

УДК: 539.3

Н.В. Шевцова*Рівненський державний гуманітарний університет***ЧАСТКОВЕ ПІДСИЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО КОНТУРУ
В ІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ СИСТЕМОЮ ДВОХ ПРУЖНИХ РЕБЕР**

Досліджено напружений стан нескінченної ізотропної пластинки з криволінійним отвором, контур якого на двох симетричних ділянках частково підсилений системою пружних ребер з однаковими фізико-геометричними характеристиками. Наближений розв'язок системи сингулярних інтегральних рівнянь задачі побудовано методом механічних квадратур і колокації. Досліджено вплив на розподіл напружень по лінії розмежування матеріалів пластинки і підсиленні форми отвору та відносної ширини ребер.

Ключові слова: пружне ребро, нескінченна пластинка з отвором, часткове підсилення, контактні зусилля.

Н.В. Шевцова**ЧАСТИЧНОЕ УСИЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО КОНТУРА
В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ СИСТЕМОЙ ДВУХ УПРУГИХ РЕБЕР**

Исследовано напряженное состояние бесконечной изотропной пластинки с криволинейным отверстием, контур которого на двух симметричных участках частично усилен системой упругих ребер имеющих одинаковые физико-геометрические характеристики. Приближенное решение системы сингулярных интегральных уравнений задачи построено методом механических квадратур и колокации. Исследовано влияние на распределение напряжений по линии раздела материалов пластинки и усиленной формы отверстия, а также относительной ширины ребер.

Ключевые слова: упругое ребро, бесконечная пластинка с отверстием, частичное усиление, контактные усилия.

N. Shevtsova**PARTIAL REINFORCEMENT OF THE CURVILINEAR CONTOUR
IN AN ISOTROPIC PLATE BY THE SYSTEM OF TWO ELASTIC RIBS**

The system of singular integral equations with Hilbert kernels, which determines the stress state of an infinite isotropic plate with curvilinear hole, which contour is partially reinforced by system of two elastic ribs of constant rectangular cross-section, has been constructed. The plate is in a generalized state of plane stress generated uniform distributed on infinity forces, which applied in the directions of the coordinate axes. Deformations of contour of hole in the plate are shown by the integral dependence from the contact forces, which generate between the plate and the reinforcing ribs, and the external load. Modeling the reinforcements by curvilinear bars, which line of actual connection of the contour of the hole in the plate does not coincide with their axes, the calculated formulas to determine the internal forces in the cross-sections and the deformations of the longitudinal fibers of the rods are recorded. The boundary conditions of the problem as equalities of deformations on the boundary of connection of the plate and the reinforcing ribs are formulated. The structure of solution of the basic system of equations at the ends of area of reinforcement has been explored. The approximate solution of this system is founded by the method of mechanical quadrature and collocation. The effects on stress distribution in the plate and reinforcing ribs of the shape of the hole and the relative width have been examined.

Key words: elastic rib, infinite plate with a hole, partial reinforcement, contact forces.

Вступ. В судно-авіабудуванні, машинобудуванні та інших галузях інженерної практики широке застосування мають пластинки, послаблені отворами. Часткове підсилення контурів отворів пружними ребрами розширює можливості керування напруженим станом у зонах високої концентрації напружень, економії матеріалу.

Задачі про часткове підсилення контурів криволінійних отворів у нескінченних пластинках системою двох пружних ребер найбільш повно досліджені для випадку, коли підсилення моделюються пружними лініями сталої чи змінної жорсткості на розтяг(стиск) і згин [1-5]. Якщо підсилення моделюються криволінійними стрижнями фактична лінія сполучення яких з пластинкою не співпадає з геометричною віссю, то окремі задачі розглянуті тільки для кругового отвору, до контуру якого передається зосереджене силове навантаження [6, 7]. Для пластинок з криволінійними отворами такі задачі не розглядалися.

Постановка задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$, яка послаблена симетричним криволінійним отвором і перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподіленими на нескінченності зусиллями p і q , що діють у двох взаємно перпендикулярних напрямках (рис. 1).

