

УДК 620.171.3

Г.В. Козбур*Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя***ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПІД ВПЛИВОМ ВНУТРІШНЬОГО ТИСКУ І РОЗТЯГУ**

Отримано аналітичні умови втрати стійкості пластичного деформування тонкостінної осесиметричної оболонки, навантаженої внутрішнім тиском та розтягуючим зусиллям, із врахуванням великих деформацій. Виокремлено як чинник граничного стану геометрію оболонки.

Ключові слова: осесиметрична оболонка додатної гаусівської кривизни, пластичне деформування, великі деформації.

Г.В. Козбур**УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И РАСТЯГИВАЮЩЕГО УСИЛИЯ**

Получено аналитические условия потери стойкости пластического деформирования тонкостенной осесимметрической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления и растягивающего усилия, с учетом больших деформаций. Выделено как фактор предельного состояния оболочки ее геометрию.

Ключевые слова: осесимметрическая оболочка положительной гауссовской кривизны, пластическое деформирование, большие деформации.

H. Kozbur**ELASTIC-PLASTIC STRAINING OF AXISYMMETRIC SHELL UNDER INTERNAL PRESSURE AND TENSILE FORCES**

For providing the work of heavy loaded shells reliability it is necessary to define the limited strength that causes inadmissible plastic deformations and damages. As experimental definition of limited strength and deformation is complicated for realization, thus, for engineering calculations the issue of improvement of theoretical research of assessment of structure strength for the further use is important.

The author has previously proved analytically that thin-walled cylindrical metal isotropic materials tubes greatly loose their strength resource under the action of main strength in correlation 1:2.

The author has determined the analytical conditions of stability loss of plastic deformation of structural elements of more complicated geometrical forms, that is, of thin-walled axisymmetric shells of positive Gaussian curvature under the inner gas pressure and stretched along the meridial efforts.

The degree of influence of shell geometry (correlation between circular and meridian radii) on the shell resource is detected. The graphs of dependencies between the strength and deformation for different meanings (0...1) and different correlations between the main strength (0,1...5) demonstrate the results of analytical investigations.

Keywords: axially symmetric shell of positive Gaussian curvature, plastic deformation, large deformation.

Постановка проблеми. Актуальність проблеми ергономічності в машинобудуванні та будівельній справі, також поява нових конструкційних матеріалів та програмних комплексів для розрахунків викликала необхідність діагностування матеріалів та конструкцій, з яких вони виготовлені, з погляду їх якості, надійності, міцності, жорсткості і стійкості. Методики розрахунків на міцність за дослідями на одноосний розтяг досить повно викладені в [5; 6; 8].

Тонкостінні гладкі оболонки є найбільш економічними конструкціями, оскільки здатні витримувати великі навантаження при мінімальній товщині. Для забезпечення надійності роботи важконавантажених оболонок необхідно вміти визначати граничні значення напружень, що спричиняють недопустимі пластичні деформації та руйнування.

Експериментальне визначення граничних станів для умов складного напруженого стану є досить складним у реалізації, тому важливим є питання удосконалення теоретичного апарату оцінки міцності конструкцій для подальшого використання в інженерних розрахунках.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Попередні дослідження [9, 10] показали, що рівень граничних залишкових пластичних деформацій, що виникають у пластині чи циліндричній трубі в умовах складного напруженого стану, залежить не лише від значень граничних осьових та колових напружень, але й від співвідношення головних напружень та безрозмірної константи матеріалу p , при якій досягається максимальне значення коефіцієнта кореляції між узагальненими напруженнями та узагальненими деформаціями [11]. Доведено факт зменшення ресурсу пластичності тонкостінних металевих трубок при співвідношеннях головних напружень 1:2, що пояснює загальновідомі результати експериментів. Переважна більшість досліджень в

загальнодоступній літературі присвячена питанням стійкості циліндричних оболонок [1; 2; 3; 7]. Проте питання впливу геометрії оболонок на їх міцнісні характеристики досліджено недостатньо.

