

УДК 539.3

В.І. Шваб'юк, С.В. Ротко, В.В. Шваб'юк*Луцький національний технічний університет***УТОЧНЕНЕ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ
ОРТОТРОПНОЇ БАЛКИ – СМУГИ З ПОПЕРЕЧНОЮ ТРИЩИНОЮ**

Наведена уточнена методика визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень ортотропної балки-смуги з поперечною тріщиною із використанням методу лінійного спряження комплексних потенціалів М.І. Мусхелішвілі. Досліджується вплив деформацій поперечного зсуву і обтиснення для ізотропного та ортотропного матеріалів.

Ключові слова: поперечна тріщина, метод лінійного спряження, коефіцієнт інтенсивності напружень, уточнена теорія балок.

Форм. 15. Табл. 1. Рис. 1. Літ. 8.

В.И. Швабюк, С.В. Ротко, В.В. Швабюк**УТОЧНЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ
НАПРЯЖЕНИЙ ОРТОТРОПНОЙ БАЛКИ – ПОЛОСЫ ИЗ ПОПЕРЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ**

Приведена уточненная методика определения коэффициентов интенсивности напряжений ортотропной балки-полосы из поперечной трещиной с использованием метода линейного сопряжения комплексных потенциалов Н.И. Мусхелишвили. Исследуется влияние деформаций поперечного сдвига и обжатия для изотропного и ортотропного материалов.

Ключевые слова: поперечная трещина, метод линейного сопряжения, коэффициент интенсивности напряжений, уточненная теория балок.

V. Shvabyuk, S. Rotko, V. Shvabyuk**SPECIFIED DETERMINATION OF STRESS INTENSITY FACTOR OF ORTHOTROPIC
BEAM -STRIP WITH A CROSS CRACK**

Specified determination technique of stress intensity factor of beam (strip with a cross crack), using Nikoloz Muskhelishvili's method of complex potentials linear conjunction, has been presented. The influence of deformations of transversal shear and stretch for isotropic and orthotropic materials is studied.

Key words: cross crack, method of linear conjunction, stress intensity factor, specified beams theory.

Вступ. Згинові ізотропних смуг з прямолінійними тріщинами присвячена низка праць В.В. Панасюка, Б.Л. Лозового та деяких інших авторів [2, 3, 5]. Розв'язки згаданих задач отримано на основі методу лінійного спряження М.І. Мусхелішвілі [1]. Для знаходження напружено-деформованого стану в смугах ними використано формули класичної теорії балок. При визначенні граничних значень зовнішнього навантаження на балку, за якого починається ріст тріщини, застосовано відомий критерій руйнування Г.І. Баренблатта [2].

У роботі побудований розв'язок задачі згину скінченної смуги-балки з ортотропного матеріалу, що містить поперечну прямолінійну тріщину, яка перебуває в зоні напружень розтягу. Розглядається специфічний тип ортотропії, для якого корені характеристичного рівняння суто уявні та однакові. Для визначення напружено-деформованого стану використано формули уточненої теорії ортотропних балок середньої товщини [6], що враховує деформації поперечного зсуву та обтиснення.

Постанова задачі. Розглянемо смугу $-h \leq \gamma \leq h$, $-L \leq x \leq L$, з тріщиною уздовж відрізка $a \leq \gamma \leq b$, $x=0$ (рис.1). Уздовж краю $\gamma=-h$ на смугу діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q ($\sigma_\gamma = -q^- = -q$), зрівноважуване рівномірно розподіленими дотичними напруженнями $\tau_{x\gamma}$ на краях $x=\pm L$ смуги. Вважається, що осі ортотропії матеріалу паралельні осям Ox і $O\gamma$. Якщо врахувати згадані особливості матеріалу (однаковість та уявність коренів характеристичного рівняння), то напружений стан у смугі з тріщиною можна описати аналітичними функціями $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ [1,3]:

$$\begin{cases} \sigma_x + \alpha^2 \sigma_\gamma = 4 \operatorname{Re} \Phi(z); \sigma_x - \alpha^2 \sigma_\gamma + 2i\alpha \tau_{x\gamma} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]; \\ 2G \frac{\partial}{\partial x}(U + i\alpha V) = \kappa \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}, \end{cases} \quad (1)$$

