

УДК 530.1+539.2

^{1,2} Човнюк Ю.В., ³ Герасимчук Г. А., ¹ Гуменюк Ю.О.¹ Національний університет біоресурсів і природокористування України² Київський національний університет будівництва і архітектури³ Луцький національний технічний університет**АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ МАЯТНИКОВОГО АНТИВІБРАТОРА**

У статті проведений динамічний аналіз, який дозволяє встановити основні параметри нелінійних коливань маятникового антивібратора. Для дослідження використані точні аналітичні розв'язки рівнянь математичного/фізичного маятника у функціях Якобі.

Ключові слова: аналіз, нелінійність, коливання, маятник, антивібратор.

Човнюк Ю.В., Герасимчук Г. А., Гуменюк Ю.О.**АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКОВОГО АНТИВИБРАТОРА**

В статье проведен динамический анализ, который позволяет установить основные параметры нелинейных колебаний маятникового антивибратора. Для исследования использованы точные аналитические решения уравнений математического/физического маятника в функциях Якоби.

Ключевые слова: анализ, нелинейность, колебания, маятник, антивибратор.

Chovnyuk YU., Herasymchuk H., Humenyuk YU.**ANALYSIS OF NONLINEAR VIBRATIONS OF THE PENDULUM ANTIVIBRATOR**

The dynamic analysis which was carried by authors of the article allows you to set the basic parameters of nonlinear oscillations of the pendulum antivibrator. For research was used an exact analytical solutions of equations of mathematical/physical pendulum in the functions of Jacobi.

Keywords: analysis, nonlinearity, vibration pendulum antivibrator.

Постановка задачі. Маятниковим антивібратором називають пристрій, власна частота якого змінюється разом з частотою збурюючих моментів таким чином, що обидві частини завжди дорівнюють одна одній [1].

Маятниковий антивібратор може бути застосований у обертальних системах, які здійснюють крутні коливання. Теоретично можливим пристроєм такого типу є математичний/фізичний маятник, який закріплений на обертальному диску. Як правило, маятниковий антивібратор розглядається у вигляді лінійної системи (для малих кутів відхилення маятника від вертикалі). Проте такий підхід неприпустимий для значних відхилень маятника від вертикалі (кути відхилення більші за 15°...20°).

Аналіз публікацій по темі дослідження. Теорія маятникового антивібратора у лінійному наближенні (для малих кутів відхилення маятника від вертикалі) розвинена у [1]. Проте існує чимало підходів [2 - 13], які дозволяють точно розв'язувати рівняння нелінійних коливань маятника (математичного/фізичного) Якобі. Результати цитованих вище робіт будуть використані у даному дослідженні.

Мета роботи полягає у обґрунтуванні методу динамічного аналізу нелінійних коливань маятникового антивібратора у межах та на основі функцій Якобі.

Виклад основного змісту дослідження. Розглянемо коливання математичного маятника, закріпленого на диску, який обертається з кутовою швидкістю ω (рис.1).

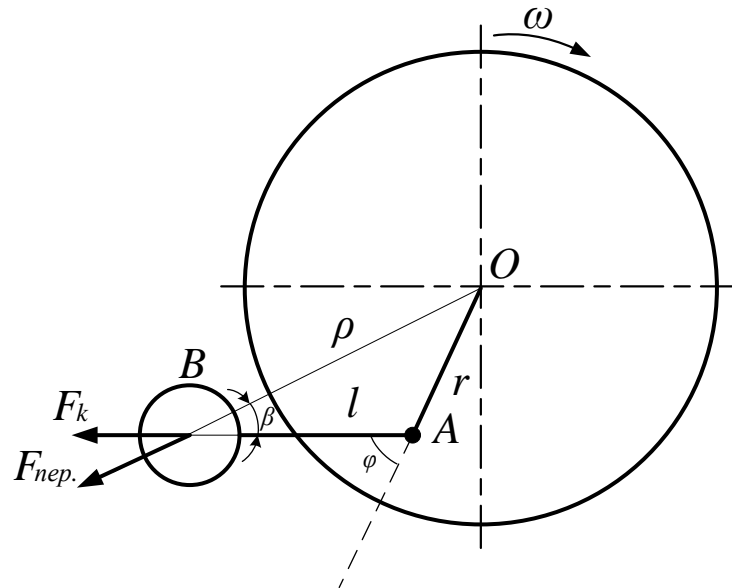


Рис. 1. Модель маятнікового антивібатора (математичний маятник)

У положенні стійкої рівноваги такого маятника його нитка має радіальний напрямок.

