

УДК 539.3

Ю.В.Човнюк^{1,2}, Г.А. Герасимчук³, Ю.О.Гуменюк¹¹Національний університет біоресурсів і природокористування України²Київський національний університет будівництва і архітектури³Луцький національний технічний університет

АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ МАЯТНИКОВОГО АНТИВІБРАТОРА З БІФІЛЯРНИМ ПІДВІСОМ МАЯТНИКА

У статті обґрунтований аналітичний підхід до аналізу нелінійних коливань маятникового антивібратора з біфілярним підвісом маятника. Основні характеристики нелінійних коливань маятника, як і закон його руху, отримані із залученням функцій Якобі. Обґрунтована фізико-механічна та математична модель нелінійних коливань маятникового антивібратора з біфілярним підвісом маятника. Знайдені аналітичні вирази для закону руху $\varphi_M(t)$ кута відхилення самого маятника від часу t у межах еліптичного інтегралу першого роду (повного) та за допомогою еліптичних функцій Якобі.

Встановлені енергетичні межі існування коливних та обертальних рухів маятника, а також сепаратрисний розв'язок, що відділяє ці рухи один від одного.

Ключові слова: аналіз, нелінійність, коливання, маятниковий антивібратор, біфілярний підвіс, маятник.

Човнюк Ю.В., Герасимчук Г.А., Гуменюк Ю.О.

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКОВОГО АНТИВИБРАТОРА С БИФИЛЯРНЫМ ПОДВЕСОМ МАЯТНИКА.

В статье обоснован аналитический подход к анализу нелинейных колебаний маятникового антивибратора с бифилярным подвесом маятника. Основные характеристики нелинейных колебаний маятника, как и закон его движения, полученные с привлечением функций Якоби. Обоснована физико-механическая и математическая модель нелинейных колебаний маятникового антивибратора с бифилярной подвесом маятника. Найденны аналитические выражения для закона движения угла отклонения самого маятника от времени в пределах эллиптического интеграла первого рода (полного) и с помощью эллиптических функций Якоби.

Установленные энергетические границы существования колеблющихся и вращательных движений маятника, а также сепаратрисное решение, отделяет эти движения друг от друга.

Ключевые слова: анализ, нелинейность, колебания, маятниковый антивибратор, бифилярный подвес, маятник.

Chovnyuk YU., Herasymchuk H., Humenyuk YU.

AN ANALYSIS OF NONLINEAR VIBRATIONS OF THE PENDULUM ANTIVIBRATOR IS WITH BIFILAR SUSPENSION OF PENDULUM.

The basis of this research was substantiation of analytical approach to the analysis of nonlinear oscillations of the pendulum antivibrator with bifilar suspension of pendulum. The main characteristics of nonlinear oscillations of the pendulum, as the law of motion were obtained with the assistance of the Jacobi functions.

In the article Substantiated physical and mechanical and mathematical model of nonlinear oscillations of a pendulum antivibrator with bifilar pendulum suspension. Found analytical expressions for the law of motion $\varphi_M(t)$ the angle of deflection of the pendulum with time t within the elliptic integral of the first kind (full) and with the help of the Jacobi elliptic functions.

Set energy boundaries of the existence of oscillating and rotational motions of the pendulum, and the separatrix solution that separates the traffic from each other.

Key words: analysis, nonlinearity, oscillation, pendulum antivibrator, bifilar suspension, pendulum.

Актуальність питання. Маятниковим антивібратором зазвичай називають пристрій, власна частота якого змінюється разом з частотою вимушених моментів так, що обидві частини завжди дорівнюють одна одній. Маятниковий антивібратор застосовується у обертальних системах, які здійснюють крутильні коливання. Оскільки маятникові антивібратори є доволі ефективними пристроями, був розроблений ряд конструкцій, які допускають їх налаштування на гармоніки вищих порядків при порівняно великій масі маятника.