де $z = \gamma + i\lambda x$, $\lambda = 1/\alpha$, $i = \sqrt{-1}$, $\kappa = \frac{8G}{\sqrt{EE'}} - 1 = \frac{4\alpha^2}{1+\nu} - 1$; $\alpha^2 = \frac{E}{2G'} - \nu'' = \sqrt{\frac{E}{E'}}$.

E, E', G', ν'' – модулі пружності, модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона у відповідних напрямках Ox і Oy , τ – товщина перерізу смуги; U і V – переміщення у напрямках Ox і Oy .

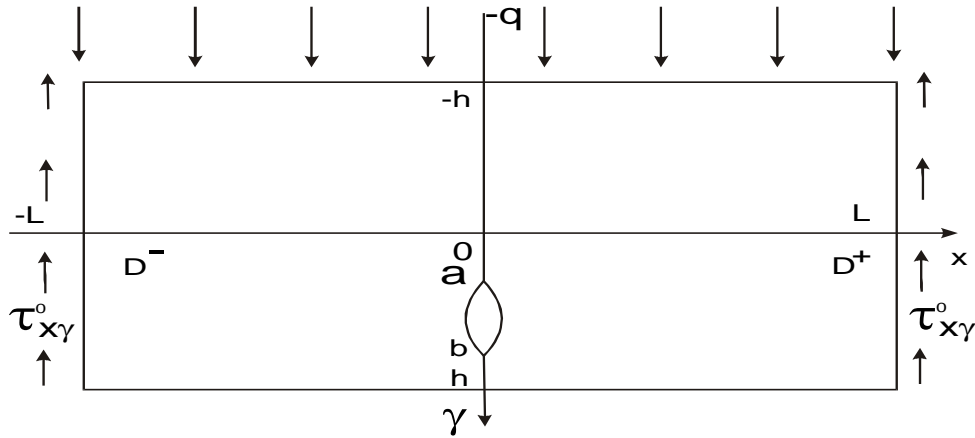


Рис. 1. Схема навантаження ортотропної смуги з тріщиною

Ввівши нову функцію $\Omega(z)$, яка виражається через функції $\Phi(z)$, і $\Psi(z)$ у вигляді [3,4]:

$$\Omega(\bar{z}) = -\overline{\Phi(z)} - \overline{z\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}. \tag{2}$$

Рівняння (1) записуються наступним чином:

$$\sigma_x + \alpha^2 \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \sigma_x - i\alpha\tau_{xy} = \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \tag{3}$$

$$2G \frac{\partial}{\partial x}(U + i\alpha V) = \kappa\Phi(z) + \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}.$$

Тут $z \in D^-$ ($x < 0$), а функції $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ на нескінченності набувають вигляду

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Phi(z) = \Phi_0(z) = A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0, \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Omega(z) = \Omega_0(z) = B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0, \tag{4}$$

де коефіцієнти A_j, B_j ($j = 0, 1, 2, 3$) – сталі, які визначають напружений стан у смугі без тріщини:

а) при згинанні смуги розподіленим навантаженням ці коефіцієнти будуть дорівнювати:

$$A_0 = -\frac{qh^3}{12I}\alpha^2, A_1 = \frac{q\alpha^2}{8I}(L_0^2 + h^2), A_2 = 0, A_3 = \frac{q\alpha^2}{24I}, \tag{5}$$

$$B_0 = A_0, B_1 = -\frac{q\alpha^2}{8I}(3L_0^2 - h^2), B_2 = 0, B_3 = -7A_3, L_0^2 = \frac{L^2}{\alpha^2} - 0,4h^2;$$

