

УДК 532.72:532.4:519.63

О.М. Степанченко

КІНЕМАТИЧНІ ГРАНИЧНІ УМОВИ В ЗАДАЧАХ РОЗЧИНЕННЯ СОЛЬОВИХ ПЛАСТІВ

Виведено кінематичні граничні умови на межі фронту розчинення сольових пластів у одно- та двовимірному випадках. Такі умови є обов'язковими для забезпечення існування та єдності розв'язків крайових задач в областях з рухомими межами. Запропоновано точкову кінематичну граничну умову та обґрунтовано її застосування при чисельному розв'язуванні відповідних крайових задач Стефана-Верігіна.

Ключові слова: кінематичне гранична умова, розчинення, задача Стефана-Верігіна.

Рис. 2. Табл. 0. Літ. 21.

О.Н. Степанченко

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ РАСТВОРЕНИЯ СОЛЕВЫХ ПЛАСТОВ

Выведены кинематические граничные условия на границе фронта растворения солевых пластов в одно- и двухмерном случаях. Эти условия обязательны для обеспечения существования и единственности решения краевых задач в областях с подвижными границами. Предложено точечное кинематическое граничное условие и обосновано его использование в численных методах решения краевых задач Стефана-Веригина.

Ключевые слова: кинематические граничные условия, растворение, задача Стефана-Веригина.

O.M. Stepanchenko

KINEMATIC BOUNDARY CONDITIONS IN PROBLEMS OF SALT LAYERS DISSOLUTION

The article considers the problem of salt layers dissolution. The task is associated with the safe operation of civil and industrial structures in the foundations of which there are medium- and easy-soluble salts from the construction point of view. Corresponding boundary-value problem belongs to the tasks of the Stefan type from the point of view of mathematical modeling and theory of mathematical physics equations. The scope of the problem solution is variable in time. Therefore, the kinematic boundary condition at the moving front of dissolution should be taken into account for a correct formulation of such problems in their (tasks). The subject of this article is the removal of such conditions of salt layers dissolution. The kinematic conditions at one - and two-dimensional cases are obtained. Their (conditions) are derived on the basis of the law of mass conservation of the dissolved substances and balance of the flow of these substances from the salt formation. This condition contains the line integral along the contour of the dissolution front in the two-dimensional case. Non- isothermal conditions are taken into account. The expediency of recording conditions in state of non- integral form but in the point one, for its use in numerical methods has been explained.

Keywords: kinematic boundary condition, dissolution, Stefan-Verigin problem.

Вступ. Задача розчинення сольових пластів з технічної точки зору пов'язана з безпекою експлуатації цивільних та промислових споруд і є об'єктом математичного моделювання з середини 20-го століття [1-12]. З точки зору математики її математична модель відноситься до так званих крайових задач Стефанівського типу [13-15]. Їх характерними особливостями є змінність в часі області, в якій шукається розв'язок задачі, а також наявність кінематичних граничних умов на рухомих межах. Наявність таких умов пов'язана з питаннями коректності задач вказаного типу [16]. Ціллю цієї статті є виведення таких умов в задачах розчинення сольових пластів в умовах впливу техногенних факторів.

Використані позначення в статті. З метою спрощення та скорочення подальших викладок відразу наведемо список основних використаних позначень: $\vec{V} = \{v_x, v_y\}$ – вектор швидкості фільтрації, який включає напірну та осмотичну фільтрацію; $\mathbf{K}(c, T)$ – тензор коефіцієнтів фільтрації, які залежать від концентрації розчиненої речовини та температури; $h = \frac{p}{\rho g} \pm y$ – гідростатичний напір (знак '+' відповідає напрямку осі OY вгору, а '-' – вниз); p – тиск; ρ – густина порової рідини; ρ_B – густина розчинної речовини в твердій фазі; σ – пористість середовища; \mathcal{G} – масова (об'ємна) частка розчинної речовини в твердому тілі; g – прискорення вільного падіння; $\mathbf{D}(c, T)$, $\mathbf{D}_T(c, T)$ – тензори коефіцієнтів дифузії та термодифузії відповідно, які залежать від концентрації розчиненої речовини та температури; $c(x, y, t)$ і $N(x, y, t)$ – масові концентрації розчинної речовини (солі) в точці (x, y) в момент часу t відповідно в рідкій і в

