УДК 539.3

І.Ю. Габрусєва
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ШТАМПА ТА ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОГО ПІВПРОСТОРУ

Наведено розв'язок осесиметричної контактної задачі про тиск параболічного штампа на пружний ізотропний півпростір з урахуванням залишкових деформацій. Побудовано функції розподілу контактних напружень для граничної площини. Проаналізовано вплив параметрів поля залишкових деформацій на розподіл контактних напружень.

Ключові слова: *контактні напруження, залишкові деформації, параболічний штамп, ізотропний півпростір.*
Рис. 2. Форм. 23. Літ. 4.

И.Ю. Габрусева

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ШТАМПА И ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Приведено решение осесимметричной контактной задачи о давлении параболического штампа на упругое изотропное полупространство с учетом остаточных деформаций. Построены функции распределения контактных напряжений для предельной плоскости. Проанализировано влияние параметров поля остаточных деформаций на распределение контактных напряжений.

Ключевые слова: *контактные напряжения, остаточные деформации, параболический штамп, изотропное полупространство.*

I.Y. Habrusieva

CONTACT PROBLEM FOR PARABOLIC PUNCH AND PRELIMINARY STRESSED SEMI-SPACE

Calculating the strength of structural elements and mechanisms is one of the most important stages in the process of their design. As it is known [1], residual deformation is almost always available in the structural elements and machine parts. The nature of their appearance can be very different: irreversible deformation (plasticity, creep), structural changes in the material, changes of the aggregate state in some areas, mechanical, chemical and technological processes, etc. Resultant stress can cause fracture and accelerate some phase transitions, corrosion in particular.

To improve the accuracy of calculations the residual must be taken into account, which directly affect the state of bodies. Taking into account all the factors that affect the interaction of the body is one of the key problems to determine the stability, reliability and other characteristics. Therefore, consideration of residual stress in the study of contact interaction of elastic bodies is an important task.

Research problems investigations of the contact interaction of the preliminary stressed bodies in our country and abroad had appeared in the sufficient quantity only by the end of the last century. First of all it is due to the fact that the linear elasticity theory does not consider the residual stresses in bodies. In general, strict proper statement of such problems requires the use of system of the nonlinear elasticity theory, however, for the sufficiently large values of the initial stresses its linearized version can be referred to.

In the article the solution of axisymmetric contact problem of pressure a parabolic punch for an elastic isotropic half-space, taking into account preliminary stresses is described. Besides distribution function of contact stresses and displacements for the plane boundary of semi-space was created.

The authors have shown influence of residual stress on the distribution of contact stresses under the punch.

Key words: *contact stresses, residual deformations, parabolic punch, isotropic semi-space.*

Вступ. Розрахунок міцності елементів конструкцій та механізмів є одним з найважливіших етапів у процесі їх проектування. Для визначення міцності та витривалості контактуючих тіл необхідним є обчислення контактних напружень деформацій. Щоб мінімізувати похибку, необхідно враховувати максимальну кількість чинників, що впливають на їх взаємодію. Урахування залишкових деформацій, які безпосередньо впливають на контактні напруження, є одним із ключових факторів.

Аналіз останніх досліджень. Питанням взаємодії жорстких штампів та пружних тіл із наявними залишковими деформаціями займалося багато вчених, зокрема й вітчизняних. Контактні задачі для тіл із початковими напруженнями при конкретній формі пружного потенціалу розглядали Артюнян Н. Х., Александров В. М., Сметаніна Б. І., Філіпова Л. М. та інші. У загальному випадку постановка таких задач вимагає залучення апарату нелінійної теорії пружності, проте при досить великих початкових деформаціях можна обмежитися і її лінеаризованим варіантом. Фундаментальні результати лінеаризованої теорії пружності були одержані українським вченим, академіком НАН України проф. О.М. Гузем. Подальшого розвитку теорія контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями отримала у працях його учнів: С.Ю.

Бабича, В.Б. Рудницького, П.П. Григоренка, В.М. Назаренка, Ю.П. Глухова, А.О. Рамського, М.М. Діхтярука, О.М. Панасюка та інших вітчизняних і зарубіжних вчених.

