

УДК 539.3

**О.А. Мікуліч***Луцький національний технічний університет***ДИНАМІЧНА КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ОТВОРІВ У НЕСКІНЧЕННИХ ПЛАСТИНКАХ ЗА ДІЇ СЛАБКОЇ УДАРНОЇ ХВИЛІ**

*У роботі на основі інтегрального та дискретного перетворення Фур'є розроблено алгоритм числового розрахунку динамічного напруженого стану пластинок, послаблених отворами довільної форми за дії імпульсного навантаження у вигляді слабкої ударної хвилі. Висока точність підходу забезпечується застосуванням дискретного перетворення Фур'є лише на останньому етапі розрахунку при реконструкції часового розподілу динамічних кільцевих напружень. Задача в області Фур'є-зображень розв'язувалася на основі розробленої автором алгоритму, що ґрунтується на методі граничних інтегральних рівнянь та теорії функції комплексної змінної. У роботі вивчено зміну динамічних кільцевих напружень з часом у пластинках, послаблених круговим та еліптичними отворами. Побудовано часові зрізи полів розподілу напружень у тілі за дії імпульсного динамічного навантаження.*

*Ключові слова:* пластинка, напружений стан, нестационарна задача.

**Е.А. Микulich***Луцкий национальный технический университет***ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ОТВЕРСТИЙ В БЕСКОНЕЧНЫХ ПЛАСТИНКАХ ЗА ДЕЙСТВИЯ СЛАБОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ**

*В работе на основе интегрального и дискретного преобразования Фурье разработан алгоритм численного расчета динамического напряженного состояния пластинок, ослабленных отверстиями произвольной формы за действия импульсной нагрузки в виде слабой ударной волны. Высокая точность подхода обеспечивается применением дискретного преобразования Фурье только на последнем этапе расчета при реконструкции временного распределения динамических кольцевых напряжений. При этом задача в области Фурье-изображений решалась на основе разработанного автором алгоритма, основанного на методе граничных интегральных уравнений и теории функции комплексного переменного. В работе изучено изменение динамических кольцевых напряжений со временем в пластинках, ослабленных круговым и эллиптическими отверстиями. Построены временные срезы полей распределения напряжений в теле за действия импульсной динамической нагрузки.*

*Ключевые слова:* пластинка, напряженное состояние, нестационарная задача.

**O.A Mikulich***Lutsk National Technical University***DYNAMIC CONCENTRATION OF THE STRESSES NEAR THE HOLES IN INFINITY PLATES UNDER THE WEAK SHOCK WAVES**

*In this article the algorithm of numerical calculation of dynamic stress state of the plates with holes, which based on integrated and discrete Fourier transform algorithm, is developed. The dynamic concentration of stresses by the action of a weak shock wave is determined. High precision approach is based on the application of discrete Fourier transform for the calculation of the dynamic stresses in the plates only for the time distribution of stresses. The problem in the Fourier image is developed by the algorithm, which based on the method of boundary integral equations and the theory of functions of complex variable. This method was effective for the study of the stress state of the plates on a steady-state oscillation.*

*The paper studied the changing of the dynamic stresses at the plates with circular and elliptical holes over the time. The time distribution of the dynamic stresses at the boundary of the plates of a weak shock wave is calculated.*

*Keywords:* plate, stress state, non-stationary problem.

**Постановка проблеми.**

Пластинчасті елементи конструкцій, що використовуються у сучасному виробництві, мають складну форму. Деякі з них можна змоделювати у вигляді одно- чи багатозв'язних пластинок. Такі елементи конструкцій часто зазнають впливу динамічного навантаження.

Очевидно, що за дії таких навантажень, а особливо імпульсних, концентрація напружень біля отворів у таких пластинках істотно відрізнятиметься від тих, що виникають за умов квазістатичного деформування.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.**

У літературі дослідження динамічного напруженого стану нескінченних пластинок з отворами проводилося різними методами.

У роботах О. М. Гузя, В. Д. Кубенка [1] вивчення розподілу динамічних напружень у пластинці з круговим отвором від дії ударного навантаження, прикладеного до границі, проводилося на основі перетворення Лапласа з використанням методу рядів.

