

УДК 539.375

Ю. П. Фещук

Луцький національний технічний університет

**ТРИЩИНИ В ПОЛІ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ ОБОЛОНКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ
КОНСТРУКЦІЙ, ОДЕРЖАНИХ У ПРОЦЕСІ ГІДРОДИНАМІЧНОГО ШТАМПУВАННЯ**

Проаналізовано напружено-деформований стан деталей, виготовлених гідродинамічним штампуванням. На основі рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка та аналога δ_c -моделі задачу про напружений стан і граничну рівновагу зведено до системи нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь. Числовий аналіз показав, що зі збільшення довжини тріщин вплив параметрів анізотропії на граничну рівновагу оболонок в полі залишкових напружень зменшується. Врахування зміцнення матеріалу призводить до зменшення розкриття вершини тріщини.

Ключові слова: гідродинамічне формування, інтегральні рівняння, розкриття фронту тріщини, теорія оболонок типу Тимошенка.

Форм. 16. Рис. 1. Літ. 7.

Ю. П. Фещук**ТРЕЩИНЫ В ПОЛЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ОБОЛОЧЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
КОНСТРУКЦИЙ, ПОЛУЧЕННЫЕ В ПРОЦЕССЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ
ШТАМПОВКИ**

Проанализировано напряженно-деформированное состояние деталей, изготовленных гидродинамическим штамповкой. На основе уравнений теории оболочек типа Тимошенко и аналога δ_c -модели задачу о напряженном состоянии и предельную равновесие сведено к системе нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Числовой анализ показал, что с увеличением длины трещин влияние параметров анизотропии на предельное равновесие оболочек в поле остаточных напряжений уменьшается. Учет упрочнения материала приводит к уменьшению раскрытия вершины трещины.

Ключевые слова: гидродинамическое формирование, интегральные уравнения, раскрытия фронта трещины, теория оболочек типа Тимошенко.

Yu. Feshchuk**STRESS-STRAIN STATE OF ORTHOTROPIC ELASTIC-PLASTIC
CLOSED CYLINDRICAL SHELL WITH AN INTERNAL
TRANSVERSE CRACKS ANY CONFIGURATION**

The stress-strain state of the parts produced by the hydrodynamic stamping. On the basis of equalizations theory shells type Tymoshenko and analogue are δ_c models a task about the tense state and maximum equilibrium is taken to the system of nonlinear singular integral equalizations. Numerical analysis shows that an increase in the influence of crack length anisotropy parameters on the limit equilibrium of shells in the residual stress decreases. Accounting hardening material reduces crack tip opening.

Keywords: hydrodynamic form, integral equations, the disclosure of the crack front, the theory of shells such as Tymoshenko.

Вступ. В машино-, авіа-, суднобудуванні та інших галузях техніки широко використовуються оболонкові конструкції, виготовлені з використанням гідростатичного та гідродинамічного формування. Застосування гідродинамічного формування демонструє надвисоку точність розмірів та форми, можливість отримання складного поєднання різноманітних форм в готовій конструкції, що призводить до скорочення кількості технологічних процесів та зниження собівартості виготовлення продукції [6] навіть у порівнянні з гідростатичним формуванням.

Повна схема гідродинамічного штампування (рис. 1) із використанням трьох DDV насосів. Перший (DDV1) створює пульсуючий тиск, а два інші є багатоцільовими [7].

Зважаючи на інтенсивність формозміни в процесі виготовлення тонкостінних оболонкових елементів конструкцій актуальним є дослідження поведінки тріщин в полі залишкових напружень у процесі їх подальшої експлуатації, дослідження впливу на міцність таких елементів конструкцій різного роду концентраторів, зокрема, дефектів типу тріщин. Крім цього використання класичної теорії оболонок, що ґрунтується на гіпотезах Кірхгофа-Лява, для дослідження тонкостінних елементів конструкцій із композиційних матеріалів не завжди дозволяв достовірно визначити

інтенсивність напружень в околі вершин тріщин. Причиною цього є скорочення числа природних граничних умов з п'яти до чотирьох, що обумовлено неврахуванням поперечного зсуву у виразі для енергії деформацій напружень. Пружно-пластичні трансверсально-ізотропні оболонки з тріщинами в даному розділі досліджуються на основі рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка.