Сучасні маятникові антивібратори з конструктивної точки зору можуть мати три види принципів схем: внутрішній ролик (рис.1, а), зовнішній ролик (рис.1, б), та біфілярний підвіс (рис.1, в). найбільшого розповсюдження на практиці отримала саме третя схема з однаковими отворами у маятнику і у маточині (диску). У цьому випадку маятник еквівалентний математичному і його довжина може бути зроблена наскільки завгодно малою. Теорія лінійних коливань маятникового антивібратора з біфілярним підвісом маятник при однакових діаметрах отворів у маятнику і маточині загальновідома [1]. Проте авторам даного дослідження невідомі роботи, присвячені теоретичному аналізу нелінійних коливань у подібних системах.

Аналіз результатів за темою дослідження. Методи теоретичного дослідження коливань маятнікового антивібратора збіфілярним підвісом маятника при однакових діаметрах отворів у маятник та маточині викладені в [1]. Аналіз подібних систем у нелінійній постановці не здійснювався.

Мета роботи полягає у обґрунтуванні аналітичного підходу до аналізу нелінійних коливань маятнікового антивібратора з біфілярним підвісом маятника. Для здійснення вказаного аналізу будуть використані еліптичні функції Якобі [2 - 11].

Виклад основного змісту дослідження. Нехай на рівномірне обертання багатомасової системи накладаються круті коливання (рис. 2) Нехай до r -ї маси системи приєднаний маятніковий антивібратор на біфілярному підвісі. Виділимо r -у масу системи з антивібратором і складемо диференціальні рівняння руху цієї системи: r -а маса системи – маса антивібратора; виділена система має два ступеня вільності руху, оскільки зв'язки допускають незалежні рухи маятника і маточини.

Якщо при рівних отворах у маточині й маятнику і при однакових діаметрах роликів знехтувати ковзанням роликів, тоді відносний рух маятника можна вважати поступальним.

При переміщенні маятника відносно маточини пряма $OABCS$ (рис.1, в) отримає згин у точках A та C , а відрізок залишиться паралельним відріzkу OA (рис.3). Відрізок ABC залишиться прямолінійним. Диференціальне рівняння складається у формі Лагранжа.

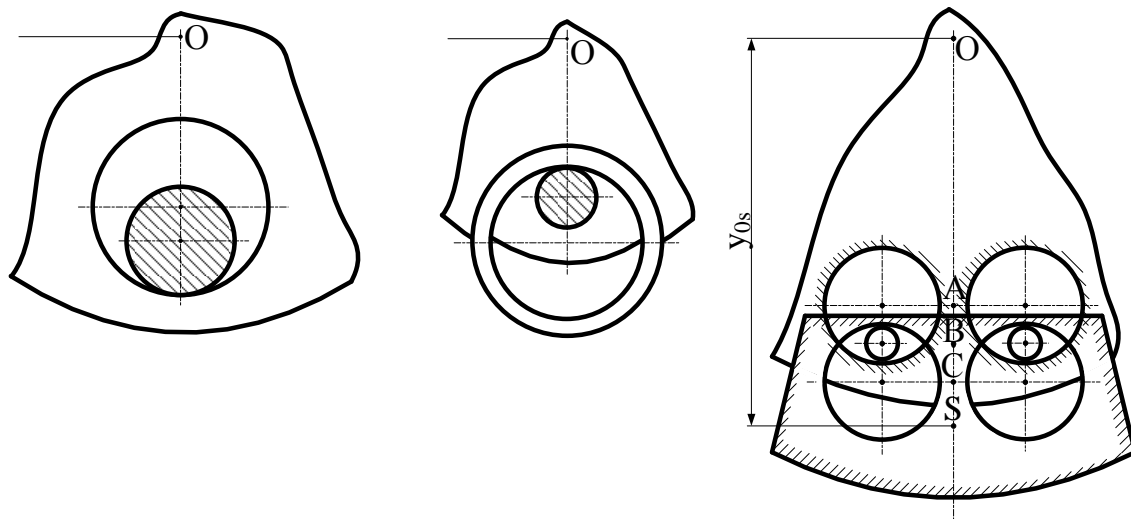


Рис.1. Принципові схеми сучасних маятнікових антивібраторів: а- внутрішній ролик, б- зовнішній ролик, в - біфілярний підвіс