Позначимо: m – маса маятника; r – радіус підвіски OA ; l – довжина маятника AB ; φ – кут відхилення маятника від положення стійкої рівноваги; ω – кутова швидкість диска.

Оскільки ми розглядаємо відносний рух маятника по відношенню до диска, тоді, застосовуючи динаміку відносного руху матеріальної точки у якості сил, прикладених до маятника, беремо переносну та коріолісову сили інерції (силою ваги можна знехтувати як малою величиною у порівнянні з силами інерції). Диференціальне рівняння відносного обертального руху маятника по відношенню до осі A запишеться так:

$$ml^2\ddot{\varphi} = M_A(F_{\text{пер.}}) + M_A(F_k), \quad (1)$$

де $M_A(F_{\text{пер.}})$ та $M_A(F_k)$ – моменти переносної та коріолісової сил інерції відносно осі A . переносна сила інерції дорівнює:

$$F_{\text{пер.}} = m\rho\omega^2, \quad (2)$$

її момент відносно осі A має знак мінус і дорівнює:

$$M_A(F_{\text{пер.}}) = -m\rho\omega^2 l \sin \beta. \quad (3)$$

Момент коріолісової сили інерції відносно осі A дорівнює нулю, оскільки лінія дії цієї сили перетинає вісь A . Тепер маємо:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -m\rho\omega^2 l \sin \beta. \quad (4)$$

Користуючись рівністю, яка випливає з рис. 1,

$$\rho \sin \beta = r \sin \varphi, \quad (5)$$

можна далі записати:

$$\ddot{\varphi} + \frac{r}{l}\omega^2 \sin \varphi = 0. \quad (6)$$

Рівняння (6) є диференціальним рівнянням руху маятника, яке справедливе за будь-яких значень кута φ .

У роботі [1] розв'язане рівняння (6) у наближенні малих коливань маятника (малих кутів φ , коли $\sin \varphi \approx \varphi$).

Зокрема, згідно (6), можна стверджувати, що власна частота такого математичного маятника дорівнює:

$$\omega_a = \omega \sqrt{\frac{r}{l}}, \quad (7)$$

Разом з тим відомо, що частоти всіх гармонічних складових періодичних моментів, прикладених до мас системи при крутних коливаннях валів двигунів внутрішнього згорання, пропорційні кутовій швидкості обертання вала.

$$\omega_k = k \omega, \quad (8)$$

де k – порядок гармонічної складової;
 ω – кутова частота вала.

Звідси випливає, що якщо параметри підвіски маятнікового антивібатора, приєднаного до колінчатого вала, що обертається, підібрати таким чином, щоб:

$$k^2 = \frac{r}{l} \tag{9}$$

Тобто щоб власна частота ω_a маятника й частота ω_k гармонічного моменту були між собою за будь-якої ω , тоді дія маятник як антивібатора на вимушені коливання, під дією k -го гармонічного моменту, буде однаковою за будь-якого значення ω . Умова (9) є умовою налаштування маятника для уникнення небезпечних коливань, викликаних моментом k -го порядку.

Розглянемо далі точні аналітичні розв'язки (6), користуючись підходом роботи [14].

Графік потенціальної енергії такого кругового осцилятора (математичного маятника) наведений на рис.2.