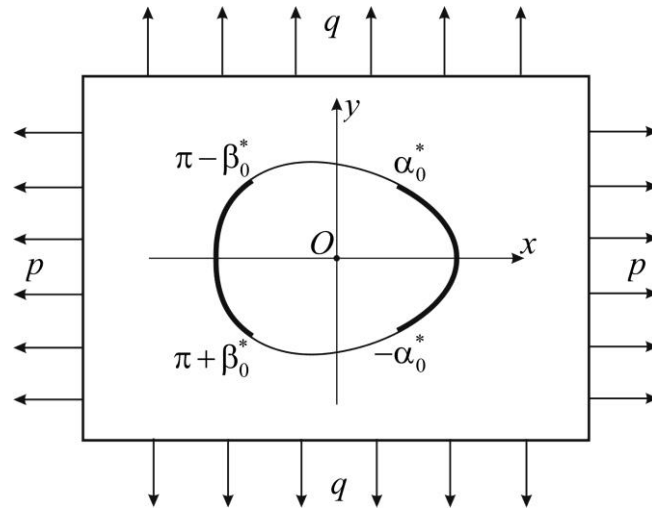


Рис. 1. Розрахункова схема пластинки

Серединну площину пластинки віднесемо до декартової (x, y) і полярної (r, δ) систем координат з полюсом в центрі отвору. Через Γ позначимо лінію перетину серединної площини з поверхнею, що обмежує отвір пластинки.

Припустимо, що на двох симетричних відносно осі Ox ділянках $\Gamma_1 = [-\alpha_0^*, \alpha_0^*]$ і $\Gamma_2 = [\pi - \beta_0^*, \pi + \beta_0^*]$ (α_0^*, β_0^* – полярні кути, що визначають межі ділянок) контур Γ частково підсилений пружними ребрами з однаковими фізико-геометричними характеристиками, осі яких розміщені в серединній площині пластинки. Зовнішнє навантаження на підсилювальні ребра відсутнє.

Розв'язання задачі передбачає визначення напружень на контурі отвору в пластинці, підсилювальних ребрах та дослідження впливу на них зовнішнього навантаження і фізико-геометричних параметрів підсилень.

Основні рівняння задачі. Умовно відділивши підсилення від пластинки, замінюючи їх дію контактними зусиллями $T_p, S_{\rho\lambda}$, приходимо до першої граничної задачі для нескінченної пластинки з криволінійним отвором і підсилювальних ребер.

Пластинка перебуває в рівновазі під дією навантаження на нескінченності і контактних зусиль на ділянках Γ_1 і Γ_2 , а підсилювальні ребра – під дією лише контактних зусиль.

Розглянемо функцію

$$z = \omega(\zeta) = R^* \left(\zeta + \frac{\varepsilon_1}{\zeta} + \frac{\varepsilon_2}{\zeta^2} + \frac{\varepsilon_3}{\zeta^3} \right), \quad (1)$$

яка здійснює конформне відображення зовнішності одиничного кола γ в площині $\zeta = \tilde{\rho}e^{i\lambda}$ на область $z = x + iy$, яку займає серединна площина пластинки. Тут R^* – характерний розмір отвору (для спрощення вважаємо, що $R^* = 1$); $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – параметри, що визначають відхилення контуру Γ від кола; $i = \sqrt{-1}$; $(\tilde{\rho}, \lambda)$ – полярні координати точок у площині ζ .

Деформації контуру Γ в пластинці при заданому навантаженні визначаються за формулами [4]

$$\varepsilon_\lambda = \frac{1}{2Eh(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ (1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2)T_p(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \left[R_1(\lambda, t) - Q_1(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} \right] T_p(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \left[Q_1(\lambda, t) + R_1(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} \right] S_{\rho\lambda}(t) dt + \alpha \varepsilon_\lambda^0 + \beta V^0 \right\};$$

$$V = \frac{1}{2Eh(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ (1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2)S_{\rho\lambda}(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \left[R_1(\lambda, t) - Q_1(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} \right] S_{\rho\lambda}(t) dt - \right.$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1+\gamma_2} \left[Q_1(\lambda, t) + R_1(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] T_\rho(t) dt - \beta \varepsilon_\lambda^0 + \alpha V^0 \Bigg\}, \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda^0 &= p + q + 2(p - q) \cos 2\lambda + (p + q) [(\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_3) \cos 2\lambda + 2\varepsilon_2 \cos 3\lambda + 3\varepsilon_3 \cos 4\lambda] - \\ &\quad - 4\varepsilon_3 (\alpha_1 \cos 2\lambda - \beta_1 \sin 2\lambda); \quad R_1(\lambda, t) = \alpha(\lambda) \alpha(t) + \beta(\lambda) \beta(t); \\ V^0 &= 2(p - q) \sin 2\lambda - (p + q) [(\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_3) \sin 2\lambda + 2\varepsilon_2 \sin 3\lambda + 3\varepsilon_3 \sin 4\lambda] + \\ &\quad + 4\varepsilon_3 (\alpha_1 \sin 2\lambda + \beta_1 \cos 2\lambda); \quad Q_1(\lambda, t) = \alpha(\lambda) \beta(t) - \beta(\lambda) \alpha(t); \\ (1 - \varepsilon_3) \alpha_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1+\gamma_2} (T_\rho^*(t) \cos 2t - S_{\rho\lambda}^*(t) \sin 2t) dt - \frac{q-p}{2} - \frac{p+q}{4} (\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_3); \\ (1 + \varepsilon_3) \beta_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1+\gamma_2} (T_\rho^*(t) \sin 2t + S_{\rho\lambda}^*(t) \cos 2t) dt; \\ T_\rho^* + i S_{\rho\lambda}^* &= (T_\rho + i S_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma); \quad \alpha + i\beta = \omega'(\sigma); \quad \sigma = e^{i\lambda}, \end{aligned}$$