Але, незважаючи на безперервне збільшення кількості досліджень, присвячених контактній взаємодії тіл з попередньо напруженим станом, що пояснюється їх актуальністю як для розвитку фундаментальних досліджень з контактної взаємодії тіл, так і для застосування у різноманітних галузях промисловості, задачі про тиск параболічних та кільцево-параболічних штампів на попередньо напружений півпростір або шар досі не були розв’язані в рамках лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл у загальному вигляді при довільній структурі пружного потенціалу.

Метою запропонованої роботи *є продемонструвати розроблену методику побудови розв’язків осесиметричних задач визначення напруженого стану в попередньо напруженому ізотропному півпросторі при контактній взаємодії із штампами складної конфігурації на прикладі параболічного штампа. Дослідити вплив залишкових деформацій на розподіл контактних напружень при контактній взаємодії штампа складної конфігурації з пружним півпростором.*

Постановка задачі. Розглянемо осесиметричну задачу про тиск жорсткого параболічного штампа на попередньо напружений півпростір. Штамп утворено обертанням навколо спільної осі однієї вітки параболи, що з’єднана у вершині із відрізком прямої, перпендикулярної до осі обертання. Вісь параболи паралельна до осі обертання, що співпадає з лінією дії сили P. Штамп втискується у півпростір з постійною силою P поступально, без обертання і тертя. Виберемо циліндричну систему координат $\left(0,\ r,\ \phi,\ z\right)$ так, щоб координатна площина $\left(r,\ 0,\ \phi\right)$ співпадала з граничною площиною півпростору, а вісь Oz – із лінією дії сили P (Рис. 1).

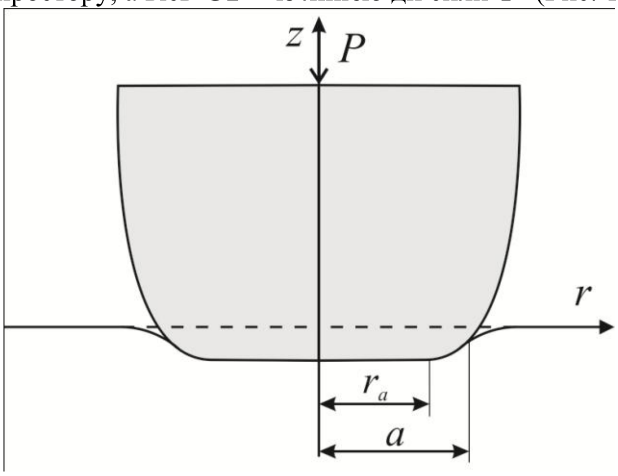

Рис. 1. **Схема контактної взаємодії**

Виходячи із формулювання задачі, можна описати функцію, обертанням графіка якої навколо осі Oz утворено штамп, у вигляді

$$W\left(r\right)=\begin{cases}0,\ 0<r<r_a;\\ \dfrac{1}{2R}\left(r-r_a\right)^2,\ r_a<r.\end{cases}$$

Будемо вважати залишкові напруження, що виникли у півпросторі, однорідними. Отже, згідно із [3], можна використати наступні вирази для компонентів тензора напружень (1) та вектора переміщень (2):

$$\sigma_{rz}\left(r,z\right)=\frac{c_{44}\left(1+m_1\right)}{\sqrt{n_1}}\int_0^\infty \alpha^3\left\{\left[A_1+A_2\left(s_0+\alpha z\right)\right]e^{\alpha z}+\right.$$
$$\left.+\left[B_1+B_2\left(s_0-\alpha z\right)\right]e^{-\alpha z}\right\}J_0\left(\alpha r\right)d\alpha;$$
(1)
$$\sigma_{zz}\left(r,z\right)=c_{44}\left(1+m_1\right)l_1\int_0^\infty \alpha^3\left\{\left[A_1+A_2\left(s+\alpha z\right)\right]e^{\alpha z}+\right.$$

$$+\left[B_1+B_2\left(s-\alpha z\right)\right]e^{-\alpha z}\Big\}J_0\left(\alpha r\right)d\alpha .$$

$$u_r\left(r,z\right)=-\int_0^{\infty}\alpha^2\left\{\left[A_1+A_2\left(1+\alpha z\right)\right]e^{\alpha z}+\left[B_1+B_2\left(1+\alpha z\right)\right]e^{-\alpha z}\right\}J_1\left(\alpha r\right)d\alpha ;$$

