

УДК 539.3

Н.В. Шевцова*Рівненський державний гуманітарний університет***ЧАСТКОВЕ ПІДСИЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО КОНТУРУ В ПЛАСТИНЦІ РОЗІМКНЕНИМ ПРУЖНИМ РЕБРОМ**

Побудована система сингулярних інтегральних рівнянь, що визначає напружений стан нескінченної ізотропної пластинки з криволінійним отвором, контур якого частково підсилений розіmkненим пружним стрижнем. Числова реалізація задачі здійснена методом механічних квадратур і колокації.

Ключові слова: криволінійний стрижень, часткове підсилення, контактні зусилля, нормальні напруження, нескінченна ізотропна пластинка.

Н.В. Шевцова**ЧАСТИЧНОЕ УСИЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО КОНТУРА В ПЛАСТИНКЕ РАЗОМКНУТЫМ УПРУГИМ РЕБРОМ**

Построена система сингулярных интегральных уравнений, определяющая напряженное состояние бесконечной изотропной пластинки с криволинейным отверстием, контур которого частично усилен разомкнутым упругим стержнем. Числовая реализация задачи осуществлена методом механических квадратур и колокации.

Ключевые слова: криволинейный стержень, частичное усиление, контактные усилия, нормальные напряжения, бесконечная изотропная пластинка.

N. Shevtsova**PARTLY CONTOUR CURVED GAIN IN THE PLATE DISCONNECTED ELASTIC RIBS**

The problem of calculating the mode of deformation of infinite isotropic plate with partial reinforced curved hole is considered. The plate is in a homogeneous generalized stressed state at infinity which created uniform distributed forces in two orthogonally related directions. The reinforcement unlocked curved rods, which geometrical axis does not coincide with splice line, are modeling. The system of singular integral equations to determine the contact forces between plate and reinforcement is constructed. The structure of solution of this system at the ends of area of reinforcement is explored. The internal forces in the reinforcing bar are limited and in it ends are equal zero. The contact forces in the ends of zone of reinforcement the rooted singularity are having. Approximate solution of the problem by mechanical quadrature and collocation is realized. The effect of relative width of the bar on the stress state of the plate and the reinforcement in the concrete example are analyzed.

Key words: curved bar, partial reinforcement, contact forces, normal stresses, infinite isotropic plate.

Вступ. У сучасному машинобудуванні, будівництві, інших галузях інженерної практики широке застосування знаходять пластинки, послаблені отворами. Підсилення контурів отворів тонкими пружними ребрами розширює можливості зменшення концентрації напружень та економії матеріалу. Ці ребра, складаючи, як правило, порівняно незначну частину загальної ваги конструкції, суттєво впливають на її міцність, жорсткість і особливо на стійкість [1, 2].

У той же час, на контурі отвору наявні зони, які можна не підкріплювати в силу низької концентрації напружень [1]. Тому використання часткового підсилення, як найбільш економного з точки зору витрати матеріалу, видається більш перспективним.

Найбільш поширеними в науковій літературі є такі моделі розіmkненого підсилювального ребра:

- пружна лінія сталої або змінної жорсткості на розтяг (стиск) [1, 3];
- пружна лінія сталої або змінної жорсткості на розтяг (стиск) і згин [2];
- криволінійний стрижень сталого поперечного перерізу, лінія фактичного сполучення якого з пластинкою не співпадає з його геометричною віссю [4].

Використовуючи перші дві моделі в роботах [5-7] досліджено вплив жорсткості підсилень на напружено-деформований стан ізотропних та ортотропних пластинок з отворами.

Що стосується третьої моделі підсилення, то такі задачі розв'язані лише для нескінченної ізотропної пластинки з круговим отвором, зокрема у [8], при уточненому розрахунку шліцьового з'єднання для передач обертового руху.

У даній роботі пропонується наближений розв'язок задачі про часткове підсилення пружним стрижнем контуру криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці, яка перебуває в умовах однорідного напруженого стану на нескінченності.

