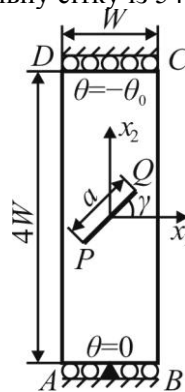


Рис. 2. Нахилена центральна тріщина в анізотропній прямокутній пластинці

Таблиця 1. КІН нахиленої тріщини в анізотропній прямокутній пластині

a/W	K_I/K_0 , tip P			K_{II}/K_0 , tip P			K_I/K_0 , tip Q			K_{II}/K_0 , tip Q		
	ETM, [9]	Sup., [9]	Present	ETM, [9]	Sup., [9]	Present	ETM, [9]	Sup., [9]	Present	ETM, [9]	Sup., [9]	Present
$\gamma = 0^\circ$												
0.1	0.361	0.357	0.354	0.000	0.000	0.000	0.361	0.357	0.354	0.000	0.000	0.000
0.2	0.371	0.371	0.357	0.000	0.000	0.001	0.371	0.371	0.357	0.000	0.000	-0.001
0.3	0.367	0.362	0.361	0.001	0.001	0.001	0.367	0.362	0.361	0.001	0.001	-0.001
0.4	0.372	0.369	0.367	0.002	0.001	0.001	0.372	0.369	0.367	0.002	0.001	-0.001
0.5	0.381	0.379	0.376	0.002	0.002	0.002	0.381	0.379	0.376	0.002	0.002	-0.002
$\gamma = 30^\circ$												
0.1	0.268	0.269	0.267	0.161	0.155	0.153	0.269	0.27	0.267	0.159	0.152	0.152
0.2	0.275	0.275	0.272	0.159	0.153	0.153	0.274	0.274	0.271	0.157	0.152	0.151
0.3	0.282	0.282	0.280	0.158	0.153	0.152	0.281	0.281	0.278	0.155	0.150	0.149
0.4	0.292	0.292	0.290	0.155	0.151	0.151	0.290	0.291	0.289	0.152	0.148	0.147
0.5	0.305	0.305	0.303	0.154	0.150	0.149	0.303	0.303	0.301	0.149	0.145	0.144
$\gamma = 45^\circ$												
0.1	0.148	0.150	0.179	0.195	0.188	0.178	0.147	0.149	0.178	0.195	0.188	0.177
0.2	0.204	0.205	0.184	0.178	0.172	0.179	0.196	0.199	0.183	0.174	0.168	0.177
0.3	0.219	0.220	0.192	0.181	0.176	0.181	0.208	0.210	0.191	0.174	0.168	0.178
0.4	0.239	0.240	0.202	0.187	0.182	0.183	0.224	0.226	0.201	0.174	0.169	0.179
0.5	0.208	0.209	0.214	0.200	0.197	0.186	0.188	0.190	0.213	0.186	0.183	0.180

Табл. 1 засвідчує добру узгодженість результатів, отриманих запропонованим підходом, із даними [9]. При $\gamma=45^\circ$ отримано найбільшу розбіжність результатів, що можна пояснити використаною у роботі [9] технікою розбиття на підобласті, що породжує додаткові точки колокації на спільній межі підобластей, яка для кута $\gamma=45^\circ$ є найбільшою серед усіх розглянутих. Крім цього, обчислені в [9] для $\gamma=45^\circ$ КІН K_I різко зростають при збільшенні відносної довжини тріщини a/W від 0.1 до 0.2, а КІН K_{II} для $a/W=0.1$ більший, ніж для $a/W=0.2$, хоча в діапазоні $a/W=0.2..0.5$ простежується їхнє монотонне зростання. З огляду на це, надійнішими видаються значення КІН, обчислені запропонованим підходом.

Для ілюстрації інших можливих застосувань запропонованого підходу дослідимо нові задачі.

5.4. *Анізотропна квадратна пластинка з двома паралельними тріщинами.* Розглянемо анізотропну пластинку зі скловолокна, що містить дві паралельні тріщини (рис. 3). На берегах тріщин підтримується відлікова (нульова) температура, а межа пластинки нагріта до температури θ_0 . Береги пластинки та тріщин вільні від механічного навантаження. Отримані значення КІН у правій вершині нижньої тріщини залежно від довжин тріщин та відстаней між ними подано в табл. 2. Усі КІН нормовані до $K_0 = E_{22}\alpha_{22}\theta_0\sqrt{\pi a}$.