(2)

$$u_z\left(r,z\right)=\frac{m_1}{\sqrt{n_1}}\int_0^{\infty}\alpha^2\Big\{\left[A_1+A_2\left(s_1+\alpha z\right)\right]e^{\alpha z}+$$

$$+\left[B_1+B_2\left(s_1-\alpha z\right)\right]e^{-\alpha z}\Big\}J_0\left(\alpha r\right)d\alpha .$$

У співвідношеннях (1) та (2) константи c_{44}, m_1, n_1, l_1 залежать від характеру пружного потенціалу та підбираються у кожному окремому випадку відповідно до [3].

На граничній площині півпростору при $z=0$, ввівши позначення $F_1=A_1+B_1$, $F_2=A_2+B_2$, будемо мати:

$$\sigma_{rz}\left(r,0\right)=\frac{c_{44}\left(1+m_1\right)}{\sqrt{n_1}}\int_0^{\infty}\alpha^3\left\{F_1+s_0F_2\right\}J_0\left(\alpha r\right)d\alpha ; \quad (3)$$

$$\sigma_{zz}\left(r,0\right)=c_{44}\left(1+m_1\right)l_1\int_0^{\infty}\alpha^3\left\{F_1+sF_2\right\}J_0\left(\alpha r\right)d\alpha ; \quad (4)$$

$$u_r\left(r,0\right)=-\int_0^{\infty}\alpha^2\left\{F_1+F_2\right\}J_1\left(\alpha r\right)d\alpha ; \quad (5)$$

$$u_z\left(r,0\right)=\frac{m_1}{\sqrt{n_1}}\int_0^{\infty}\alpha^2\left\{F_1+s_1F_2\right\}J_0\left(\alpha r\right)d\alpha . \quad (6)$$

Граничні умови поставленої задачі матимуть вигляд:

$$\sigma_{rz}\left(r,0\right)=0,\ 0\le r<\infty ; \quad (7)$$

$$\sigma_{zz}\left(r,0\right)=0,\ a\le r ; \quad (8)$$

$$u_z\left(r,0\right)=\omega\left(r\right),\ 0\le r\le a . \quad (9)$$

Функція $\omega\left(r\right)$ описує переміщення точок граничної площини пружного півпростору у районі його контракту із жорстким штампом. А тому, виходячи із вигляду функції $W\left(r\right)$, можна записати:

$$\omega\left(r\right)=\begin{cases}\omega\left(a\right)-\dfrac{\left(a-r_a\right)^2}{2R},\ 0<r\le r_a;\\ \omega\left(a\right)-\dfrac{1}{2R}\left[\left(a-r_a\right)^2-\left(r-r_a\right)^2\right],\ r_a<r\le a.\end{cases} \quad (10)$$

Розв'язання задачі. Задовольнивши граничну умову (7), одержуємо співвідношення між невідомими функціями F_1 та F_2:

$$F_1=-s_0F_2 . \quad (11)$$

Із врахуванням (11) вирази (4) та (6) набувають вигляду:

$$\sigma_{zz}\left(r,0\right)=c_{44}\left(1+m_1\right)\left(s-s_0\right)l_1\int_0^{\infty}\alpha^3F_2J_0\left(\alpha r\right)d\alpha ; \quad (12)$$

$$u_z\left(r,0\right)=\frac{m_1\left(s_1-s_0\right)}{\sqrt{n_1}}\int_0^{\infty}\alpha^2F_2J_0\left(\alpha r\right)d\alpha . \quad (13)$$

Задовольнивши граничну умову (8), матимемо:

$$c_{44}\left(1+m_1\right)\left(s-s_0\right)l_1\int_0^\infty \alpha^3 F_2 J_0\left(\alpha r\right)d\alpha=0,\ a\le r. \tag{14}$$