Мета роботи. Отримати аналітичні залежності для визначення граничного рівня великих залишкових пластичних деформацій тонкостінної осесиметричної оболонки в умовах безмоментного навантаження внутрішнім тиском та розтягуючим зусиллям, а також дослідити вплив геометрії оболонки, як одного з чинників граничного стану.

Постановка задачі. Осесиметрична оболонка товщини h з днищами, серединна поверхня якої утворена обертянням гладкої кривої, навантажена внутрішнім тиском q та розтягуючим зусиллям N . Прийmemo виконання гіпотез Кірхгофа-Лява теорії тонкостінних оболонок про прямолінійність та нормальність щодо серединної поверхні елемента оболонки до і після деформації, а також про відсутність нормальних напружень на площадках, паралельних до серединної поверхні. Вважатимемо, що виконуються умови існування безмоментного напруженого стану – плавність зміни радіуса кривизни поверхні, відсутність зосереджених зусиль та умови закріплення країв, що не викликають появу згинаючих моментів та поперечних зусиль. Матеріал оболонки ізотропний та нестисливий.

Виділимо елемент оболонки, провівши два близьких осьових і два ортогональних до них перерізи під кутами $d\varphi_1$ та $d\varphi_2$ відповідно, на відстані від днищ, достатній для того, щоб не враховувати крайовий ефект. Позначимо через ρ_m текучий радіус меридіана серединної поверхні елемента (меридіанний радіус), ρ_t – текучий радіус поверхні, ортогональної до меридіана (широтний радіус). Довжини граней елемента вздовж серединних радіусів у широтному та меридіальному напрямках позначимо ds_1 та ds_2 відповідно.

1. Розглянемо великі деформації оболонки, зумовлені дією внутрішнього тиску q . Навантаження осесиметричне, нормальне до серединної поверхні у всіх її точках. Деформаціями пружної ділянки знехтуємо.

Згідно допущень безмоментної теорії в гранях елемента діють лише нормальні напруження σ_t і σ_m , грані елемента є нормальними площинками. Спроектувавши всі зусилля на нормаль та врахувавши малість кутів $d\varphi_1$ та $d\varphi_2$, отримаємо рівняння рівноваги елемента:

$$\sigma_m^q h ds_1 d\varphi_2 + \sigma_t^q h ds_2 d\varphi_1 - q ds_1 ds_2 \frac{\rho_t - h/2}{\rho_t} \cdot \frac{\rho_m - h/2}{\rho_m} = 0. \quad (1)$$

Враховуючи наближені рівності $d\varphi_1 \approx ds_1/\rho_t$ та $d\varphi_2 \approx ds_2/\rho_m$, отримаємо

$$\sigma_m^q/\rho_m + \sigma_t^q/\rho_t = q/h(1 - h/2\rho_t)(1 - h/2\rho_m) \quad (2)$$

Для тонкостінних оболонок $h/\rho_t \rightarrow 0$ та $h/\rho_m \rightarrow 0$, тому (2) є рівнянням Лапласа $\sigma_m/\rho_m + \sigma_t/\rho_t = q/h$.

Друге рівняння для визначення невідомих напружень σ_t^q та σ_m^q отримаємо з умови рівноваги частини оболонки, яка відтинається кінчною поверхнею, нормальною до серединної поверхні. Власною вагою відтятої оболонки знехтуємо. Отримаємо $\sigma_m^q \cdot 2\pi r h \sin \alpha = P$, де P - осьова рівнодійна зовнішніх сил. Незалежно від форми днища $P = q\pi(\rho_t - h/2)^2 \sin^2 \alpha$. Враховуючи $r = \rho_t \sin \alpha$, отримаємо

$$\sigma_m^q = \frac{q(\rho_t - h/2)^2}{2\rho_t h} \quad (3)$$

Формули (2) і (3) утворюють систему для визначення напружень σ_m^q та σ_t^q , що виникають в осесиметричній оболонці товщини h внаслідок дії внутрішнього тиску q :

$$\begin{cases} \sigma_m^q = \frac{q(1 - h/2\rho_t)^2}{2h/\rho_t}, \\ \sigma_t^q = \frac{q}{h/\rho_t} \left(1 - \frac{h}{2\rho_t}\right) \left(1 - \frac{h}{2\rho_m}\right) - \frac{q}{2} \frac{\rho_t}{\rho_m} \frac{(1 - h/2\rho_t)^2}{h/\rho_t}. \end{cases} \quad (4)$$