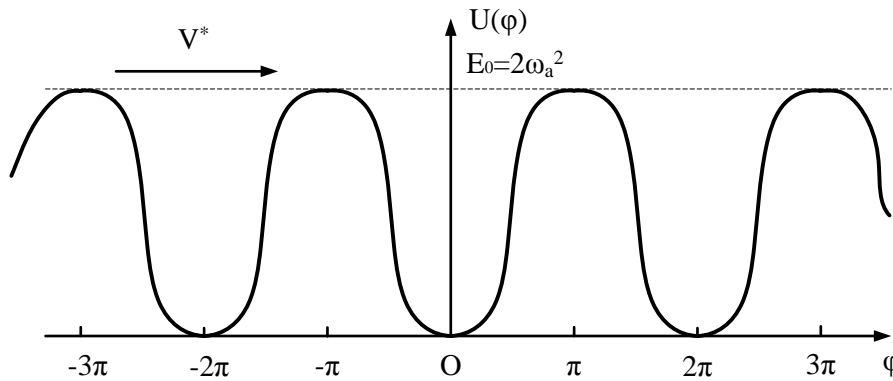


Рис.2.Графік залежності потенціальної енергії математичного маятника U від ϕ

Можна вважати, що (6) – це рівняння руху частинки одиничної маси у потенціальному полі (з деякою швидкістю V). При цьому $E_0 = 2\omega_a^2$. Зрозуміло, що при енергії $E > E_0 = 2\omega_a^2$ частинка пролітає над періодичним потенціальним рельєфом зі швидкістю V^* , чому відповідає кругове обертання математичного маятника у одному напрямку. За малих енергій $0 \leq E = 2\omega_a^2$ частинка рухається (у коливному режимі зі швидкістю V , $V < V^*$) поблизу одного з мінімумів потенціального рельєфу (математичних маятник у процесі коливання не доходить до повністю перекинутого положення).

Фазова діаграма для математичного маятника наведена на рис. 3. Вона являє собою періодичну послідовність точок типу «центр» та точок типу «сіadlo», які чергуються одна за одною. Оскільки значення координати частинки ϕ , які відрізняються на величину $2\pi n$, де n – цілі числа, енергетично еквівалентні, тоді значення ϕ можна розглядати лише у інтервалі $-\pi \leq \phi \leq \pi$, згорнувши фазовий простір у циліндр з періодичними граничними умовами.

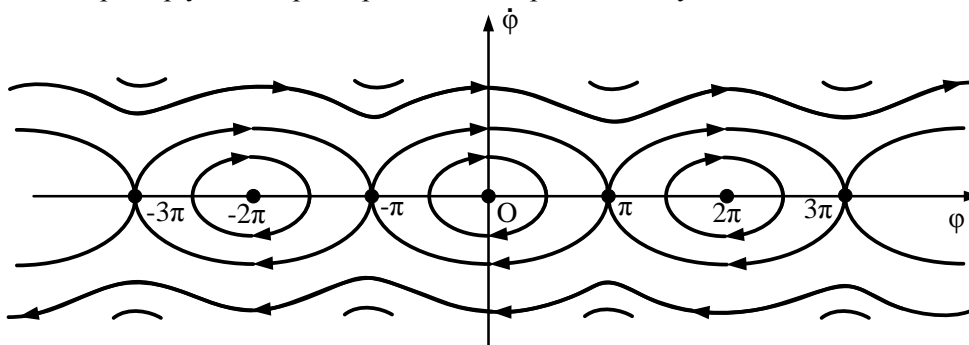


Рис. 3. Фазовий портрет рівняння (6) у площині $(\phi, \dot{\phi})$

Сепаратиси, які відділяють траєкторії коливних рухів від траєкторій обертальних рухів, відповідають значенню повної енергії $E = 2\omega_a^2$, а сепаратрисний розв'язок (6) має вид:

$$\phi = -\pi + \arctg[\exp(\omega_a t)]. \tag{10}$$

Слід зазначити, що для даної нелінійної системи фазові портрети $(\phi, \dot{\phi})$ мають ті ж елементи, що і у випадку лінійних рівнянь (коли $\sin \phi \approx \phi$): особливі точки типу «центр» і «сіadlo», сепаратиси, які виходять з них й входять у сіadлові точки.

На рис.3 й у подальшому $\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{dt}$, t – час.

Якщо використати вираз для повної енергії маятника у вигляді:

$$E = \frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2 + 2\omega_a^2(1 - \cos\varphi). \quad (11)$$

Тоді можна подати розв'язок (6) у квадратурах (тобто точний аналітичний розв'язок). При цьому після заміни $z = \sin \frac{\varphi}{2}$ залежність $t = t(z)$ виражається через еліптичний інтеграл першого роду. У якості еліптичного модуля приймаємо $\sqrt{E/(2\omega_a^2)}$ (коли $E < E_0$) чи $\sqrt{\frac{2\omega_a^2}{E}}$ (коли $E > E_0$) у залежності від співвідношення E і $2\omega_a^2$. Критична енергія маятника $E_0 = 2\omega_a^2$ відповідає сепаратрисному розв'язку (10), який розділяє коливання та обертання математичного маятника.