E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки; $\gamma_1 + \gamma_2 = [-\alpha_0, \alpha_0] \cup [\pi - \beta_0, \pi + \beta_0]$ – образ ділянок підсилення при відображенні (1); ε_λ, V – відносне видовження контуру Γ і кут повороту нормалі до нього внаслідок деформації.

Кільцеві зусилля T_λ на контурі Γ визначаються залежністю [2]

$$T_\lambda = \nu T_\rho + 2Eh\varepsilon_\lambda. \quad (3)$$

Підсилювальні ребра моделюємо криволінійними стрижнями сталого перерізу з площею $F_0 = 2h_0 2\eta$ ($2h_0$ – висота підсилень, 2η – їх ширина). Вважаємо, що осі підсилень не співпадають з ділянками Γ_1 і Γ_2 . Внутрішні поздовжня N і поперечна Q сили та згинальний момент L_b , які віднесені до осей стрижнів, визначаємо зі співвідношень [8]

$$\begin{aligned} N &= f_1(\lambda) \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + f_2(\lambda) \frac{b(\lambda)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}; \quad Q = f_1(\lambda) \frac{b(\lambda)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - f_2(\lambda) \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}; \\ L_b &= \eta N + \int_{-\alpha_0}^{\lambda} [f_1(t)b(t) - f_2(t)a(t)] dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут введено позначення

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) + if_2(\lambda) &= \begin{cases} i \int_{-\alpha_0}^{\lambda} (T_\rho + i S_{\rho\lambda}) [a(t) + ib(t)] dt, & \lambda \in \gamma_1; \\ i \int_{\pi - \beta_0}^{\lambda} (T_\rho + i S_{\rho\lambda}) [a(t) + ib(t)] dt, & \lambda \in \gamma_2; \end{cases} \\ a(\lambda) + ib(\lambda) &= \omega'(\sigma) \sigma; \quad \lambda \in \gamma_1 + \gamma_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Деформації тих поздовжніх волокон підсилень, що контактують з пластинкою, визначаємо за формулами [8]

$$\varepsilon_\lambda^{(c)} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[N + \left(1 - \frac{r_0}{\rho} \right) \frac{L_b}{R - r_0} \right]; \quad \frac{d\theta_b}{d\theta} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[N + \frac{L_b}{R - r_0} \right], \quad (6)$$

де E_0 – модуль Юнга матеріалу підсилень; ρ, R, r_0 – радіуси кривини розглядуваного, осьового і нейтрального для чистого згину поздовжніх волокон підсилень; $\varepsilon_\lambda^{(c)}, \theta_b$ – відносне видовження і кут повороту нормалі; θ – кут, який утворює нормаль до волокна з віссю Ox ; $e^{i\theta} = e^{i\lambda} \omega'(\sigma) / |\omega'(\sigma)|$.

Залежності (6) одержані в припущенні, що крайні поздовжні волокна не зазнають

деформації зсуву, викликані поперечними силами. Для осьових волокон ($\rho = R$), де вплив деформації зсуву максимальний, формули (6) набувають вигляду

$$\varepsilon_{\lambda}^{(c)} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[N + \frac{L_b}{R} \right]; \quad \frac{d\theta_b}{d\theta} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[N + \frac{L_b}{R - r_0} \right]; \quad \gamma^{(c)} = \frac{1.2Q}{G_0 F_0}. \quad (7)$$

Тут $\gamma^{(c)}$ – середній по ширині підсилень кут зсуву; G_0 – модуль зсуву.

Нормальні напруження $\sigma^{(c)}$ в довільному поздовжньому волокні стрижня з радіусом кривини ρ^* можна визначити за законом Гука в його одновимірній формі [9]

$$\sigma^{(c)} = \frac{1}{F_0} \left[N + \frac{\rho^* - r_0}{\rho^*} \frac{L_b}{R - r_0} \right], \quad (8)$$

а найбільші дотичні напруження в осьових волокнах при $\rho^* = R$ – за формулою Журавського [9].