Поклавши у формулах (4) $\rho_m \rightarrow \infty$, $\rho_t = R$, отримаємо частковий випадок умов (4) для циліндричної оболонки

$$\begin{cases} \sigma_m^q = \frac{q}{2h/R}(1-h/2R)^2, \\ \sigma_t^q = \frac{q}{h/R}(1-h/2R) \end{cases}$$

та сфери при $\rho_t = \rho_m = R$: $\sigma_m^q = \sigma_t^q = \frac{q}{2h/R}(1-h/2R)^2$.

Нехай на елемент оболонки крім внутрішнього тиску діє розтягуюче зусилля N , напрямлене по дотичній до меридіана в кожній точці прикладання. Тоді меридіанне напруження буде сумою двох складових: $\sigma_m = \sigma_m^q + \sigma_m^N$. Враховуючи $\sigma_m^N = N/2\pi\rho_t h$ та істинні колову ε_t , радіальну ε_r та меридіанну ε_m залишкові деформації, отримаємо вирази для визначення істинних осьових та колових напружень в загальному випадку:

$$\begin{cases} \sigma_m = \frac{q\rho_t(1+\varepsilon_t)}{2h(1+\varepsilon_r)} \left(1 - \frac{h(1+\varepsilon_r)}{2\rho_t(1+\varepsilon_t)}\right)^2 + \frac{N}{2\pi\rho_t(1+\varepsilon_t)h(1+\varepsilon_r)}, \\ \sigma_t = \frac{q\rho_t(1+\varepsilon_t)}{h(1+\varepsilon_r)} \left(1 - \frac{h(1+\varepsilon_r)}{2\rho_t(1+\varepsilon_t)}\right) \left(1 - \frac{h(1+\varepsilon_r)}{2\rho_m(1+\varepsilon_m)}\right) - \frac{q}{2\rho_m(1+\varepsilon_m)} \frac{\left(1 - \frac{h(1+\varepsilon_r)}{2\rho_t(1+\varepsilon_t)}\right)^2}{\frac{h(1+\varepsilon_r)}{\rho_t(1+\varepsilon_t)}}. \end{cases} \quad (5)$$

Радіальними напруженнями в стінці трубки нехтуємо: $\sigma_r = 0$. Виразимо з (5) q та N :

$$\begin{cases} q = \frac{\sigma_t h(1+\varepsilon_r)/\rho_t(1+\varepsilon_t)}{\left(1 - h(1+\varepsilon_r)/2\rho_t(1+\varepsilon_t)\right)\left(1 - (\rho_t(1+\varepsilon_t) + h(1+\varepsilon_r)/2)/2\rho_m(1+\varepsilon_m)\right)}, \\ N = 2\pi\rho_t(1+\varepsilon_t)h(1+\varepsilon_r) \left(\sigma_m - \frac{\sigma_t}{2} \frac{\left(1 - h(1+\varepsilon_r)/2\rho_t(1+\varepsilon_t)\right)}{\left(1 - (\rho_t(1+\varepsilon_t) + h(1+\varepsilon_r)/2)/2\rho_m(1+\varepsilon_m)\right)} \right) \end{cases} \quad (6)$$

Умову втрати стійкості процесу пластичного деформування приймаємо аналогічно, як в роботі [9]. Використаємо критерій Дорна максимального навантаження.