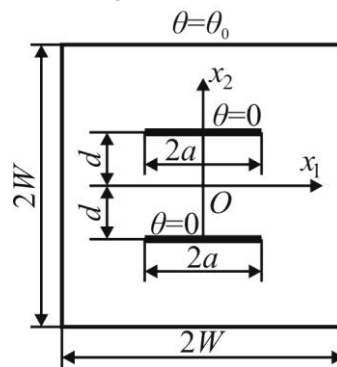


Рис. 3. Анізотропна пластинка з двома тріщинами

Таблиця 2. КІН в анізотропній пластинці з двома тріщинами

d/W	0.1	0.2	0.25	0.3	0.35	0.1	0.2	0.25	0.3	0.35
a/W	K_I/K_0					K_{II}/K_0				
0.1	0.175	0.183	0.177	0.170	0.162	0.001	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005
0.2	0.153	0.164	0.162	0.157	0.149	0.006	-0.005	-0.008	-0.008	-0.008
0.3	0.142	0.153	0.151	0.147	0.141	0.007	-0.005	-0.008	-0.009	-0.010
0.4	0.135	0.145	0.143	0.139	0.134	0.007	-0.006	-0.009	-0.010	-0.010
0.5	0.130	0.137	0.136	0.133	0.129	0.005	-0.007	-0.009	-0.009	-0.008
0.6	0.124	0.128	0.127	0.125	0.123	0.002	-0.009	-0.009	-0.007	-0.006
0.7	0.116	0.117	0.116	0.116	0.115	-0.003	-0.010	-0.008	-0.004	-0.002

Як і в ізотропному випадку тіла з однією тріщиною, домінуючим при температурних крайових умовах є КІН K_I . Проте, на відміну від пластинки з одною тріщиною, у випадку двох дефектів ненульовим є також КІН K_{II} . Це зумовлено взаємодією тріщин. Проте КІН K_{II} на порядок менший за K_I , тому при розрахунку міцності таких пластинок ним можна знехтувати.

Із табл. 2 видно, що нормовані КІН K_I/K_0 зменшуються зі збільшенням довжини тріщини та з віддаленням тріщин одна від одної (хоча сам КІН K_I збільшується). У випадку довгих тріщин відстань між ними практично не впливає на КІН K_I , що зумовлено збільшенням впливу країв пластинки. За тих же довжин тріщин не простежується монотонної залежності K_I від відстані $2d$ між тріщинами. Максимуми КІН K_I спостерігаються для $d/W \approx 0.2$.

Висновки. Запропонована методика та повний варіаційний функціонал може бути прийнятим за основу для розробки алгоритмів та схем наближеного розв'язування відповідних крайових задач з використанням варіаційних методів. Отримані співвідношення варіаційного

формулювання крайових задач є вихідними для ітераційної побудови двовимірних та одновимірних математичних моделей термомеханіки елементів тонкостінних конструкцій. Отримана на підставі запропонованого функціоналу схема методу скінченних елементів виявила добру узгодженість результатів досліджень із відомими даними при вивченні структурно неоднорідних анізотропних тіл із тріщинами. Таким чином запропоновані алгоритми мають перспективу до впровадження у прикладні програмні пакети інженерного розрахунку структурно неоднорідних анізотропних тіл.

1. Беляев Н.М. Проекционные и разностные методы в задачах теплообмена и термоупругости / Н.М. Беляев, В. И. Завелион, А.А. Рядно. Днепропетровск: ДГУ, 1982. – 140с.
2. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена / М. Био. М:Энергия. 1975. – 208 с.
3. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. М.:Мир. 1964. – 517 с.
4. Сегерлинд Ларри Дж. Применение метода конечных элементов / Ларри Дж. Сегерлинд. Под. ред. Б. Е. Победри. М.: Мир. 1979. – 392 с.
5. Deb A. Alternate BEM formulation for 2D and 3D anisotropic thermoelasticity / A. Deb, D.P. Henry Jr., E.B. Wilson // Int. J. Solids Struct. – 1991. – 27. – P. 1721–1738.
6. Improved quarter-point crack tip element / L.J. Gray, A. - V. Phan, Glaucio H. Paulino, T. Kaplan // Engineering Fracture Mechanics 70 (2003) 269–283
7. Pan E. A general boundary element analysis of 2D linear elastic fracture mechanics / E. Pan // Int. J. Fract. – 1997. – 88 – P. 41–59
8. Tokovyuy Y. An explicit-form solution to the plane elasticity and thermoelasticity problems for anisotropic and inhomogeneous solids / Y. Tokovyuy, C.-C. Ma // International Journal of Solids and Structures. – 2009. – 46, No 21. – P. 3850–3859.
9. Shiah Y.C. Fracture mechanics analysis in 2-D anisotropic thermoelasticity using BEM / Y.C. Shiah, C.L. Tan // CMES. – 2000. – Vol. 1, No. 3. – P. 91–99.
10. Sollero P. Anisotropic analysis of cracks in composite laminates using the dual boundary element method / P. Sollero, M.H. Aliabadi // Composite Structures. – 1995. – 31. – P. 229–233.

Стаття надійшла до редакції 24.04.2015.