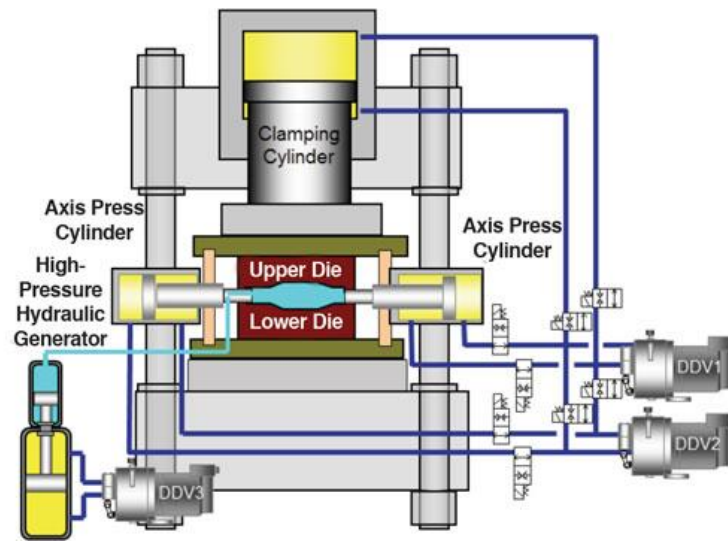


Рис. 1. Схема гідродинамічного формування

Формулювання задачі. Розглянемо положу трансверсально-ізотропну сферичну оболонку, з прямолінійною в плані тріщиною довжини $2l_0$. Нехай оболонка знаходиться під дією зовнішнього навантаження, а береги тріщини завантажені самозрівноваженими зусиллями та моментами. Позначимо довжину пластичних зон, що розвиваються біля вершин тріщин через l_p та l^p . Тоді довжина фіктивної тріщини, утвореної згідно з прийнятою моделлю внаслідок заміни пластичних зон лініями розриву переміщень та кутів повороту, рівна $2l_1 = l_p + 2l_0 + l^p$. Віднесемо оболонку до декартової системи координат XOY , початок якої сумістимо з серединою фіктивної тріщини, а вісь OX направимо вздовж її лінії.

Для сферичної оболонки з тріщиною $|x| < 1, y = 0$ ($x = X/l_1, y = Y/l_1$) компоненти деформації (2.3.20) $\varepsilon_{ij}^0, \chi_{ij}^0$ такі:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^0 = 0, \quad \varepsilon_{12}^0 = \frac{1}{l_1} [u(x)] \delta(y), \quad \varepsilon_{22}^0 = \frac{1}{l_1} [v(x)] \delta(y), \\ \varepsilon_{13}^0 = 0, \quad \varepsilon_{23}^0 = \frac{1}{l_1} [w(x)] \delta(y), \quad \chi_{11}^0 = 0, \quad \chi_{12}^0 = \frac{1}{2l_1} [\gamma_1(x)] \delta(y), \quad \chi_{22}^0 = \frac{1}{l_1} [\gamma_2(x)] \delta(y). \end{aligned} \quad (1)$$

Тут враховано, що зв'язок між компонентами деформації серединної поверхні та узагальненими переміщеннями має вигляд [195]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \frac{1}{l_1} \partial_1 u + w/R, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{l_1} \partial_2 v + w/R, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{l_1} (\partial_2 u + \partial_1 v), \quad \chi_{11} = \frac{1}{l_1} \partial_1 \gamma_1, \quad \chi_{22} = \frac{1}{l_1} \partial_2 \gamma_2, \\ \chi_{12} = \frac{1}{l_1} (\partial_2 \gamma_1 + \partial_1 \gamma_2), \quad \varepsilon_{13} = \gamma_1 + \frac{1}{l_1} \partial_1 w, \quad \varepsilon_{23} = \gamma_2 + \frac{1}{l_1} \partial_2 w, \quad \partial_1 = \partial / \partial x, \quad \partial_2 = \partial / \partial y. \end{aligned} \quad (2)$$

Використовуючи основні співвідношення трансверсально-ізотропних оболонок [2] для сферичної оболонки, отримуємо систему диференціальних рівнянь відносно функції напружень φ , функції прогинів w та функції кутів повороту ψ .