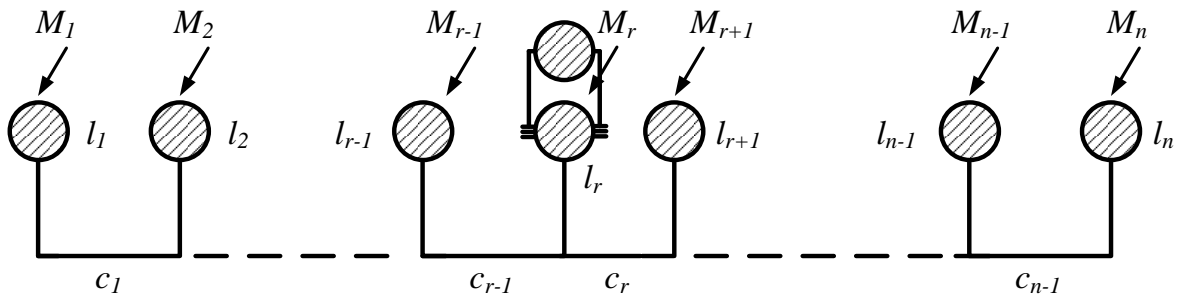


Рис. 2. Розрахункова схема багатомасової системи, що рівномірно обертається з накладеними крутими коливаннями

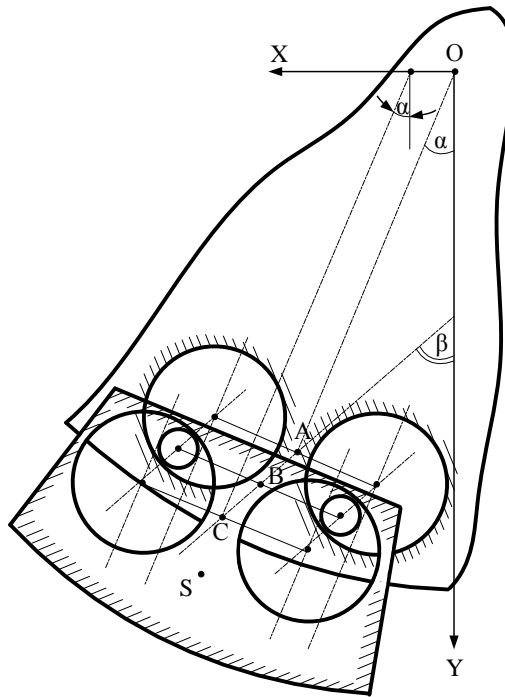


Рис.3. Розрахункова схема антивібратора з біфілярним підвісом маятника
У якості узагальнених координат приймаємо кути:

$$\begin{cases} \alpha = \omega t + \varphi_r \\ \beta = \omega t + \varphi_M \end{cases} \quad (1)$$

де $\omega = const$ – кутова швидкість системи; φ_r і φ_M – кути, які визначають рух r -ї маси системи і маятника при крутих коливаннях.

При складанні виразу кінетичної енергії системи слід мати на увазі те, що кут повороту маятничкової маси дорівнює куту повороту маси системи.

Позначимо: I_r – момент інерції r -ї маси системи; I_M – момент інерції маятника відносно осі, яка проходить через його центр мас S ; l_1 – відрізок OA ; l – відрізки $AB = BC$; l_2 – відрізок CS ; v_s – швидкість центра мас маятника.

Кінетична енергія r -ї маси системи:

$$T_1 = \frac{I_r \dot{\alpha}^2}{2}, \quad \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}, \quad (2)$$

де t – час.

Кінетична енергія маятника:

$$T_2 = \frac{I_M \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{M v_s^2}{2}, \quad (3)$$

де M – маса маятника.