Постановка задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$, послаблену симетричним криволінійним отвором, який обмежений гладкою циліндричною

поверхнею. У серединній площині пластинки систему декартових координат (x, y) оберемо так, щоб вісь Ox співпадала з віссю симетрії отвору і проходила через його центр O . У цій же площині розмістимо полярну систему координат (r, δ) з полюсом у точці O і полярною віссю Ox (рис. 1).

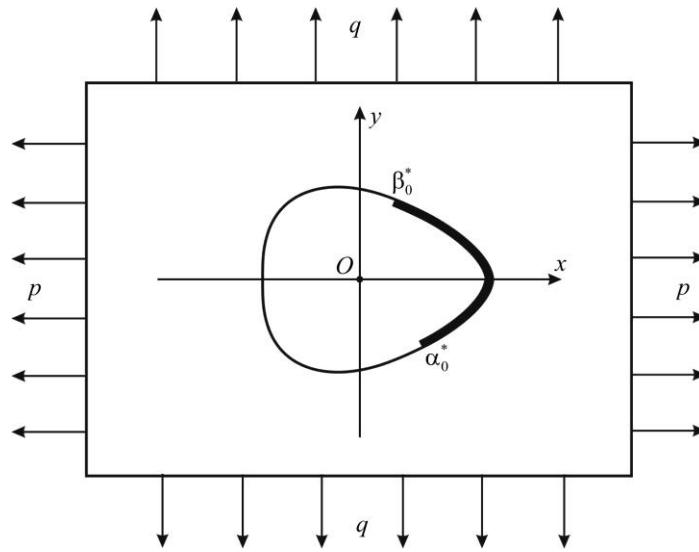


Рис. 1. Розрахункова схема пластинки

Пластинка перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподіленими зусиллями p і q , що діють на нескінченності в напрямках координатних осей.

Припустимо, що на ділянці $[\alpha_0^*, \beta_0^*]$ контур отвору Γ частково підсилений тонким пружним ребром прямокутного поперечного перерізу з площею $F_0 = 4h_0\eta$ (α_0^*, β_0^* – полярні кути межових точок ділянки підсилення; $2h_0, 2\eta$ – висота та ширина ребра). Зовнішнє навантаження на підсилення відсутнє.

Розв'язання задачі передбачає визначення компонент напружено-деформованого стану (НДС) на межі поділу матеріалів пластинки і підсилення та дослідження впливу на них форми отвору, зовнішнього навантаження, а також фізико-геометричних параметрів підсилення.

Основні рівняння задачі. Нехай форма отвору в пластинці визначається функцією

$$z = \omega(\zeta) = R^* \left(\zeta + \frac{\varepsilon_1}{\zeta} + \frac{\varepsilon_2}{\zeta^2} + \frac{\varepsilon_3}{\zeta^3} \right), \quad (1)$$

яка здійснює конформне відображення зовнішності одиничного кола γ в площині $\zeta = \rho e^{i\lambda}$ на область $z = x + iy$, яку займає серединна площина пластинки. Тут R^* – характерний розмір отвору (не порушуючи загальності вважаємо, що $R^* = 1$); $i = \sqrt{-1}$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – параметри, що визначають відхилення контуру Γ від кола. Надаючи цим параметрам певних значень при $|\varepsilon_1| + 2|\varepsilon_2| + 3|\varepsilon_3| < 1$, одержимо цілий клас отворів із гладкими контурами. Зокрема, при $|\varepsilon_1| < 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ контур Γ має форму еліпса; при $|\varepsilon_2| < \frac{1}{2}, \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$ – форму трикутника із закругленими кутами; при $|\varepsilon_3| < \frac{1}{3}, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ – форму квадрата із закругленими кутами.

Граничні умови задачі обираємо у вигляді рівності деформацій пластинки і підсилювального ребра на ділянці сполучення

$$\varepsilon_\lambda = \varepsilon_\lambda^{(c)}; \quad V = \theta_b, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0], \quad (2)$$

де $\varepsilon_\lambda, \varepsilon_\lambda^{(c)}$ – відносні видовження контуру Γ для пластинки і стрижня; V, θ_b – кути

повороту нормалі до Γ ; $[\alpha_0; \beta_0]$ – образ ділянки підсилення при відображенні (1).