Оскільки ε_t , ε_m – досить малі додатні, то $\frac{1+\varepsilon_t}{1+\varepsilon_m} \approx 1$. Умова $dq = 0$ зводиться до такої:

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma_t} d\sigma_t + \frac{\partial q}{\partial \varepsilon_r} d\varepsilon_r + \frac{\partial q}{\partial \varepsilon_t} d\varepsilon_t = 0. \quad (7)$$

Введемо позначення $\frac{h}{\rho_t} = \mu$, $\frac{\rho_t}{\rho_m} = \nu$. Отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{1+\varepsilon_r}{1+\varepsilon_t} \left(1 - \frac{\mu(1+\varepsilon_r)}{2(1+\varepsilon_t)}\right) \left(1 - \frac{\nu}{2} \left(1 + \frac{\mu(1+\varepsilon_r)}{2(1+\varepsilon_t)}\right)\right) \frac{d\sigma_t}{\sigma_t} + \frac{1}{1+\varepsilon_t} \left(1 - \mu \frac{1+\varepsilon_r}{1+\varepsilon_t} - \frac{\nu}{2} + \frac{3\nu}{2} \left(\frac{\mu(1+\varepsilon_r)}{2(1+\varepsilon_t)}\right)^2\right) d\varepsilon_r - \\ & - \frac{1+\varepsilon_r}{(1+\varepsilon_t)^2} \left(1 - \frac{\nu}{2} - \nu \frac{\mu(1+\varepsilon_r)}{2(1+\varepsilon_t)} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\mu(1+\varepsilon_r)}{2(1+\varepsilon_t)}\right)^2\right) d\varepsilon_t = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для випадку тонкостінного циліндра ($\nu \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$) отримаємо раніше відоме [4]:

$$\frac{d\sigma_t}{\sigma_t} + \frac{d\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} - \frac{d\varepsilon_t}{1+\varepsilon_t} = 0. \quad (9)$$

За умови нестисливості $\varepsilon_t + \varepsilon_r + \varepsilon_m = 0$ та для $\mu^2 \rightarrow 0$ рівняння (8) набуває вигляду

$$\frac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \frac{\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{n+2}{1 - (n+1)\varepsilon_t} - \mu(n+1) - \frac{\mu\nu}{2} \frac{1 - (n+1)\varepsilon_t}{1 + \varepsilon_\theta} \varepsilon_t}{1 - \frac{\nu}{2} - \frac{\mu}{2} + \left(1 - \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}(n+1)\right)\varepsilon_t} d\varepsilon_t, \quad (10)$$

де $n = \varepsilon_m / \varepsilon_t$. Рівність (10) є звичайним диференціальним рівнянням відносно функції $\sigma_t(\varepsilon_t)$, загальний розв'язок якого дає формула

$$\sigma_t = \frac{(1 + \varepsilon_t)^\nu \left(\varepsilon_t + \frac{1 - \nu/2 - \mu/2}{1 - \nu/2 + \mu/2(n+1)} \right)^{\frac{(1-\nu/2)(1-\nu)}{1-\nu/2 + \mu/2(n+1)}}}{1 - (n+1)\varepsilon_t} \cdot C_t, \quad (11)$$

у якій постійну інтегрування C_t знайдемо, скориставшись умовою втрати стійкості пластичного деформування трубки, навантаженої лише внутрішнім тиском q , в цьому разі широтні напруження і деформація набувають своїх граничних значень $\sigma_t = \sigma_t^b$, $\varepsilon_t = \varepsilon_t^b$.

2. Розглянемо умову нульового приросту розтягуючого зусилля $dN = 0$. В цьому випадку ε_t , ε_m – малі від'ємні, тому $\frac{1 + \varepsilon_t}{1 + \varepsilon_r} \approx 1$ і друге рівняння системи (6) набуває вигляду

$$N = 2\pi r_t h (1 + \varepsilon_t)(1 + \varepsilon_r) \left(\sigma_m - \frac{\sigma_t}{2} \cdot \frac{1 - \mu/2}{1 - \frac{\nu}{2} \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \frac{1 + \varepsilon_t}{1 + \varepsilon_m}} \right). \quad (12)$$