При малих енергіях $E < E_0 = 2\omega_a^2$ остаточний розв'язок (6) для коливань математичного маятника має вид:

$$\varphi = 2 \operatorname{arsin}[k \operatorname{sn}(\omega_a t, k)], \quad (12)$$

де модуль k визначає енергію й частоту коливань:

$$E = E_0 \cdot k^2, \tilde{\omega} = \omega_a \pi / 2K. \quad (13)$$

У (12) $\operatorname{sn}(u, k)$ – еліптичний синус (або синус Якобі). При цьому $\operatorname{sn}(u, k) \equiv \sin[\operatorname{am}(u, k)]$, де $\operatorname{am}(u, k)$ – так звана еліптична амплітуда.

У (13) K – повний еліптичний інтеграл першого роду [13]:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \equiv \int_0^{\operatorname{sn}(\frac{\pi}{2})} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}. \quad (14)$$

Еліптична амплітуда $\operatorname{am}(u, k)$ введена із наступних міркувань. Якщо $F(\varphi, k) = u(\varphi)$, тоді обернена функція $\varphi(u) = \operatorname{am}(u, k)$, де $F(\varphi, k)$ – еліптичний інтеграл першого роду (неповний):

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \tilde{x})}} = \int_0^{\operatorname{sn} \varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}. \quad (15)$$

При великих енергіях маятника $E > E_0 = 2\omega_a^2$ обертання математичного маятника описується функцією:

$$\varphi = 2 \operatorname{arsin}[\operatorname{sn}(\omega_a t / \tilde{k}, \tilde{k})] \equiv 2 \operatorname{am}(\omega_a t / \tilde{k}, \tilde{k}), \quad (16)$$

де $\tilde{k} = \sqrt{\frac{E_0}{E}} = \sqrt{\frac{2\omega_a^2}{E}}$ й $\frac{\tilde{\omega}^*}{\omega_a} = \frac{\pi}{2kK}$, де $\tilde{\omega}^*$ – частота обертання маятника навколо осі, що проходить через точку A .

1. Розглянемо у якості антивібатора фізичний маятник (рис. 4). Практично математичний маятник не можна реалізувати, тому розглянемо реальні пристрої, які забезпечують такий самий ефект. Спочатку слід розглядати антивібатор, який реалізується у вигляді фізичного маятника. (Сучасні маятникові антивібатори [1] з конструктивної точки зору можуть мати три види принципових схем: внутрішній ролик, зовнішній ролик та біфілярний підвіс. Найбільш розповсюдженим є останній тип маятникового антивібатора з однаковими отворами у маянику та у диску (маточині). У цьому випадку маятник еквівалентний математичному і його довжина може бути дуже малою).

На рис.4. показаний фізичний маятник маси m , закріплений на диску, що обертається.

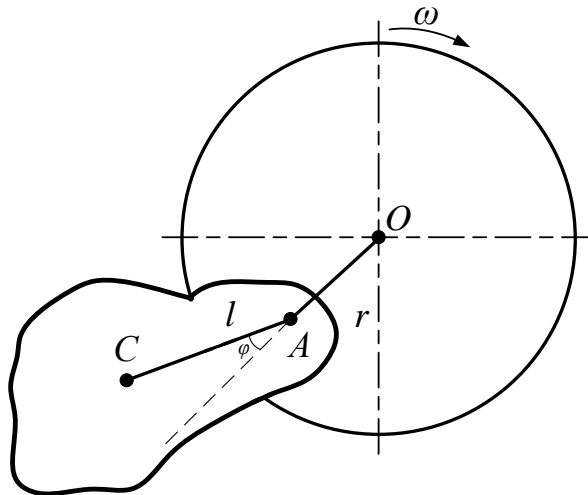


Рис. 4. Фізичний маятник як антивібатор

Для такого маятника аналогічно до попереднього (математичного маятника) можна скласти наступне рівняння руху:

$$I_A \cdot \ddot{\varphi} + mrl\omega^2 \sin \varphi = 0, \quad (17)$$

де $I_A = I_C + ml^2$ – момент інерції маятника відносно осі A ;

I_C – момент інерції маятника відносно осі C , яка проходить через центр мас і паралельна до осі A ;

l – відстань від осі підвісу до центра мас маятника;

r – відстань від осі диска до осі A .

Нехай $I_C = m\rho_C^2$, де ρ_C – радіус інерції маятника відносно осі C , тоді матимемо:

$$\ddot{\varphi} + \frac{rl}{l^2 + \rho_C^2} \omega^2 \sin \varphi = 0. \quad (18)$$

(У (17) і (18) $\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$).