твердій фазах; C_m і N_m – масові концентрації речовини в рідкій і твердій фазах в умовах рівноваги; $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ – константи, які характеризують швидкість масообміну і залежать від температури; $\lambda(c, T)$ – тензор коефіцієнтів теплопровідності, які залежать від концентрації розчиненої речовини та температури; $T(x, y, t)$ – температура ґрунту в точці (x, y) в момент часу t ; C_p – питома теплоємність порового розчину; C_T – об’ємна теплоємність ґрунту.

Кінематична гранична умова в одновимірному випадку. Виведемо кінематичну умову для рухомої межі фронту розчинення пласта солі в одновимірному випадку з врахуванням дифузійного розчинення і осмосу.

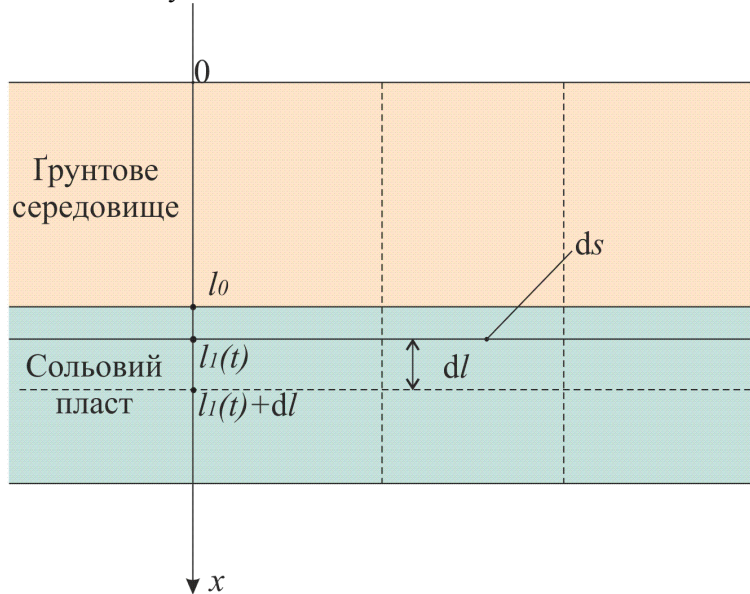


Рис. 1. Рух межі розчинення пласта солі в одновимірному випадку

Нехай в деякий момент часу t фронт межі розчинення має координату $l_1(t)$, а в момент часу $(t + dt)$ – координату $l_1(t) + dl$ (рис. 1). Визначимо масу солі dm_c , яка за час dt внаслідок молекулярної дифузії і осмосу, пройшла через поверхню ds

$$dm_c = \left[-D(c) \frac{\partial(\rho c)}{\partial x} - v(c) \frac{\partial(\rho c)}{\partial x} \right] ds dt. \quad (1)$$

З іншого боку вона рівна масі розчиненої солі, яка містилась в об’ємі $ds \cdot dl$.

Нехай об’ємна частка солі в породі пласта становить \mathcal{G} :

$$\mathcal{G} = \frac{V_c}{V_T},$$

де V_T – об’єм породи; V_N – об’єм сольових включень в породі об’ємом V_T , тоді

$$dm_c = \rho_B dV_c = (1 - \sigma) \mathcal{G} \rho_B dV = (1 - \sigma) \mathcal{G} \rho_B ds dl, \quad (2)$$

де ρ_B – густина сольових включень.