Введемо невідому функцію $x\left(r\right)$, $0\le r\le a$, за допомогою якої продовжимо співвідношення (14) на проміжок $0\le r<\infty$:

$$c_{44}\left(1+m_1\right)\left(s-s_0\right)l_1\int_0^\infty \alpha^3 F_2 J_0\left(\alpha r\right)d\alpha=x\left(r\right)\eta\left(a-r\right),\ 0\le r<\infty, \tag{15}$$

де $\eta\left(r\right)$ – одинична функція Гевісайда.

Функція $x\left(r\right)$ визначає розподіл контактних напружень під штампом. Врахувавши її неперервність, а також рівність нулю на границі області контакту (при $r=a$) представимо $x\left(r\right)$ у вигляді відрізка узагальненого ряду Фур'є за функціями $J_0\left(\frac{\lambda_n}{a}r\right)$, де λ_n, $n=\overline{1,N}$ – додатні корені рівняння функції Бесселя $J_0\left(\lambda_n\right)=0$. Тобто у вигляді:

$$x\left(r\right)=\sum_{n=1}^{N}a_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{a}r\right), \tag{16}$$

де a_n – невідомі поки коефіцієнти.

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до співвідношення (15), одержуємо вираз:

$$\alpha^2 F_2=\frac{1}{c_{44}\left(1+m_1\right)\left(s-s_0\right)l_1}\sum_{n=1}^{N}a_n\int_0^a rJ_0\left(\frac{\lambda_n}{a}r\right)J_0\left(\alpha r\right)dr,\ 0\le\alpha<\infty. \tag{17}$$

Використавши співвідношення (13), (17) та граничну умову (9) матимемо:

$$k_1\sum_{n=1}^{N}a_n\int_0^\infty \Psi_n\left(\alpha\right)\left[J_0\left(\alpha r\right)-J_0\left(\alpha a\right)\right]d\alpha=\omega^*\left(r\right),\ 0\le r\le a. \tag{18}$$

В останньому співвідношенні використані наступні позначення:

$$\omega^*\left(r\right)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2R}\left(r_a-a\right)^2,\ 0\le r<r_a;\\ \dfrac{1}{2R}\left[\left(r_a-r\right)^2-\left(r_a-a\right)^2\right],\ r_a\le r<a;\end{cases}$$

$$k_1=\frac{m_1\left(s_1-s_0\right)}{c_{44}\left(1+m_1\right)\left(s-s_0\right)l_1\sqrt{n_1}},\ \Psi_n\left(\alpha\right)=\int_0^a rJ_0\left(\frac{\lambda_n}{a}r\right)J_0\left(\alpha r\right)dr. \tag{19}$$

Помноживши співвідношення (18) на $rJ_0\left(\frac{\lambda_q}{a}r\right)$, $q=\overline{1,N}$ та проінтегрувивши одержані вирази по r від 0 до a, отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{N}a_n\int_0^\infty \Psi_n\left(\alpha\right)\left[\Psi_q\left(\alpha\right)-K_q J_0\left(\alpha a\right)\right]d\alpha=\frac{w_q}{k_1},\ q=\overline{1,N}, \tag{20}$$

де $K_q=\int_0^a rJ_0\left(\frac{\lambda_q}{a}r\right)dr$, $w_q=\int_0^a r\omega^*\left(r\right)J_0\left(\frac{\lambda_q}{a}r\right)dr$.

Введемо позначення $a_n=\dfrac{a_n^*}{2k_1R}$, (21)

врахувавши яке із (20) одержуємо систему N лінійних алгебраїчних рівнянь відносно a_n^*.