При заданому навантаженні на пластинку деформації контуру Γ визначаються із співвідношень [7]

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda &= \frac{1}{2Eh(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ (1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2) T_\rho(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left[R(\lambda, t) - Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] T_\rho(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left[Q(\lambda, t) + R(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] S_{\rho\lambda}(t) dt + \alpha \varepsilon_\lambda^0 + \beta V^0 \right\}; \\ V &= \frac{1}{2Eh(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ (1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2) S_{\rho\lambda}(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left[R(\lambda, t) - Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] S_{\rho\lambda}(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left[Q(\lambda, t) + R(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] T_\rho(t) dt - \beta \varepsilon_\lambda^0 + \alpha V^0 \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут введено позначення

$$R(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\alpha(t) + \beta(\lambda)\beta(t); \quad Q(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\beta(t) - \beta(\lambda)\alpha(t);$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda^0 &= p + q + 2(p-q)\cos 2\lambda + (p+q)[(\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_3)\cos 2\lambda + 2\varepsilon_2\cos 3\lambda + 3\varepsilon_3\cos 4\lambda] - \\ &\quad - 4\varepsilon_3(\alpha_1\cos 2\lambda - \beta_1\sin 2\lambda); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V^0 &= 2(p-q)\sin 2\lambda - (p+q)[(\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_3)\sin 2\lambda + 2\varepsilon_2\sin 3\lambda + 3\varepsilon_3\sin 4\lambda] + \\ &\quad + 4\varepsilon_3(\alpha_1\sin 2\lambda + \beta_1\cos 2\lambda); \end{aligned}$$

$$(1 - \varepsilon_3)\alpha_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (T_\rho^*(t)\cos 2t - S_{\rho\lambda}^*(t)\sin 2t) dt - \frac{q-p}{2} - \frac{p+q}{4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_3);$$

$$(1 + \varepsilon_3)\beta_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (T_\rho^*(t)\sin 2t + S_{\rho\lambda}^*(t)\cos 2t) dt;$$

$$T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda})\omega'(\sigma); \quad \alpha + i\beta = \omega'(\sigma); \quad \sigma = e^{i\lambda},$$

T_ρ , $S_{\rho\lambda}$ – контактні зусилля на ділянці підсилення; E , ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки.

Підсилювальне ребро моделюємо криволінійним стрижнем, фактична лінія сполучення якого з пластинкою не співпадає з його геометричною віссю [4].

Деформації волокон стрижня, які контактують з пластинкою на ділянці підсилення, визначаються за формулами [9]

$$\varepsilon_\lambda^{(c)} = \frac{1}{g_4} \left[N + \left(1 - \frac{r_0}{\rho} \right) \frac{L_b}{R - r_0} \right]; \quad \frac{d\theta_b}{d\theta} = \frac{1}{g_4} \left[N + \frac{L_b}{R - r_0} \right], \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0], \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} N &= f_1(\lambda) \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + f_2(\lambda) \frac{b(\lambda)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}; \quad Q = f_1(\lambda) \frac{b(\lambda)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - f_2(\lambda) \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}; \\ L_b &= \eta N + \int_{\alpha_0}^{\lambda} [f_1(t)b(t) - f_2(t)a(t)] dt; \quad a(\lambda) + ib(\lambda) = \omega'(\sigma)\sigma; \end{aligned} \quad (5)$$

$$f_1(\lambda) + if_2(\lambda) = i \int_{\alpha_0}^{\lambda} (T_\rho^*(t) + iS_{\rho\lambda}^*(t)) e^{it} dt; \quad (6)$$

N , Q , L_b – віднесені до осі стрижня поздовжня і поперечна сили та згинальний момент; ρ – радіус кривини того волокна стрижня, яке контактує з пластинкою; $g_4 = E_0 F_0$ – жорсткість стрижня на розтяг (стиск); R – радіус кривини осі стрижня; r_0 – радіус кривини нейтрального для чистого згину волокна стрижня; θ – кут, який утворює нормаль до контуру Γ з додатним

напрямок осі Ox ; $e^{i\theta} = e^{i\lambda} \frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}$.