Граничні умови задачі записуємо у вигляді рівностей деформацій спільних волокон пластинки і підсилень

$$\varepsilon_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda}^{(c)}; \quad V = \theta_b, \quad \lambda \in \gamma_1 + \gamma_2, \quad (9)$$

Співвідношення (2), (4)-(6) разом з граничними умовами (9) визначають систему сингулярних інтегральних для визначення контактних зусиль T_{ρ} , $S_{\rho\lambda}$ і функцій $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$

$$T_{\rho} = \frac{-f_1'(\lambda)b(\lambda) + f_2'(\lambda)a(\lambda)}{|\omega'(\sigma)|^2}; \quad S_{\rho\lambda} = -\frac{f_1'(\lambda)a(\lambda) + f_2'(\lambda)b(\lambda)}{|\omega'(\sigma)|^2};$$

$$\varepsilon_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda}^{(c)}; \quad V = \theta_b, \quad \lambda \in \gamma_1 + \gamma_2. \quad (10)$$

Цю систему доповнюємо умовами рівноваги підсилень

$$f_1(\alpha_0) = f_2(\alpha_0) = 0; \quad \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [f_1(t)b(t) - f_2(t)a(t)] dt = 0;$$

$$f_1(\pi + \beta_0) = f_2(\pi + \beta_0) = 0; \quad \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} [f_1(t)b(t) - f_2(t)a(t)] dt = 0. \quad (11)$$

Наближений розв'язок задачі. Точний розв'язок системи (10), (11) знайти не вдається. Для її наближеного розв'язання встановимо структуру функцій T_{ρ} , $S_{\rho\lambda}$, $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ на кінцях ділянок підсилення.

З урахуванням позначень (5) і силових умов рівноваги (11) можна записати

$$f_1(-\alpha_0) = f_2(-\alpha_0) = f_1(\alpha_0) = f_2(\alpha_0) = 0;$$

$$f_1(\pi - \beta_0) = f_2(\pi - \beta_0) = f_1(\pi + \beta_0) = f_2(\pi + \beta_0) = 0. \quad (12)$$

Формули (12) показують, що функції $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ обмежені на ділянках підсилення, а на їх кінцях дорівнюють нулю. З двох перших рівнянь системи (10) визначаємо, що контактні зусилля на кінцях ділянок підсилення мають кореневу особливість з локальною осциляцією. Враховуючи це наближений розв'язок задачі можна визначити методом механічних квадратур і колокації [4-7].

Для нескінченної пластинки з еліптичним ($\varepsilon_1 = 0.2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$) отвором, контур якого на двох центральносиметричних ділянках $\gamma_1 = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, $\gamma_2 = \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$ підсилений стрижнями сталого поперечного перерізу з параметрами $\frac{E}{E_0} = \frac{1}{5}$; $\frac{h_0}{h} = \frac{4}{3}$; $\frac{h_0}{\eta} = 3$; $\frac{2\eta}{R^*} = 0.1$; $\alpha_0 = -\frac{\pi}{3}$;

$\beta_0 = \frac{\pi}{3}$ досліджено напружений стан в пластинці і підсиленнях при $p = 0$, $q = 1$.

Результати числового розрахунку контактних T_{ρ} , $S_{\rho\lambda}$, кільцевих T_{λ} зусиль на контурі отвору в пластинці та нормальних напружень $\sigma^{(c)}$ у крайніх волокнах підсилень наведені на

рис. 2, 3. Суцільні лінії побудовані для випадку $\eta = 0.1$, штрихові – $\eta = 0.05$, штрихпунктирні – $\eta = 0.025$. Суцільна лінія на епюрі $T_\lambda^{(1)}$ відповідає невідкріпленому отвору в пластинці. Напруження $\sigma_1^{(c)}$ відповідають тим поздовжнім волокнам, які сполучені з пластинкою.