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \varphi - D_0 l_1^2 / R \nabla^2 w &= -D_0 l_1^2 F_1^0(x, y), \\ \nabla^2 \nabla^2 w + 1 / (DR) (l_1^2 - \varepsilon \nabla^2) \nabla^2 \varphi &= l_1^2 F_2^0(x, y), \\ (\nabla^2 - l_1^2 \mu^2) \psi &= F_3^0(x, y). \end{aligned} \quad (3)$$

Тут

$$\begin{aligned} F_1^0 &= \nabla^2 \varepsilon_{22}^0 + \partial_2^2 (\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0) - \partial_1 \partial_2 \varepsilon_{12}^0, \quad \varepsilon = \frac{h^2}{3k'(1-\nu)} \frac{E}{G'}, \\ F_2^0 &= \frac{1}{l_1} \nabla^2 (\partial_1 \varepsilon_{13}^0 + \partial_2 \varepsilon_{23}^0) - \nabla^2 (\chi_{11}^0 + \nu \chi_{22}^0) + (1-\nu) [\nabla^2 (\chi_{11}^0 - \chi_{22}^0) - 2\partial_1 \partial_2 \chi_{12}^0], \\ F_3^0 &= \frac{2}{\mu^2} [\partial_1 \partial_2 (\chi_{11}^0 - \chi_{22}^0) + (\partial_2^2 - \partial_1^2) \chi_{12}^0] - l_1 (\partial_2 \varepsilon_{12}^0 - \partial_1 \varepsilon_{23}^0), \quad \mu^2 = \frac{2}{\varepsilon(1-\nu)}, \end{aligned}$$

E та ν – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона в серединній поверхні (поверхні ізотропії), G' – модуль зсуву в площадках, перпендикулярних до серединній поверхні, k' – введений для перерізуючих зусиль коефіцієнт зсуву [5].

Зусилля та моменти через введені функції визначаються за допомогою формул

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{l_1^2} \partial_j^2 \varphi, \quad S = -\frac{1}{l_1^2} \partial_1 \partial_2 \varphi, \quad M_i = D / l_1 [\partial_i \gamma_i + \nu \partial_j \gamma_j - l_1 (\chi_{ii}^0 + \nu \chi_{jj}^0)], \\ H &= D(1-\nu) / (2l_1) (\partial_2 \gamma_1 + \partial_1 \gamma_2 - 2l_1 \chi_{12}^0), \\ Q_i &= D / \varepsilon (\gamma_i + \partial_i w / l_1 - \varepsilon_{13}^0) \quad (i \neq j = 1, 2), \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1 / l_1 \partial_2 (\psi - 2\chi_{12}^0 / \mu^2) - \frac{1}{l_1 \partial_1 w} + \varepsilon_{13}^0 - \frac{\varepsilon}{l_1} \partial_1 (\Phi + \chi_{11}^0 + \nu \chi_{22}^0), \\ \gamma_2 &= -\frac{1}{l_1} \partial_1 \left(\psi + \frac{2}{\mu^2} \chi_{12}^0 \right) - \frac{1}{l_1} \partial_2 w + \varepsilon_{23}^0 - \frac{\varepsilon}{l_1} \partial_2 (\Phi + \chi_{22}^0 + \nu \chi_{11}^0), \\ \Phi &= 1 / l_1^2 \nabla^2 (w - \varepsilon \varphi / (RD)) - (\partial_1 \varepsilon_{13}^0 + \partial_2 \varepsilon_{23}^0) / l_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Перші два рівняння (3) приведемо до одного ключового рівняння для визначення функції φ

$$\nabla^2 (\nabla^2 \nabla^2 - \varepsilon d^* \lambda^2 \nabla^2 + \lambda^4) \varphi = D_0 l_1^2 [l_1^2 / R F_2^0 - \nabla^2 F_1^0] \quad (6)$$

і рівняння для визначення прогину $w(x, y)$

$$\nabla^2 w = R (1 / (D_0 l_1^2) \nabla^2 \nabla^2 \varphi + F_1^0), \quad (7)$$

де

$$d^{*2} = \lambda^4 / l_1^4 = D_0 / (D_1 R^2).$$

Використавши інтегральне перетворення Фур'є фундаментальний розв'язок φ_0 та ψ_0 рівнянь