Прирівнявши (1) і (2) і проінтегрувавши по поверхні межі фронту розчинення, одержимо

$$\frac{dl}{dt} = - \frac{1}{\int_A (1 - \sigma) \mathcal{G} \rho_B ds} \int_A [D(c) + v(c)] \frac{\partial(\rho c)}{\partial x} ds, \quad x \in l(t), \quad t > 0.$$

Оскільки біля поверхні розчинення концентрація розчину близька до максимальної, то густину порового розчину можна вважати близькою до густини насиченого розчину і сталою величиною. Якщо інші величини не залежать від параметру s , то формула руху межі фронту розчинення (кінематична умова) набере вигляду

$$\frac{dl}{dt} = - \frac{\rho}{(1 - \sigma) \mathcal{G} \rho_B} (D(c) + v(c)) \frac{\partial(c)}{\partial x}, \quad x \in l(t), \quad t > 0.$$

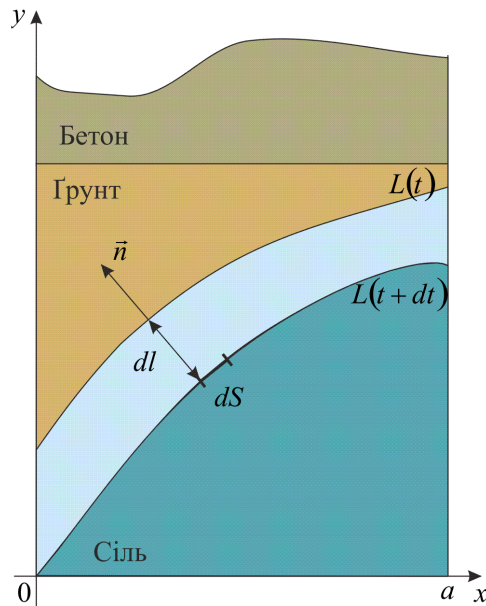


Рис. 2. Рух межі розчинення пласта солі в двовимірному випадку

Двовимірний випадок. Розглянемо кінематичну умову для рухомої межі фронту розчинення пласта солі в двовимірному випадку. Нехай поверхня розчинення пласта солі в площині (x, y) в момент часу t відображена лінією $L(t)$, а в момент часу $t + dt$ лінією $L(t + dt)$ (рис. 2).

Зміщення фронту розчинення за час dt становить dl . Виберемо зовнішню нормаль до поверхні \vec{n} і елемент довжини лінії ds . Нехай рівняння лінії межі розчинення задане в параметричній формі

$$\begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \end{cases} \quad 0 \leq s \leq s_0; t \geq 0,$$

і густина потоку розчиненої речовини рівна \vec{q} . Тоді маса речовини, яка перетнула межу розчинення $L(t)$ за час dt рівна

$$dm = \left[z \cdot \int_0^{s_0} (\vec{q} \cdot \vec{n}) ds \right] dt.$$

Тут z - протяжність пласта солі в перпендикулярному до площини (x, y) напрямку. Маса речовини, яка розчинилась з пласта солі товщиною dl за час dt рівна

$$dm = \left[z \cdot \int_0^{s_0} (1 - \sigma) \mathcal{G} \cdot \rho_B \cdot ds \right] dl,$$

де \mathcal{G} - масова частка солі в пласті породи, ρ_B - густина солі.

Прирівнявши ці вирази, одержимо формулу швидкості зміщення поверхні розчинення пласта солі

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\int_0^{s_0} (\vec{q} \cdot \vec{n}) ds}{\int_0^{s_0} (1 - \sigma) \mathcal{G} \cdot \rho_B \cdot ds}. \quad (3)$$

Якщо рівняння лінії $L(t)$ задане в явному вигляді $y = y(x, t)$, то формула швидкості руху межі розчинення набере вигляду

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\int_0^a (\vec{q} \cdot \vec{n}) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{\int_0^a (1 - \sigma) \vartheta \cdot \rho_B \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}. \quad (4)$$

Запишемо рівняння густини потоку маси розчиненої речовини

$$\vec{q} = (-D(c)\vec{\nabla}(\rho c) + \rho\vec{V}c). \quad (5)$$

Підставивши (5) в (4), одержимо кінематичну умову на межі фронту розчинення

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\int_0^a (-D(c)\vec{\nabla}(\rho c) + \rho\vec{V}c) \cdot \vec{n} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{\int_0^a (1 - \sigma) \vartheta \cdot \rho_B \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}, \quad (x, y) \in L(x, y, t), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Біля поверхні розчинення густина розчину ρ близька до густини насиченого розчину. Тому величини ρ , ρ_B і ϑ можна вважати сталими, тоді формула (6) набере вигляду