б) при згинанні смуги зосередженою силою $2P$ маємо:

$$A_0 = 0, A_1 = \frac{PL}{4I}, A_2 = -\frac{i\alpha P}{8I}, A_3 = 0, B_0 = i\alpha \frac{Ph^2}{2I}, B_1 = -3A_1, B_2 = 5A_2, B_3 = 0. \tag{6}$$

Побудова розв’язку. Будуючи збурений розв’язок, вважаємо, з огляду на його замикання на нескінченності, що досліджувана область необмежена. Для випадку, коли тріщина перебуває в зоні розтягувальних напружень, а її береги вільні від зовнішніх навантажень, крайові умови подамо у формі

$$\sigma_x^+(\gamma, 0) = \sigma_x^-(\gamma, 0) = 0 \text{ при } (a \leq \gamma \leq b), \tau_{xy}^\pm(\gamma, 0) = 0 \text{ при } (-h \leq \gamma \leq h). \tag{7}$$

Скориставшись залежностями (3) та умовами (7), за аналогією [7], одержимо задачу лінійного спряження граничних значень шуканих функцій $\Phi(z)$, $\Omega(z)$:

$$[\Phi(\gamma) - \Omega(\gamma)]^+ - [\Phi(\gamma) - \Omega(\gamma)]^- = 0, [\Phi(\gamma) + \Omega(\gamma)]^+ + [\Phi(\gamma) + \Omega(\gamma)]^- = 0, (a \leq \gamma \leq b). \tag{8}$$

Розв'язавши цю задачу, з урахуванням умов (5), знайдемо

$$\Phi(z) = \frac{P_4(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \frac{1}{2}[\Phi_0(z) - \Omega_0(z)], \quad \Omega(z) = \frac{-P_4(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} - \frac{1}{2}[\Phi_0(z) - \Omega_0(z)]. \quad (9)$$

Коефіцієнти C_k ($k=0..4$) полінома $P_4(z) = \tilde{N}_4 z^4 + \tilde{N}_3 z^3 + \tilde{N}_2 z^2 + \tilde{N}_1 z + \tilde{N}_0$ визначаються способом навантажування смуги, тобто однорідним розв'язком:

а) при згині розподіленим навантаженням вони дорівнюють –

$$C_0 = -\frac{q\alpha^2}{48I}(6L_0^2 + 5l^2 + 4ab)l^2, \quad C_1 = -\frac{q\alpha^2}{24I}(3L_0^2 + l^2)(a+b) \quad (10)$$

$$C_2 = \frac{q\alpha^2}{12I}(3L_0^2 - l^2), \quad C_3 = -\frac{q\alpha^2}{12I}(a+b), \quad C_4 = \frac{q\alpha^2}{6I};$$

$2l = b - a$ – довжина тріщини.

б) при дії зосередженої сили $2P$ –

$$C_0 = -\frac{P}{16I}[2Ll^2 - i\alpha(h^2 - 5l^2)(a+b)], \quad C_1 = -\frac{P}{8I}[2L(a+b) + i\alpha(2h^2 + l^2)], \quad (11)$$

$$C_2 = \frac{P}{8I}(4L - i\alpha(a+b)), \quad C_3 = \frac{i\alpha P}{4I}, \quad C_4 = 0.$$

Для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень K_1, K_2 у нижньому вістрі тріщини, скористаємося означенням [2,5]:

$$K_1 = \lim_{\gamma \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(\gamma-b)}\sigma_x(\gamma,b), \quad K_2 = \lim_{\gamma \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(\gamma-b)}\tau_{xy}(\gamma,b).$$

Тоді, враховуючи рівності (3), при дії розподіленого навантаження отримаємо:

$$K_1 = \frac{q\alpha^2}{32I}\sqrt{\pi l} [4L_0^2(3b+a) + (5b^2 - a^2)b + 0,84(a+b)^3], \quad K_2 = 0. \quad (12)$$