Власна частота такого фізичного маятника буде:

$$\omega_\Phi = \omega \sqrt{\frac{rl}{(l^2 + \rho_C^2)}}, \quad \omega_\Phi \neq \omega_\alpha. \quad (19)$$

Тоді усі аналітичні розв'язки (18) можна отримати, замінюючи у вищенаведених формулах (10), (11), (12), (13), (16) ω_α на ω_Φ ($\omega_\alpha \rightarrow \omega_\Phi$).

Умова налаштування фізичного маятника для уникнення вимушених коливань, які збуджуються моментом k -го порядку, записується наступним чином:

$$k^2 = \frac{rl}{(l^2 + \rho_C^2)}. \quad (20)$$

Цій умові відповідає цілком певне значення відрізка l . Довжина відрізка l є коренем квадратного рівняння, а саме:

$$k^2 l^2 - rl + k^2 \rho_C^2 = 0 \quad (21)$$

й дорівнює

$$l_{k1,2} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4k^4 \rho_C^2}}{2k^2}, \quad r^2 \geq 4k^4 \rho_C^2. \quad (22)$$

З останньої нерівності випадає, що реалізувати фізичний маятник, як налаштований антивібратор можна лише за умови:

$$\rho_C \leq \frac{r}{2k^2}. \quad (23)$$

Ця нерівність означає, що при заданому і зазвичай невеликому за конструктивних міркувань радіусі підвіски r налаштування на моменти високих порядків вимагає, щоб радіус інерції ρ_C був доволі малою величиною. Оскільки радіус інерції фізичного маятника залежить від його геометричних розмірів, то з (23) випливає, що геометричні розміри маятника повинні бути малими ($k > 1$).

Маятник, впливаючи на систему як антивібратор, сам здійснює коливання, причому амплітуда коливань маятника обернено пропорційна масі маятника. Якщо ця маса за умовами налаштування буде малою, тоді амплітуда коливань буде великою і не буде відповідати законам малих коливань (тобто лінійне наближення [1] не діє.) Значить, фізичний маятник можна реалізувати у якості антивібратора лише для налаштування на гармоніки низьких порядків.

Висновки

1. Обґрунтовані фізико-механічні моделі антивібратора обертальних коливань у вигляді математичного та фізичного маятників.

2. Встановлені аналітичні залежності, які визначають закон руху $\varphi(t)$ – кута відхилення маятника від вертикалі з полином часу t , які засновані на еліптичних функціях Якобі. Визначені умови, за яких рух маятника (математичного/фізичного) має коливний або обертальний характер.

3. У подальшому результати роботи можуть бути використані для уточнення і удосконалення існуючих методів інженерних розрахунків антивібраторів коливних механічних систем.

Література

1. Штейнвольф Л.И. Динамические расчеты машин и механизмов. /Л.И. Штейнвольф.-М., К.:Машгиз, 1961.-340 с.

2. Андронов А.А. Теория колебаний./ А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин.- М.: Наука, 1981.-568 с.
3. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах/ В.И. Карпман.- М.: Наука, 1973.-175с.
4. Рабинович М.И. Введение в теорию колебаний и волн / М.И. Рабинович Д.И. Трубецков.-М.: Наука, 1984.-432с.
5. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике/ Э Скотт.-М.: Сов. радио, 1977.-368с.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны/ Дж. Уизем.- М.: Мир, 1977. - 624 с.
7. Блакьер О. Анализ нелинейных систем/ О. Блакьер.- М.: Мир, 1969. -400с.
8. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний/ Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. - М.: Физматгиз, 1963.-410с.
9. Ландау Л.Д. Механика./ Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965.-203с.
10. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики/ Н.Н. Моисеев.- М.: Наука, 1969.-377с.
11. Найфэ А. Введение в методы возмущений/ А. Найфэ.- М.: Мир, 1984.- 535 с.
12. Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа/ Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. - М.: Физматгиз, 1963.- Ч.2.- 515с.
13. Янке Е. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы/ Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. М. Лёш.- М.: Наука, 1964.-344с.
14. Косевич А.М. Введение в нелинейную физическую механику/ А.М. Косевич, А.С. Ковалев.-К: Наукова думка, 1989. - 304 с.

Стаття надійшла д редакції 10.12.2015.