Значення радіуса кривини R параболи, обертанням якої утворено штамп, знаходимо із умови рівноваги штампа

$$2\pi\int_0^a r\sigma_{zz}\left(r,0\right)dr = -P. \tag{22}$$

Підставивши у (22) співвідношення (16) та (21) отримуємо остаточний вираз для радіуса кривини R, що відповідає заданій площадці контакту:

$$R = -\frac{\pi}{k_1 P}\sum_{n=1}^{N} a_n^* K_n \tag{23}$$

Врахувавши (23), із використанням (21) та (16), одержуємо формулу для знаходження розподілу контактних напружень під штампом:

$$\sigma_{zz}\left(r,0\right) = x\left(r\right) = -\frac{P}{2\pi}\frac{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n^* J_0\left(\dfrac{\lambda_n}{a}r\right)}{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n^* K_n}.$$

Також із співвідношень (13), (17), (19) та (23) можна отримати формулу для визначення вертикальних переміщень точок граничної площини півпростору

$$u_z\left(r,0\right) = -\frac{k_1 P}{2\pi}\frac{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n^* \int\limits_0^{\infty} \Psi_n\left(\alpha\right) J_0\left(\alpha r\right) d\alpha}{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n^* K_n}.$$

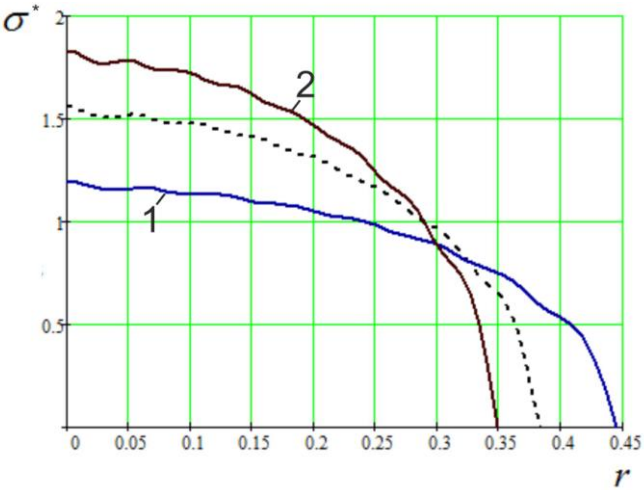

Рис. 2. **Розподіл контактних напружень під штампом**

На рисунку 2 побудовано графік безрозмірної величини σ^*, що описує вплив залишкових деформацій на розподіл контактних напружень під штампом. Пунктирна крива відповідає випадку відсутності у півпросторі залишкових деформацій, крива 1 – наявності розтягуючих, а 2 – наявності стискуючих залишкових деформацій. Аналіз отриманих результатів дає можливість стверджувати, що при виникненні у півпросторі розтягуючих деформацій площадка контакту збільшується, а контактні напруження є слабшими, ніж у випадку, коли залишкові деформації відсутні. А при появі стискуючих залишкових деформаціях зростають контактні напруження та зменшується площадка контакту.

Висновки. Запропоновану методику можна застосовувати при розв’язанні широкого кола осесиметричних контактних задач для штампів складної конфігурації та попередньо напруженого півпростору або шару у випадках стисливих і нестисливих тіл в загальному вигляді при довільній структурі пружного потенціалу. Проведений числовий аналіз дає можливість стверджувати, що поява у тілі залишкових деформацій розтягу викликає звуження ділянки контакту та збільшення абсолютного значення контактних напружень. Виникнення деформацій стиску спричиняє розширення ділянки контакту та зменшення абсолютного значення контактних напружень. Достовірність зроблених висновків підтверджує їх узгодження із результатами, отриманими іншими авторами [2-4].

1. Гузь, А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь – Киев : Наукова думка, 1983. – 296 с.
2. Бабич, С.Ю. Контактные задачи для упругих тел с начальними напряжениями применительно к жестким и упругим штампам [Текст] / С.Ю. Бабич, А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 41–69.
3. Гузь, А.Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (окончательными) напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий. – Хмельницкий, 2006. – 710 с.
4. Гузь, О. М. Контактна взаємодія тіл з початковими (залишковими) напруженнями [Текст] / О.М. Гузь, В.Б. Рудницький // Проблеми математичного моделювання сучасних технологій: Зб. наук. пр. за матеріалами міжнар. наук.-техн. конф. – 2004. – С. 5–35.

Стаття надійшла до редакції 07.10.2015.