Функції $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ зв'язані з контактними зусиллями такими співвідношеннями [7]

$$T_p(\lambda) = \frac{-f_1'(\lambda)b(\lambda) + f_2'(\lambda)a(\lambda)}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad S_{p\lambda}(\lambda) = -\frac{f_1'(\lambda)a(\lambda) + f_2'(\lambda)b(\lambda)}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (7)$$

Підставляючи (3), (4) з урахуванням (5) – (7) в граничні умови (2), одержимо систему чотирьох сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь для визначення контактних зусиль T_p , $S_{p\lambda}$ і функцій f_1 , f_2

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2Eh(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ (1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2)T_p(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left[R(\lambda, t) - Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] T_p(t) dt + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left[Q(\lambda, t) + R(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] S_{p\lambda}(t) dt + \alpha \varepsilon_\lambda^0 + \beta V^0 \right\} = \frac{f_1(\lambda)a(\lambda) + f_2(\lambda)b(\lambda)}{g_4 \sqrt{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)}} + \\ & + \frac{\rho - r_0}{\rho(R - r_0)g_4} \left[\eta \frac{f_1(\lambda)a(\lambda) + f_2(\lambda)b(\lambda)}{\sqrt{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)}} + \int_{\alpha_0}^{\lambda} (f_1(t)b(t) - f_2(t)a(t)) dt \right]; \\ & \frac{1}{2Eh(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ (1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2)S_{p\lambda}(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left[R(\lambda, t) - Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] S_{p\lambda}(t) dt - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left[Q(\lambda, t) + R(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] T_p(t) dt - \beta \varepsilon_\lambda^0 + \alpha V^0 \right\} = \theta_b^0 + \int_{\alpha_0}^{\lambda} \left[\frac{f_1(t)a(t) + f_2(t)b(t)}{g_4 \sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(R - r_0)g_4} \left(\eta \frac{f_1(t)a(t) + f_2(t)b(t)}{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}} + \int_{\alpha_0}^t (f_1(t_1)b(t_1) - f_2(t_1)a(t_1)) dt_1 \right) \right] \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{\rho(t)} dt; \\ & T_p(\lambda) = \frac{-f_1'(\lambda)b(\lambda) + f_2'(\lambda)a(\lambda)}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad S_{p\lambda}(\lambda) = -\frac{f_1'(\lambda)a(\lambda) + f_2'(\lambda)b(\lambda)}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (8) \end{aligned}$$

Крім системи (8) повинні виконуватися умови рівноваги підсилювального ребра [1]

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} (T_p + iS_{p\lambda}) e^{i\theta} ds = 0; \quad \eta N(\beta_0) + \int_{\alpha_0}^{\beta_0} [f_1(t)b(t) - f_2(t)a(t)] dt = 0; \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0], \quad (9)$$

які з урахуванням позначення (6) можна перетворити до вигляду

$$f_1(\beta_0) = f_2(\beta_0) = 0; \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} [f_1(t)b(t) - f_2(t)a(t)] dt = 0. \quad (10)$$

Якщо функції $T_p(\lambda)$, $S_{p\lambda}(\lambda)$, $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ стануть відомі, то внутрішні зусилля в стрижні визначаються за формулами (5), а кільцеві зусилля на контурі отвору в пластинці – зі співвідношення [1]

$$T_\lambda = \nu T_p + 2Eh\varepsilon_\lambda. \quad (11)$$

Наближений розв'язок задачі. Точний розв'язок системи (8), (10) знайти не вдається. Для побудови її наближеного розв'язку необхідно встановити структуру шуканих функцій $T_p(\lambda)$, $S_{p\lambda}(\lambda)$, $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ на кінцях ділянки підсилення. З цією метою проміжок інтегрування $[\alpha_0; \beta_0]$ в системі (8), (10) перетворимо до проміжку $[-1; 1]$. Це можна зробити заміною змінних