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\rho}{(1 - \sigma)\vartheta\rho_B} \cdot \frac{\int_0^a (-D(c)\vec{\nabla}c + \vec{V}c) \cdot \vec{n} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}, \quad (x, y) \in L(x, y, t), \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Випадок неізотермічних умов. Рівняння густини потоку маси розчиненої речовини в неізотермічних умовах визначається молекулярною та конвективною дифузією, осмосом, і термодифузією

$$\vec{q} = (-D(c)\vec{\nabla}(\rho c) - v(c)\vec{\nabla}(\rho c) - \rho D_T \vec{\nabla}T + \rho\vec{V}c). \quad (8)$$

Підставивши (8) в (3), одержимо граничну кінематичну умову на межі фронту розчинення

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\int_0^a ((-D(c) - v(c))\vec{\nabla}(\rho c) - \rho D_T \vec{\nabla}T + \rho\vec{V}c) \cdot \vec{n} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{\int_0^a (1 - \sigma) \vartheta \cdot \rho_B \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}, \quad (x, y) \in L(x, y, t), \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Оскільки біля поверхні розчинення концентрація розчину ρ близька до густини насиченого розчину, то величини ρ , ρ_B і ϑ можна вважати сталими. Тоді формула (4) набере вигляду:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\rho}{(1 - \sigma)\vartheta\rho_B} \cdot \frac{\int_0^a ((-D(c) - v(c))\vec{\nabla}c - D_T \vec{\nabla}T + \vec{V}c) \cdot \vec{n} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}, \quad (x, y) \in L(x, y, t), \quad t \geq 0. \quad (10)$$

Точкові кінематичні граничні умови. Математичні моделі досліджуваних процесів як правило описуються нелінійними крайовими задачами. Тому для їх розв'язання застосовують чисельні методи [17-20]. Виведена умова (10) є інтегральною, а тому не завжди зручною в чисельних розрахунках. Огляд алгоритмів визначення положення рухомих меж при наближеному розв'язуванні відповідних крайових задач наведено в [21]. Якщо припустити, що кривизна рухомої межі мало змінюється і сольовий пласт є однорідним, то з (10) маємо

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\rho}{(1 - \sigma)\vartheta\rho_B} \cdot ((-D(c) - v(c))\vec{\nabla}c - D_T \vec{\nabla}T + \vec{V}c) \cdot \vec{n}, \quad (x, y) \in L(x, y, t), \quad t \geq 0.$$

Вказана умова описує рух точок рухомої межі вздовж зовнішньої нормалі до неї. Тому відповідно до цієї умови можна легко визначити зміщення вузлів розрахункових сіток в методах скінченних різниць, скінченних елементів або радіальних базисних функцій вздовж зовнішньої нормалі до межі.

Висновки. Отже, в статті виведено кінематичні граничні умови на рухомих межах фронтів розчинення сольових пластів в одно-та двовимірному випадках. Наявність таких умов стосується, з теоретичної точки зору, встановлення коректності відповідних крайових задач, а з практичної точки зору – алгоритмів ідентифікації положення вільної рухомої межі в наближених методах. Подальші напрямки роботи автора будуть стосуватись обох напрямків.