де $I = \frac{2}{3}\tau h^3, \quad L_0^2 = \frac{L^2}{\alpha^2} - 0,4h^2.$

У випадку згину смуги зосередженою силою будемо мати:

$$K_1 = \frac{PL}{4I}\sqrt{\pi l}(3b+a), \quad K_2 = 0. \quad (13)$$

Аналіз результатів. Аналіз формул (12), (13) і порівняння їх з відповідним розв'язком для згину смуги моментами M приводить до висновку, що без урахування поперечного зсуву і обтиснення формули для КІН K_1 співпадають. Це видно, якщо їх виразити через максимальне напруження σ_m у смугі без тріщини, знайдене за формулами елементарної теорії згину балок:

$$K_1 = \sigma_m \sqrt{\pi l} \left(\frac{3l}{2h} + \frac{a}{h} \right), \quad \sigma_m = \frac{M}{I/h} = \frac{PL}{I/h} = \frac{qL^2}{2I/h}. \quad (14)$$

Коли $h \rightarrow \infty$ і $L^2 \rightarrow 2I/h$, то $K_1 = \sigma_m \sqrt{\pi l}, \quad \sigma_m \rightarrow q$. Тобто цей розв'язок стає формально схожий з розв'язком для безмежної пластини під час її одновісного розтягу. Значення безрозмірного КІН $K_1^0 = K_1 / (\sigma_m \sqrt{\pi l})$, обчисленого на основі формули (10) залежно від значень параметрів $L/h, 2l/h$ (при $b=0,99h$), зведені в табл. 1, де величини над рискою стосуються ізотропного матеріалу, під рискою – анізотропного при $\alpha^2 = 10$. У останньому рядку таблиці для зіставлення приведені значення безрозмірного КІН K_1^0 , обчисленого за формулою (14). У цьому випадку анізотропія матеріалу ніякого впливу на КІН не має.

Таблиця 1. Значення безрозмірного КІН K_1^0

L	α^2	$2l/h$			
		0,1	0,5	0,7	1,0
$2h$	$\frac{1,0}{10}$	$\frac{1,02}{1,51}$	$\frac{0,893}{1,146}$	$\frac{0,836}{1,020}$	$\frac{0,754}{0,882}$
	$\frac{1,0}{10}$	$\frac{0,979}{1,101}$	$\frac{0,872}{0,935}$	$\frac{0,816}{0,820}$	$\frac{0,744}{0,775}$
$10h$	$\frac{1,0}{10}$	$\frac{0,967}{0,987}$	$\frac{0,866}{0,876}$	$\frac{0,815}{0,816}$	$\frac{0,741}{0,746}$
	$\Phi.(14)$	1,0	0,965	0,865	0,815

Як видно з табл. 1, анізотропія матеріалу, а також врахування поперечного зсуву і обчислення, змінюють значення знайдених величин в бік їхнього збільшення: для коротких смуг ($L \leq 4h$) – на 15-30%, для довгих ($L \leq 10h$) – на 3-5%. Якісно це узгоджується з відповідними результатами подібних схем навантажень смуг [2, 5].

Розв'язок для смуги з тріщиною, що знаходиться у плоскому напруженому стані можна застосувати і для випадку плоского деформованого стану (антиплоска деформація), якщо покласти $q \equiv 0$, а дотичні напруження τ_{xy}^0 взяти одного знаку і прикласти до граней: $x = \pm L$, $y = \pm h$. Така задача розглядалась у нашій роботі [8] для випадку, коли тунельна тріщина заповнена жорстким включенням, а тіло виготовлене з неогуківського нелінійного матеріалу. Переріз заповненої тріщини може міняти свою конфігурацію від прямолінійної тріщини до гіпоциклоїдної із $N+1$ точкою звороту ($N = 2, 3, \dots$). Розв'язуючи дану задачу за допомогою методу М.І. Мусхелішвілі, з використанням конформного відображення зовнішності дефекта на зовнішність кола з одиничним радіусом, одержано вирази для дотичних напружень τ_{xy} і τ_{yy} , а також нормального напруження σ_y в околі початку локальної системи координат, що знаходиться в одній з точок звороту:

$$\tau_{xy} = -\frac{K_3}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} + 0(1); \quad \tau_{yy} = \frac{K_3}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} + 0(1); \quad \sigma_y = \frac{K_3^2}{2rG\lambda} + 0(r^{-1/2}), \quad (15)$$

де $K_3 = \frac{1+3\varepsilon}{\sqrt{2(1+\varepsilon)}} \cdot \tau_{xy}^0 \sqrt{l}$ – коефіцієнт інтенсивності напружень; r, θ – радіальна та кутова змінні

локальної циліндричної системи координат; λ – стала Ляме; ($0 \leq \varepsilon \leq 1/N$).