Координати x_s, y_s центра мас маятника виражаються через узагальнені координати таким чином:

$$\begin{cases} x_s = (l_1 + l_2) \sin \alpha + 2l \sin \beta, \\ y_s = (l_1 + l_2) \cos \alpha + 2l \cos \beta. \end{cases} \quad (4)$$

Проекції швидкостей центра мас рівні:

$$\begin{cases} \dot{x}_s = (l_1 + l_2) \dot{\alpha} \cos \alpha + 2l \dot{\beta} \cos \beta, \\ \dot{y}_s = -(l_1 + l_2) \dot{\alpha} \sin \alpha - 2l \dot{\beta} \sin \beta, \end{cases} \quad (5)$$

і, відповідно, швидкість центра мас виражається таким чином:

$$v_s^2 = (l_1 + l_2)^2 \dot{\alpha}^2 + 4l^2 \dot{\beta}^2 + 4(l_1 + l_2)l \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta). \quad (6)$$

Підставляючи (6) в (3) і складаючи разом (2) та (3), отримаємо кінетичну енергію системи, що розглядається у вигляді:

$$2T = [I_r + I_M + M(l_1 + l_2)^2] \dot{\alpha}^2 + 4Ml^2 \dot{\beta}^2 + 4M(l_1 + l_2)l \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \quad (7)$$

або, підставляючи (1), матимемо:

$$2T = [I_r + I_M + M(l_1 + l_2)^2](\omega + \dot{\varphi}_r)^2 + 4Ml^2(\omega + \dot{\varphi}_M)^2 + 4M(l_1 + l_2) \times \\ \times l(\omega + \dot{\varphi}_r)(\omega + \dot{\varphi}_M) \cos(\varphi_r - \varphi_M). \quad (8)$$

Рівняння Лагранжа мають вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_r} = Q_r, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_M} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_M} = Q_M. \quad (9)$$

У (9) Q_r – узагальнена сила, що діє по узагальненій координаті φ_r , а Q_M – по координаті φ_M . Для Q_r маємо:

$$Q_r = M_r - C_r(\varphi_r - \varphi_{r+1}) - C_{r-1}(\varphi_r - \varphi_{r-1}), \quad (10)$$

де $M_r = M_{or} \sin(k\omega t + \gamma_r)$ – гармонічний момент k -го порядку, діючий на r -у масу; $C_r(\varphi_r - \varphi_{r+1})$ і $C_{r-1}(\varphi_r - \varphi_{r-1})$ – пружні моменти ділянок, що лежать зліва та справа від r -ї маси. Узагальнена сила, що відповідає координаті φ_M , дорівнює нулю.

Рівняння Лагранжа для нашої системи мають вид:

$$\begin{cases} [I_r + I_M + M(l_1 + l_2)^2] \ddot{\varphi}_r + 2M(l_1 + l_2)l \ddot{\varphi}_M \cos(\varphi_r - \varphi_M) + 2M(l_1 + l_2)l \times \\ \times (\omega + \dot{\varphi}_r)^2 (\omega + \dot{\varphi}_M)^2 (\omega + \dot{\varphi}_M)^2 \sin(\varphi_r - \varphi_M) = Q_r; \\ 2l \ddot{\varphi}_M + (l_1 + l_2) \ddot{\varphi}_r \cos(\varphi_r - \varphi_M) - (l_1 + l_2)(\omega + \dot{\varphi}_r)^2 \sin(\varphi_r - \varphi_M) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

У роботі [1] після лінеаризації системи (11) отриманий наступний зв'язок між φ_r і φ_M :

$$\frac{\varphi_r}{\varphi_M} = \frac{(l_1 + l_2) - 2l k^2}{(l_1 + l_2)(1 + k^2)}. \quad (12)$$

Ми розглядаємо вимушені коливання без опорів під дією гармонічних вимушених моментів; тому узагальнені координати змінюються за гармонічним законом із частотою, що дорівнює частоті $k\omega$ вимушених моментів, і, відповідно, другі похідні від цих координат виражаються через самі координати так: $\ddot{\varphi}_r = k^2 \omega^2 \varphi_r (-1)$, $\ddot{\varphi}_M = k^2 \omega^2 \varphi_M (-1)$. Використовуючи (12), друге рівняння системи (11) для маятника (його кута φ_M) можна подати наступним чином:

$$\left\{ 2l + \frac{[(l_1 + l_2) - 2l k^2]}{(1 + k^2)} \cos(\varphi_r - \varphi_M) \right\} \ddot{\varphi}_M - (l_1 + l_2) \left(\omega + \dot{\varphi}_M \frac{[(l_1 + l_2) - 2l k^2]}{(l_1 + l_2)(1 + k^2)} \right)^2 \sin(\varphi_r - \varphi_M) = 0. \quad (13)$$