Позначивши $\frac{\sigma_m}{\sigma_t} = k$, $\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_t} = n$ та скориставшись умовою нестисливості $\varepsilon_r = -\frac{n+1}{n}\varepsilon_m$, з (12) отримуємо:

$$N = 2\pi r_t h \sigma_m \left(1 + \frac{1}{n}\varepsilon_m\right) \left(1 - \frac{n+1}{n}\varepsilon_m\right) \left(1 - \frac{1}{2k} \cdot \frac{1 - \frac{\mu}{2}}{1 - \frac{\nu}{2} \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \frac{1 + \varepsilon_m/n}{1 + \varepsilon_m}}\right), \quad (13)$$

тобто $N = N(\varepsilon_m, \sigma_m)$. Умову $dN = 0$ запишемо у вигляді $\frac{\partial N}{\partial \varepsilon_m} d\varepsilon_m + \frac{\partial N}{\partial \sigma_m} d\sigma_m = 0$.

Після деяких перетворень отримуємо

$$\sigma_m = C_m \cdot \frac{\varepsilon_m + \frac{1 - \nu/2}{1 - \nu/2n}}{(n + \varepsilon_m) \left(\varepsilon_m - \frac{n}{n+1} \right) \left(\varepsilon_m + \frac{1 - \nu/2 - (1 - \mu/2)/2k}{1 - \nu/2n - (1 - \mu/2)/2k} \right)}. \quad (14)$$

Поклавши у (14) $\mu \approx 0$, $\nu = 0$, отримаємо умову для тонкостінної циліндричної трубки, як це показано в [9].

З умови досягнення оболонкою граничного стану пластичного деформування від дії розтягуючого зусилля, тобто при $\sigma_m = \sigma_m^b$, $\varepsilon_m = \varepsilon_m^b$ визначаємо сталу інтегрування C_m .

Таким чином отримано умови втрати стійкості (11) та (14) для випадків $\sigma_t > \sigma_m$ та $\sigma_m > \sigma_t$ відповідно. Тут параметри ν та μ характеризують геометрію оболонки, p є константою конструкційного матеріалу, k і n пов'язані співвідношенням $n = (2k - 1)/(2 - k)$.

Результати дослідження. Для аналізу умов граничного стану тонкостінної осесиметричної оболонки було взято $\mu = 0,1$ та розглянуто часткові випадки: $\nu = 0$, що відповідає циліндричній трубці (рис.1, а) та $\nu = 0,8$, що відповідає опуклій оболонці (рис.1, б), форма якої близька до сферичної. Побудовано графіки залежностей (11) та (14) у відносних координатах

$\sigma_m/\sigma_m^b \square \varepsilon_m/\varepsilon_m^b$ та $\sigma_t/\sigma_t^b \square \varepsilon_t/\varepsilon_t^b$ для різних значень k . Точка (1;1) відповідає моменту досягнення оболонкою граничного стану. В обох випадках можна спостерігати такі значення k , при яких форма оболонки практично не впливає на значення граничних навантажень. Проте із $k = 0,8$ опукла оболонка допускає більші граничні напруження, ніж циліндрична трубка.

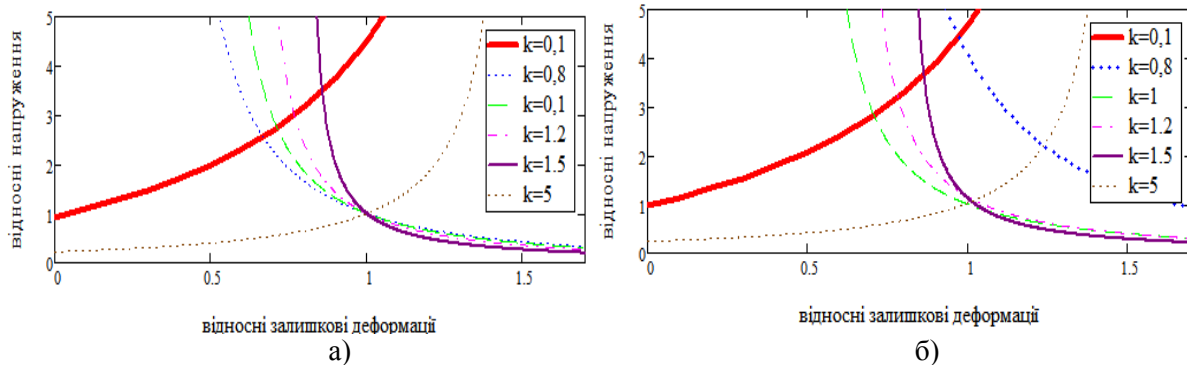


Рис.1. Графічне зображення граничних умов (11) та (14)