Для визначення граничного навантаження, що діє на балку, використовується силовий критерій Дж. Ірвіна, у відповідності з яким тріщина починає поширюватись при досягненні коефіцієнтом інтенсивності напружень K_1 критичного значення K_{1c} . Використовуючи вирази (12), (13) для K_1 у випадку, коли тріщина починається від середньої лінії балки і, підставивши його в рівність $K_1 = K_{1c}$, одержимо:

$$q^* = \frac{K_{1c}}{9l\sqrt{\pi l}} \cdot \frac{h^3}{L^2 + \alpha^2(2l^2 - 0.1h^2)}, \quad P^* = \frac{8K_{1c}h^3}{9Ll\sqrt{\pi l}}.$$

Якщо в знаменнику одержаного виразу коефіцієнт α^2 покласти рівним нулю, то будемо мати формули для граничного навантаження без урахування ефектів поперечного зсуву і обчислення. У випадку ізотропного матеріалу ($\alpha^2 = 1$, $K_{1c} = \sqrt{2E\gamma_p}$) отримані результати співпадають із відповідним розв'язком В.В.Панасюка і Б.Л.Лозового [2], виведеного на основі рівнянь плоскої задачі теорії пружності.

Висновки. Аналіз результатів обчислень дозволяє зробити висновок, що на величину максимальних за модулем напружень на верхній та нижній гранях смуги розмір тріщини та відстань її вістря до точки визначення напруження впливають більшим чином, аніж анізотропія матеріалу. Поширення тріщин вглиб смуги, тобто збільшення її розмірів, веде до різкого зростання напружень в крайніх волокнах смуги, близьких до вістря тріщини. Разом з тим, на верхній грані ($\gamma = -h$) смуги спостерігається навіть деяке зменшення максимальних стискуючих напружень, що можливо, пов'язане із зміщенням нейтральної лінії смуги, а разом з нею її паралельним зміщенням самої епюри напружень. Крім того, починаючи з деякої величини тріщини, напруження в ізотропній смугі стають більшими від аналогічних напружень ортотропної смуги. Тобто, починаючи з деякої величини тріщини, ізотропний матеріал може почати руйнуватись скоріше від ортотропного.

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во "Наука". 1966.– 708 с.
2. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов.-К.: Наук.думка, 1991. – 146 с.
3. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит.— Минск: Изд-во Белорусь. гос. ун-та, 1975. – 256 с.
4. Прусов И.А., Шваб'юк В.И. Изгиб полубесконечной плиты, частично защемленной, частично шарнирно опертой //Сопrotивление материалов и теория сооружений. К.: Будівельник, 1970. В.12.– С. 69-75.
5. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 - х томах. Пер. с англ./ Под ред. Ю. Мураками.- М.: Мир. 1990. – 1016 с.
6. Шваб'юк В.И. К теории изгиба коротких трансверсально-изотропных балок. //Расчет пространственных строительных конструкций. Куйбышев: КуИСИ, 1981. В.9. – С.86-91.
7. Шваб'юк В.І. Комплексне подання уточнених рівнянь згину ортотропних пластин з тріщинами. // Машинознавство. Львів: 1999. № 4. – С.51-55.
8. Божидарник В.В., Садівський В.М., Шваб'юк В.І. Антиплоска деформація нелінійного тіла з розширенням жорстким включенням // Вісн.держ.ун-ту «Львівська політехніка». 1993. Вип. 271.– С. 10-12.

Стаття прийнята до друку 29.04.2015.