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\nabla^2 \nabla^2 - \varepsilon d \lambda^2 \nabla^2 + \lambda^4) \varphi_0(x, y) &= \delta(x) \delta(y), \\ (\nabla^2 - l_1^2 \mu^2) \psi_0(x, y) &= \delta(x) \delta(y) \end{aligned} \quad (8)$$

отримаємо у вигляді

Використовуючи фундаментальний розв'язок на основі (9) отримаємо вирази для ключових функцій

$$g_i(x, y) = \frac{C_i}{4\pi a_j} \int_{-1}^1 \left\{ \varepsilon_2(\xi) \Phi_i(x - \xi, y) + \varepsilon_3(\xi) \Phi_{i+2}(x - \xi, y) + \right. \\ \left. + \frac{1}{Rd} \left[\varepsilon_4(\xi) F_i(x - \xi, y) + 2\nu_1 \chi_3(\xi) F_{i+4}(x - \xi, y) + \chi_2(\xi) F_{i+2}(x - \xi, y) \right] \right\} d\xi \\ i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3 \\ \psi(x, y) = -l_1^2 / \pi \int_{-1}^1 \left[\varepsilon_4(\xi) \psi_1(x - \xi, y) + \chi_2(\xi) \psi_2(x - \xi, y) + \right. \\ \left. + \chi_3(\xi) \psi_3(x - \xi, y) \right] d\xi, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{l_1} [v(\xi)], \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{l_1} [u(\xi)], \quad (9) \\ \varepsilon_4 = \frac{1}{l_1} [w(\xi)], \quad \chi_2 = \frac{1}{l_1} [\gamma_2(\xi)], \quad 2\chi_3 = \frac{1}{l_1} [\gamma_1(\xi)].$$

Підставляючи вирази (9) в формули (4), визначимо зникаючі на нескінченності зусилля і моменти в довільній точці оболонки, викликані полем (1). Задовольняючи тепер умови на берегах фіктивної тріщини, для визначення п'яти невідомих стрибків узагальнених переміщень $[u]$, $[v]$, $[w]$, $[\gamma_1]$, $[\gamma_2]$ отримуємо дві системи СІР. Перша система

$$\sum_{k=1}^2 \int_{-1}^1 \Psi_k(\xi) K_{ik}(x - \xi) d\xi = f_i^*(x), \quad |x| < 1, \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

відповідає випадку, коли оболонка і береги тріщини завантажені симетрично відносно лінії тріщини, тобто $f_3(x) = f_4(x) = f_5(x) = 0$, друга

$$\sum_{k=3}^5 \int \Psi_k(\xi) K_{ik}(x - \xi) d\xi = f_i^*(x), \quad |x| < 1, \quad i = \overline{3, 5} \quad (11)$$

– антисиметричному розподілу напружень, тобто $f_1(x) = f(x) = 0$.

Розглянемо нескінченну трансверсально-ізотропну пластину з прямолінійною наскрізною тріщиною $|x| < l_0$, $y = 0$. Для визначення напружено-деформованого стану такої пластини із систем СІР (10), (11), спрямувавши R до нескінченності, отримаємо такі інтегральні рівняння:

1) у випадку узагальненого плоского напруженого стану:

$$\int_{-1}^1 \Omega_i(\xi) K_i(x - \xi) d\xi = \frac{2\pi}{D_0} f_i^0(x), \quad |x| < 1, \quad i = 1, 3, \quad (12)$$

де

$$\Omega_1(\xi) = \frac{1}{l_1} \frac{d}{d\xi} [v(\xi)], \quad \Omega_3(\xi) = \frac{1}{l_1} \frac{d}{d\xi} [u(\xi)], \quad K_1 = K_3 = \frac{1}{2(x - \xi)};$$

2) у випадку згину:

а) при симетричному відносно тріщини навантаженні

$$\int_{-1}^1 \Omega_2(\xi) K_2(x - \xi) d\xi = \frac{2\pi}{D_1} f_2^0(x), \quad |x| < 1, \quad (13)$$

б) при антисиметричному навантаженні

$$\sum_{k=4}^5 \int_{-1}^1 \Omega_k(\xi) K_{ik}(x - \xi) d\xi = \frac{2\pi}{D_1} f_i^0(x), \quad |x| < 1, \quad i = 4, 5. \quad (14)$$