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2} \xi + \frac{b_0 + a_0}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2} s + \frac{b_0 + a_0}{2}, \quad (12)$$

де

$$b_0 = tg \frac{\beta_0}{2}; \quad a_0 = tg \frac{\alpha_0}{2}.$$

Відповідно до формули (6) і двох перших умов рівноваги (10) маємо

$$f_1(\alpha_0) = f_2(\alpha_0) = f_1(\beta_0) = f_2(\beta_0) = 0.$$

Останні співвідношення показують, що функції $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ обмежені в зоні підсилення, а на її кінцях дорівнюють нулю. Це означає, що

$$f_1(-1) = f_2(-1) = f_1(1) = f_2(1) = 0. \tag{13}$$

На підставі (13) функції $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ на проміжку $[-1; 1]$ можна обрати у вигляді

$$f_1(\xi) = \sqrt{1-\xi^2} \Phi_1(\xi); \quad f_2(\xi) = \sqrt{1-\xi^2} \Phi_2(\xi). \tag{14}$$

Тут $\Phi_1(\xi)$, $\Phi_2(\xi)$ – обмежені та неперервні на $[-1; 1]$ функції.

При такому виборі функцій $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ силові умови рівноваги підсилення виконуються тотожно.

Підставляючи (14) в (7) внаслідок диференціювання функцій $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ можна встановити, що контактні зусилля $T_p(\xi)$, $S_{p\lambda}(\xi)$ на кінцях ділянки підсилення мають кореневу особливість і їх можна подати так

$$T_p(\xi) = \frac{\Phi_3(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}; \quad S_{p\lambda}(\xi) = \frac{\Phi_4(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}; \quad \xi \in [-1; 1], \tag{15}$$

де $\Phi_3(\xi)$, $\Phi_4(\xi)$ – обмежені та неперервні на $[-1; 1]$ функції.

Подаючи функції $\Phi_1(\xi)$, $\Phi_2(\xi)$, $\Phi_3(\xi)$, $\Phi_4(\xi)$ інтерполяційними поліномами Лагранжа, побудованими по вузлах Чебишева, наближений розв'язок системи (8), (10) можна встановити методом колокації [5-7]. Квадратурні формули цього методу для обчислення сингулярних і регулярних інтегралів від функцій $T_p(\xi)$, $S_{p\lambda}(\xi)$ наведені в [5, 6]. Інтеграли зі змінною верхньою межею від функцій $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ можна обчислити за квадратурною формулою трапецій.

Для пластинки з яйцевидним ($\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.1$, $\varepsilon_3 = 0$) криволінійним отвором, контур якого на ділянці $\alpha_0 = -\frac{\pi}{3}$; $\beta_0 = \frac{\pi}{3}$ підсилено пружним стрижнем сталого поперечного перерізу, досліджено вплив на розподіл по контуру Γ в пластинці еквівалентних зусиль $T_{екв} = \sqrt{T_p^2 + T_\lambda^2 - T_p T_\lambda + 3S_{p\lambda}^2}$, визначених за IV теорією міцності [9], та внутрішніх сил N , Q і згинальних моментів L_b відносної ширини підсилення $2\eta/R^*$. Результати числового розрахунку при $\nu = 0.3$, $p = 0$, $q = 1$, $E_0 h_0 / Eh = 10$ наведені на рис. 2-3. Суцільні лінії побудовано для випадку $\eta/R^* = 1/10$, штрихові – $\eta/R^* = 1/20$, штрихпунктирні – $\eta/R^* = 1/40$. Пунктирна лінія на рис. 3 побудована для випадку відсутності підсилювального ребра.