У [1] після лінеаризації системи (11) показано, що у першому рівнянні цієї системи замість моменту інерції I_r виникає еквівалентний момент інерції \tilde{I}_r :

$$\tilde{I}_r = I_r + I_M + \frac{M(l_1 + l_2 + 2l)^2 \frac{(l_1 + l_2)}{2l}}{\left(\frac{l_1 + l_2}{2l} \right) - k^2}. \quad (14)$$

Якщо проаналізувати вираз (14) тоді видно, що диференціальному рівнянню руху r -ї маси системи, до якої приєднаний антивібратор, можна надати нормальний вид, якщо замість I_r ввести \tilde{I}_r (т.з. еквівалентний момент інерції):

$$\tilde{I}_r \ddot{\varphi}_r + C_r(\varphi_r - \varphi_{r+1}) + C_{r-1}(\varphi_r - \varphi_{r-1}) = M_{or} \sin(k\omega t + \gamma_r). \quad (15)$$

Вираз для \tilde{I}_r (14) показує, що при обраних параметрах маятникового антивібратора значення еквівалентного моменту (\tilde{I}_r) інерції залежить від порядку k вимушених моментів. І, навпаки, якщо система здійснює вимушені коливання під дією моменту k -го порядку, то, змінюючи параметри маятникового антивібратора, можна змінювати значення еквівалентного моменту інерції. Цим можна скористатись для якісного пливу на вихідну систему. Відомо, що кожному значенню моменту інерції r -ї маси системи відповідає певне значення власних частот коливань.

Якщо параметри маятникового антивібратора підібрати так, щоб еквівалентний момент інерції відрізнявся від моменту інерції r -ї маси, до якої приєднаний антивібратор, тоді власні частоти системи з приєднаним антивібратором будуть відрізнятися від власних частот вихідної системи, причому ця відмінність буде тим більше, чим сильніше нерівність $I_r \neq \tilde{I}_r$.

Якщо параметри антивібратора підібрати таким чином, щоб:

$$\frac{l_1 + l_2}{2l} = k^2, \quad (16)$$

тоді еквівалентний момент інерції стає рівним нескінченності і ефект впливу антивібратора на систему буде максимальним.

При виконанні умови (16) рівняння (13) набуває вигляду:

$$0 = 2l \ddot{\varphi}_M + (l_1 + l_2) \omega^2 \sin \varphi_M, \varphi_r = 0. \quad (17)$$

Отже, для коливань маятника антивібратора маємо наступне рівняння:

$$\ddot{\varphi}_M + \Omega_0^2 \sin \varphi_M = 0, \quad (18)$$

де

$$\Omega_0^2 = \frac{\omega^2(l_1 + l_2)}{2l} = \omega^2 k^2, \quad \Omega = \omega k. \quad (19)$$

Проведемо дослідження рівняння (18) методом розвинутих у [11].

Введемо позначення E для повної енергії маятника:

$$E = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_M)^2 + \Omega_0^2 (1 - \cos \varphi_M). \quad (20)$$

Тоді, розв'язок (18) можна подати у квадратурах. При цьому після заміни $z = \sin\left(\frac{\varphi_M}{2}\right)$ залежність $t(z) = t$ виражається через еліптичний інтеграл першого роду. У якості еліптичного модуля χ приймаємо $\sqrt{E/(2\Omega_0^2)}$ чи $\sqrt{(2\Omega_0^2)/E}$ в залежності від співвідношення E та $2\Omega_0^2$:

$$1) E < 2\Omega_0^2 \rightarrow \chi = \sqrt{E/(2\Omega_0^2)}; \quad (21)$$

$$2) E > 2\Omega_0^2 \rightarrow \chi = \sqrt{(2\Omega_0^2)/E}.$$

Критичне значення енергії $E_0 = 2\Omega_0^2$ відповідає сепаратрисному розв'язку:

$$\varphi_M = -\pi + 4\arctg\{exp(\Omega_0 t)\}. \quad (22)$$

При $E < 2\Omega_0^2$ – маятник здійснює коливання, а при $E > 2\Omega_0^2$ – обертання.