Відзначимо, що у випадку узагальненого плоского напруженого стану інтегральні рівняння (12) повністю співпадають з інтегральними рівняннями задачі про напружений стан ізотропної пластини з прямолінійною тріщиною, яка розв'язується в рамках теорії Кірхгофа-Лява [3]. У випадку згину пластини замість двох інтегральних рівнянь, що відповідають теорії Кірхгофа-Лява, маємо три інтегральних рівняння (13) та (14), які за структурою нагадують інтегральні рівняння відповідної задачі для оболонки з тріщиною, тобто їх ядра складаються із сингулярного ядра Коші та регулярної частини, яка характеризує вплив модуля зсуву на напружений стан пластини.

Як приклад розглянуто пластину з тріщиною, до берегів якої прикладені рівномірно розподілені по довжині постійні нормальне зусилля N_2^0 та згинний момент M_2^0 . Хоча розтяг і симетричний згин пластини описуються окремими інтегральними рівняннями, в даному випадку цю задачу треба розв'язувати взаємно, тому що дія тільки згинного моменту приводить до контакту берегів тріщини. Але сумарна дія N_2^0 та M_2^0 одночасно впливає на утворення пластичної зони. Тобто ці дві окремі, на перший погляд, задачі зв'язані через умову пластичності.

Числовий аналіз. Структура систем сингулярних інтегральних рівнянь (10), (11) і відповідно (12) – (14) така ж як і в попередніх випадках. Тому сумісний розв'язок цих систем з умовами пластичності Треска та умовами обмеженості зусиль і моментів біля вершин тріщини будуємо з допомогою алгоритму, приведенного в [1]. Залежність розкриття вершини тріщини в трансверсально-ізотропній пластині від симетричного відносно тріщини навантаження (N_2^0, M_2^0) та параметра податливості матеріалу на зсув E/G' приведено в [4].

Для трансверсально-ізотропної оболонки розкриття тріщини в довільній її точці визначаємо за формулами:

$$\delta(x, \gamma) = [v(x)] + \gamma[\gamma_2(x)] \quad (15)$$

у випадку симетричного відносно тріщини навантаження та

$$\delta(x, \gamma) = \sqrt{[v(x)]^2 + [w(x)]^2} + \gamma[\gamma_1(x)] \quad (16)$$

у випадку антисиметричного відносно лінії тріщини навантаження.

Висновок. Числовий аналіз показав, що зі збільшення довжини тріщин вплив параметрів анізотропії на граничну рівновагу оболонок в полі залишкових напружень зменшується. Зі збільшенням податливості матеріалу оболонок на зсув розкриття тріщини збільшується. Врахування зміцнення матеріалу призводить до зменшення розкриття вершини тріщини. Значення розкриття тріщини та довжини пластичних зон в ізотропній оболонці, які отримані на основі уточненої теорії типу Тимошенка та пластичної теорії Кірхгофа-Лява відрізняються на 3 % у випадку симетричного навантаження та на 20 % у випадку антисиметричного навантаження.

1. Кузін М.О. Напружено-деформований стан ортотропної пружно-пластичної замкнутої циліндричної оболонки з внутрішньою поперечною тріщиною довільної конфігурації / М.О. Кузін, Т.М. Николишин, Ю.П. Фещук, Н.П. Зайчук // Луцьк: Наукові нотатки. – Вип. 47, 2014. – С.73-79.
2. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Пелех Б.Л. – Киев: Наук. думка, 1973. – 247 с.
3. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / Саврук М.П. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
4. Фещук Ю. П. Забезпечення міцності оболоноквих елементів конструкцій, одержаних у процесі гідростатичного витягування / Ю. П. Фещук, Н. П. Зайчук, Д. А. Гусачук // Обробка матеріалів тиском. – 2012. – № 2 (31)
5. Timoshenko S.P. On the correction for shear of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars / Timoshenko S.P. // Phil. Mag. – 1921. – 41, № 6.
6. www.aws-schaefer.de/fileadmin/media/Prospekte/Hydroforming_TFittings/Hydroforming_Fitting_rus.pdf
7. www.thefabricator.com/article/hydroforming/hammering-parts-with-hydroforming

Стаття прийнята до друку 23.04.2015.