1. Веригин Н. Н. Диффузия у поверхности твёрдого тела, находящегося в жидкости / Н. Н. Веригин // Журн. физ. химии. – 1958. – Вып. 32, № 9. – С. 2097-2106.
2. Веригин Н. Н. Основы теории растворения и вымыва солей при фильтрации воды в горных породах и грунтах / Н. Н. Веригин // Инженерно- геологические свойства горных пород и методы их изучения / Н. Н. Веригин. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – С. 59-70.
3. Веригин Н. Н. Растворение и вынос солей в основаниях гидротехнических сооружений / Н. Н. Веригин, Б. С. Шержуков // Труды координац. совещаний по гидротехнике. – Л. : ВНИИГ, 1970. – Вып. 48. – С 263-277.
4. Веригин Н. Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н. Н. Веригин, Б. С. Шержуков // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). – М. : Наука, 1969. – С. 237-313.
5. Веригин Н. Н. Конвективная диффузия и массообмен при фильтрации растворов в пористой среде / Н. Н. Веригин, В. С. Саркисян // Гидрогеол. исслед. водозаборн., водопонизительн. и дренажн. систем. –М. : 1980. – С. 19-24.
6. Власюк А. П. Чисельне розв'язання задачі розчинення і винесення пластових солей з основи гідротехнічних споруд / А. П. Власюк // Доп. НАН України. – 1995. – №8. – С. 37-39.
7. Власюк А. П. Чисельне розв'язання однієї задачі класу Стефана-Веригіна / А. П. Власюк // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев, 1994. – С. 45-46.
8. Лаврик В. И. Решение задач массопереноса водорастворимых веществ в случае зависимости коэффициента конвективной диффузии от скорости фильтрации / В. И. Лаврик // Некоторые задачи массопереноса при фильтрации подземных вод. – Киев, 1981. – С. 3-24. (Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 81.18).
9. Лаврик В. И. Аналитическое и численно-аналитическое решение двумерных краевых задач конвективной диффузии растворимых веществ при фильтрации подземных вод / В. И. Лаврик, А. Ф. Милютин. – Киев, 1978. – 56 с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 78.24).
10. Лаврик В. И. Численно-аналитическое решение краевых задач конвективной диффузии солей, залегающих в фильтрационных потоках в виде включений / В. И. Лаврик, А. Ф. Милютин // Математические методы исследования физических полей. –К.: 1980. – С. 3-10.
11. Saetta A. V. 2d model for carbonation and moisture-heat flow in porous materials. / A. V. Saetta, B. A. Schrefler, R. V. Vitaliani // Cem. Concr. Res. -1995. – 25. - Pp. 1703-1712.
12. Steffens A. Modeling carbonation for corrosion risk prediction of concrete structures / A. Steffens, D. Dinkler, H. Ahrens // Cem. Concr. Res. – 2002. – 32. - Pp. 935-941.
13. Митропольский Ю. А. Задачи со свободными границами для нелинейного эволюционного уравнения в проблемах металлургии, медицины, экологии / Ю. А. Митропольский, А. А. Березовский, Т. А. Плотноцкий // Укр. матем. журнал. – 1992. – Т. 44, №1. – С. 67-76.
14. Данилюк И. И. О задаче Стефана / И. И. Данилюк // Успехи математических наук. – 1985. – Т. 40, №5. – С. 133-185.
15. Бородин М. А. Задача Стефана / М. А. Бородин // Укр. матем. вісник. - 2011. - Т. 8, №1. – С. 17–54.
16. Martynuk P. M. Existence and uniqueness of a solution of the problem with free boundary in the theory of filtration consolidation of soils with regard for the influence of technogenic factors / P. M. Martynuk // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. - Vol. 207, No. 1. – P. 59-73.
17. Власюк А. П. Чисельний розв'язок однієї задачі розчинення пласта солі / А. П. Власюк, О. М. Степанченко, С. В. Татевський // Вісн. Укр. держ. університету водного господарства і природокористування. - 2004. – Вип. 2(26). – С. 399-405.
18. Власюк А. П. Математичне моделювання процесу корозії бетонного фундаменту гідротехнічної споруди / А. П. Власюк, О. М. Степанченко // Вісник Хмельницького національного університету. Серія: технічні науки. – 2005. – Т. 2. Частина 1. – С. 46-52.
19. Власюк А. П. Чисельне розв'язування однієї нелінійної задачі розчинення пласта солі / А. П. Власюк, О. М. Степанченко // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 142-150.
20. Власюк А. П. Про деякі нові математичні моделі задач розчинення гірських порід / А. П. Власюк, О. М. Степанченко // Вісн. національного університету водного господарства і природокористування. – 2006. – Вип. 4. (36). Частина 2. – С. 49 – 55.
21. Бурого Н. Г. Обзор контактных алгоритмов / Н. Г. Бурого, В. Н. Кукуджанов // Известия РАН, МТТ. – 2005. - No. 1. - С. 45-87.

Стаття надійшла до редакції 20.09.2015.