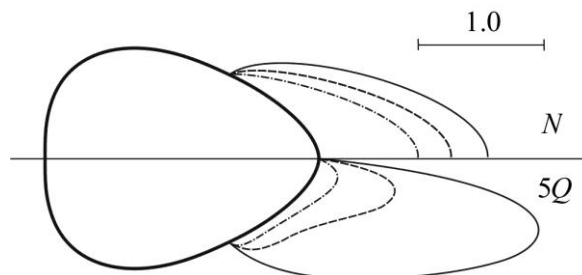


Рис. 2. Епюри розподілу поздовжньої N та поперечної Q сил

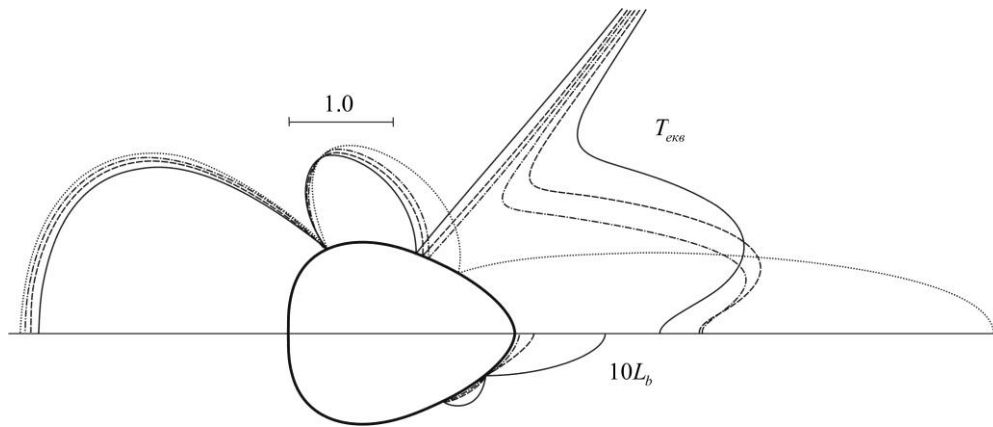


Рис. 3. Епюри розподілу еквівалентних зусиль $T_{екв}$ та згинальних моментів L_b

Аналізуючи одержані результати, можна зробити **висновки**:

- наявність часткового підсилення в зоні найбільшої концентрації напружень суттєво (на 61%) зменшує максимальні еквівалентні зусилля $T_{екв}$ при $\lambda = 0$, залишаючи їх практично незмінними за межами ділянки підсилення;
- зменшення відносної ширини підсилення призводить до зменшення в ньому внутрішніх сил і моментів;
- зони різкого зростання $T_{екв}$ на кінцях ділянки підсилення мають локальний характер і зумовлені появою в цих зонах пластичних деформацій (порушення закону Гука).

Запропонований метод розв'язання задачі без особливих змін може бути перенесений на ортотропні пластинки з еліптичним отвором.

Список використаної літератури

1. Савин Г.Н. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости / Г.Н. Савин, Н.П. Флейшман. – К.: Наукова думка, 1964. – 384 с.
2. Шереметьев М.П. Пластинки с подкрепленным краем / М.П. Шереметьев. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1960. – 258 с.
3. Александров В.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В.М. Александров, С.М. Мхитарян. – М.: Наука, 1983. – 488 с.
4. Мартынович Т.Л. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами / Т.Л. Мартынович, В.Е. Юринец. – Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984. – 160 с.
5. Сяський А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием / А.А. Сяський // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т. 50, № 2. – С. 247-254.
6. Сяський А.А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением / А.А. Сяський, В.А. Сяський // Прикл. механика. – 1983. – Т. 19, № 5. – С. 94-99.
7. Сяський А. Часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці / А. Сяський, Ю. Батишкіна // Вісник ТДТУ. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 5-12.
8. Сяський А.О. Математична модель однієї задачі трибології для шліцевого з'єднання / А.О. Сяський, С.М. Комбель // Проблеми трибології. – 2004. – № 2. – С. 53-58.
9. Писаренко, Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.

Рецензенти:

М. М. Кундрат, доктор технічних наук, професор кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування;

А.О. Сяський, доктор технічних наук, професор кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету.

Стаття надійшла до редакції 20.11.2015.