Висновки та перспективи. Отримано аналітичні умови втрати стійкості пластичного деформування тонкостінної осесиметричної оболонки, навантаженої внутрішнім тиском та розтягуючим зусиллям, для випадків $\sigma_t > \sigma_m$ та $\sigma_m > \sigma_t$ відповідно. Порівняльний аналіз графіків граничних умов показав, що відношення широтного та меридіального її радіусів ν може впливати на значення граничних напружень при навантаженні внутрішнім тиском та розтягуючим зусиллям. Подальше дослідження умов (11) та (14) дозволить виокремити з класу опуклих осесиметричних гладких оболонок з тонкими стінками такі, які є найбільш стійкими до навантажень із заданими співвідношеннями головних напружень.

Список використаних джерел:

1. Tomita Y., Shindo A., Nagai M. Axisymmetric deformation of circular elastic-plastic tubes under axial tension and internal pressure. / Y. Tomita., A. Shindo, M. Nagai // International Journal of Mechanical Sciences, 1984. – № 26. – С. 437-444.
2. Баженов В.Г., Ломунов В.К. Экспериментально-теоретическое исследование процесса образования шейки при растяжении стального трубчатого образца до разрыва / В. Баженов, В. Ломунов. - Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. Н.Новгород: ННГУ, 2001. С. 35–41.
3. Григолюк Э.И. Устойчивость оболочек. / Э. Григолюк, В. Кабанов — М.:Наука. 1978. — 360 с.
4. Каминский А.А. Деформационное упрочнение и разрушение металлов при переменных процессах нагружения / А.А. Каминский, В.Н. Бастун. – К. : Наук.думка, 1985. – 168 с.
5. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии / А.А.Лебедев, Б.И.Ковальчук, Ф.Ф.Гигиняк, В.П.Ламашевский; под ред. А.А. Лебедева – К. : Издательский Дом «Ин Юре», 2003. – 540 с. – ISBN 966-8088-36-0.
6. Механическое поведение материалов при различных видах нагружения / В.Т.Трошенко, А.А.Лебедев, В.А.Стрижало и др. – К. : Логос, 2000. – 571 с. – ISBN 966-581-174-6.
7. Пикуль В. В. Современное состояние теории устойчивости оболочек. / В. В. Пикуль // Вестник Дальневосточного отделения Российской академии наук. – 2008. - Вып. № 3.
8. Потапова Л.Б. Механика материалов при сложном напряженном состоянии. Как прогнозируют предельные напряжения? / Л.Б. Потапова, В.П. Ярцев. – М. : «Издательство Машиностроение-1», 2005. – 244 с. – ISBN 5-94275-197-8.
9. Шкодзінський О.К. Дослідження стійкості процесу пластичного деформування тонкостінної трубки в умовах складного напруженого стану / О.К. Шкодзінський, Г.В. Козбур. // Вісник ТДТУ. – 2009. – Т-14, №3. с. 24-31.
10. Шкодзінський О.К. Методика дослідження стійкості процесу пластичного деформування ізотропних матеріалів для плоского напруженого стану / О.К. Шкодзінський, Г.В. Козбур. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2007. – Т.12, №4. – С. 26–31.
11. Шкодзінський О.К. Методика узагальнення діаграми деформування ізотропних матеріалів для складного напруженого стану / О.К. Шкодзінський, Г.В. Козбур, С.М. Костишин. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – Т.10, №1. – С. 25–30.

Рецензенти:

Кривень Василь Андрійович, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри математичних методів в інженерії ТНТУ ім. Івана Пулюя

Галазюк Віталій Аполлонович, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри механіки ЛНУ ім. Івана Франка

Стаття надійшла до редакції 31.03.2016.