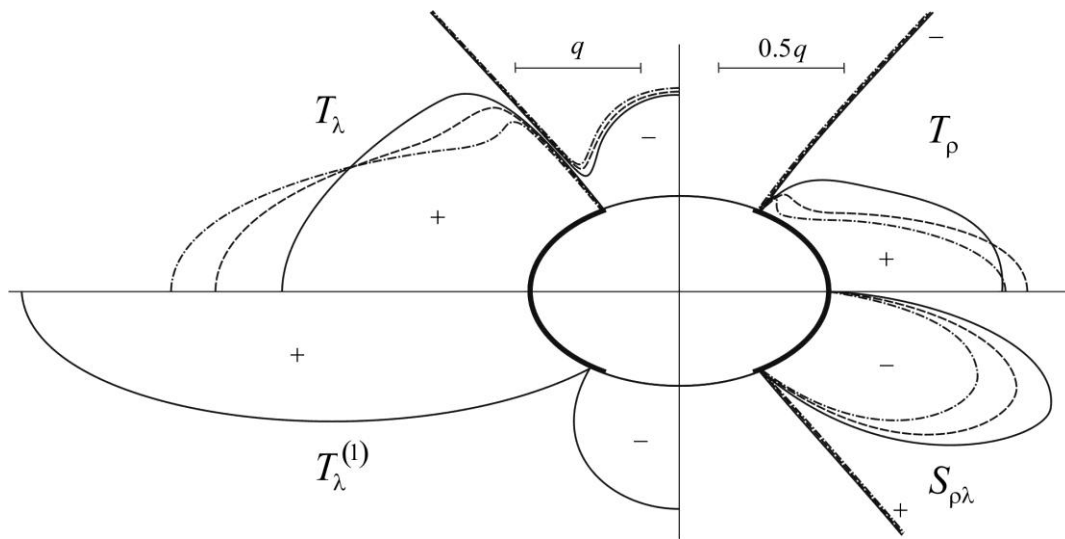


Рис. 2. Розподіл зусиль на контурі Γ в пластинці

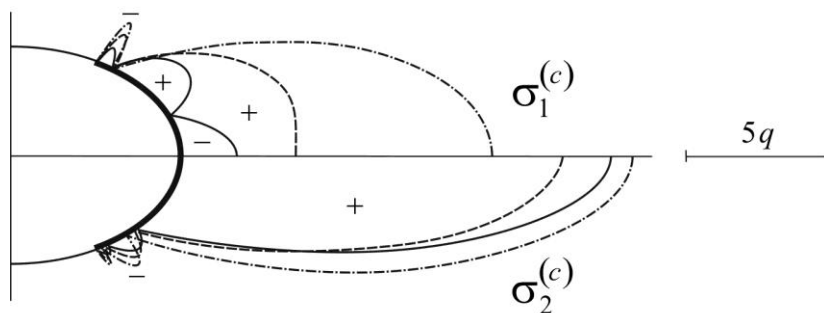


Рис. 3. Розподіл напружень у крайніх волокнах підсилень

Аналізуючи одержані результати приходимо до таких **висновків**:

- наявність підсилювальних ребер у зонах максимальної концентрації напружень на контурі отвору пластинки суттєво (до 100% при $\eta = 0.1$) зменшує максимальні кільцеві зусилля;
- для невеликих ділянок підсилення взаємовплив підсилювальних ребер незначний;
- як і у випадку одного підсилення зони різкого збільшення напружень на кінцях підсилювальних ребер в пластинці мають локальний характер і зумовлені появою в них пластичних деформацій;
- зменшенням відносної ширини підсилювальних ребер можна одержати розв'язок задачі для граничного випадку, коли підсилення моделюються пружними лініями.

Список використаних джерел:

1. Александров В.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В.М. Александров, С.М. Мхитарян. – М.: Наука, 1983. – 488 с.
2. Батишкіна Ю.В. Часткове підкріплення криволінійних отворів в пластинках тонкими пружними стрижнями змінної жорсткості / Ю.В. Батишкіна // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів. – 2003 – С. 316-318.
3. Батишкіна Ю.В. Часткове підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці двома тонкими пружними стрижнями / Ю.В. Батишкіна // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Рівне. – 2003. – В.1. – С. 16-26.

4. Сяський А. Часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці / А. Сяський, Ю. Батишкіна // Вісник ТДТУ. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 5-12.
5. Сяський А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием / А.А. Сяський // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т. 50, № 2. – С. 247-254.
6. Сяський А.О. Теоретичні основи уточненого розрахунку шліцевих з'єднань / Сяський А.О., Комбель С.М. // Машинознавство. – 2003. – №4(70). – С. 27-33.
7. Сяський А.О. Математична модель однієї задачі трибомеханіки для шліцевого з'єднання / А.О. Сяський, С.М. Комбель // Проблеми трибології. – 2004. – № 2. – С. 53-58.
8. Сяський А. Застосування методу сил для статичного розрахунку замкнених криволінійних стрижнів жорсткості / А. Сяський, Н. Шевцова // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2015. – Т. 79, № 3. – С. 24-30.
9. Писаренко, Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.

Рецензенти:

М. М. Кундрат, доктор технічних наук, професор кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування;
А.О. Сяський, доктор технічних наук, професор кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету.

Стаття надійшла до редакції 09.12.2015.