Так, для малих енергій $E < E_0 = 2\Omega_0^2$ остаточний розв'язок для коливних рухів маятника має вид:

$$\varphi_M = 2 \arcsin\{\chi \operatorname{sn}(\Omega_0 t, \chi)\}, \quad \chi = \sqrt{E/E_0}, \quad (23)$$

де модуль χ визначає енергію (E) і частоту (Ω) коливаний маятника:

$$E = E_0\chi^2, \quad \Omega = \Omega_0\pi/(2\mathbb{K}), \quad (24)$$

де $\mathbb{K}(\chi)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду:

$$\mathbb{K}(\chi) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2\sin^2 x}} \equiv \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}}. \quad (25)$$

У (23) $\operatorname{sn}(u, \chi)$ – еліптичний синус (синус Якобі). Він визначається так: нехай еліптичний інтеграл першого роду $F(\varphi, \chi)$ виражається наступним чином:

$$F(\varphi, \chi) = \int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2\sin^2 x}} \equiv \int_0^{\sin \varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}}. \quad (26)$$

Введемо функцію $u(\varphi) = F(\varphi, \chi)$. Зворотна (обернена) функція $\varphi(u) = \operatorname{am}(u, \chi)$ представляє собою так звану еліптичну амплітуду. Існує низка тригонометричних функцій еліптичної амплітуди. Зокрема, еліптичний синус (синус Якобі) виражається так:

$$\operatorname{sn}(u, \chi) \equiv \sin\{\operatorname{am}(u, \chi)\}. \quad (27)$$

При великих енергіях $E > E_0 = 2\Omega_0^2$ виникає обертальний рух маятника, який описується функцією:

$$\varphi_M = 2 \arcsin\{\operatorname{sn}(\Omega_0 t/\tilde{\chi}, \tilde{\chi})\} \equiv 2\operatorname{am}(\Omega_0 t/\tilde{\chi}, \tilde{\chi}), \quad (28)$$

де $\tilde{\chi} = \sqrt{E_0/E}$, $\Omega/\Omega_0 = \frac{\pi}{2\tilde{\chi}\mathbb{K}}$.

Висновки.

1. Обґрунтована фізико-механічна та математична модель нелінійних коливаний маятникового антивібатора з біфілярним підвісом маятника.
2. Знайдені аналітичні вирази для закону руху $\varphi_M(t)$ кута відхилення самого маятника від часу t у межах еліптичного інтегралу першого роду (повного) та за допомогою функцій (еліптичних) Якобі.
3. Встановлені межі (енергетичні) існування коливних та обертальних рухів маятника, а також сепаратрисний розв'язок, що відділяє ці рухи один від одного.
4. Отримані у роботі результати можуть бути у подальшому використані для уточнення і вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку маятникових антивібаторів з біфілярним підвісом як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

Література

1. Штейнвольф Л.И. Динамические расчеты машин и механизмов. /Л.И. Штейнвольф.-М., К.:Машгиз, 1961.-340 с.
2. Андронов А.А. Теория колебаний./ А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин.- М.: Наука, 1981.-568 с.
3. Бакай А.С. Адиабатические инварианты/ А.С. Бакай, Ю.П. Степановский. – К.: Наукова думка, 1981. – 238с.
4. Блякьер О. Анализ нелинейных систем/ О.Блякьер.- М.: Мир, 1969. -400с.

5. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний/ Н.Н. Боголюбов, Ю.А.Митропольский. - М.: Физматгиз, 1963.-410с.
6. Ландау Л.Д. Механика./ Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука,1965.-203с.
7. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики/ Н.Н. Моисеев.- М.: Наука, 1969.-377с.
8. Найфэ А. Введение в методы возмущений/ А. Найфэ.- М.: Мир, 1984.- 535 с.
9. Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа/ Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. - М.: Физматгиз, 1963.- Ч.2.- 515с.
- 10.Янке Е. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы/ Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. М. Лёш.- М.: Наука, 1964.-344с.
- 11.Косевич А.М. Введение в нелинейную физическую механику/ А.М. Косевич, А.С. Ковалев.- К: Наукова думка, 1989. - 304 с.

Стаття надійшла до редакції 23.09.2015.