П. Бенерджі [2], Р. Баттерфілд, К. Бреббія [3] та ін. розв'язання задач зводили до сингулярних та регулярних інтегральних рівнянь для зображень з використанням перетворення Лапласа.

У працях Михаськіва В.В. [4], Хай О. М., Саврука М.П. [5] та ін. для розв'язання динамічних задач застосовувався метод скінченних різниць за часом.

У роботах Пастернака Я.М. [6], Кунця І.Я. [7] та ін. дослідження динамічного напруженого стану пластинок з концентраторами напружень у випадку антиплоскої деформації проводилося з застосуванням перетворення Фур'є.

В [8] розроблено методику вивчення концентрації напружень у нескінченних пластинках з отворами за усталених коливань, що ґрунтується на сумісному використанні методу граничних інтегральних рівнянь та апарату теорії функції комплексної змінної, методу механічних квадратур та колокації. Числові розрахунки показали, що розроблений алгоритм ефективний для випадку дії осцилюючого навантаження.

**Постановка завдань.** Тому доцільно поширити запропонований у [8] підхід для вивчення динамічної концентрації напружень біля отворів у пластинчатих елементах конструкцій для випадку дії слабких ударних імпульсів.

**Метою дослідження** є розробка методики дослідження динамічного напруженого стану пластинок з отворами довільної форми за дії імпульсного навантаження на основі інтегрального та дискретного перетворень Фур'є за часовою змінною.

**Викладення основного матеріалу.** При застосуванні перетворення Фур'є існує наступний зв'язок між оригіналами та зображеннями функцій [9]:

$$\tilde{f}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-i\omega t} dt, \quad f(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x, \omega) e^{i\omega \tau} d\omega. \quad (1)$$

Застосуємо перетворення Фур'є (1) для дослідження плоского динамічного напруженого стану нескінченної пластинки, що послаблена отвором чи системою отворів.

Розглянемо рівняння руху ізотропної пластинки, записане у переміщеннях [3]:

$$(c_1^2 - c_2^2) u_{i,ij} - c_2^2 u_{j,ii} + b_j = \frac{\partial^2 u_j}{\partial \tau^2}, \quad (2)$$

де  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = \{u_j(\mathbf{x}, \tau)\}$ ,  $j = 1, 2$  - вектор переміщень довільної точки  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$ ,  $c_1 = \sqrt{(\lambda + \mu) / \rho}$ ,  $c_2 = \sqrt{\mu / \rho}$  - швидкості хвиль розширення та зсуву відповідно,  $\lambda, \mu$  - сталі Ляме,  $\mathbf{b} = \{b_j\}$  - вектор масових сил,  $i = 1, 2$ ,  $(\cdot)_{,j}$  означає диференціювання по  $x_j$ .

Застосовуючи до рівняння (2) перетворення (1), отримає рівняння виду:

$$(c_1^2 - c_2^2) \tilde{u}_{i,ij} - c_2^2 \tilde{u}_{j,ii} + \tilde{b}_j - (-i\omega)^2 \tilde{u}_j = 0, \quad (3)$$

де  $\tilde{u}_j(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_j(\mathbf{x}, \tau) e^{-i\omega \tau} dt$ ,  $\tilde{b}_j(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} b_j(\mathbf{x}, \tau) e^{-i\omega \tau} dt$ , що еквівалентне рівнянню усталених коливань з циклічною частотою  $\omega$  [3]. Застосування такого підходу дасть можливість проводити дослідження у області зображень, тим самим виокремити вплив часового фактору.

Аналогічно до [3], фундаментальний тензор функцій впливу рівняння можна записати у вигляді:

$$\tilde{U}_{ij}^* = (\psi \cdot \delta_{ij} - \chi \cdot r_{,i} \cdot r_{,j}) / 2\pi\mu, \quad (4)$$

де

$$\psi = K_0(k_2 r) + (K_1(k_2 r) - c_2 / c_1 K_1(k_1 r)) / (k_2 r), \quad \chi = K_2(k_2 r) - (c_2 / c_1)^2 K_2(k_1 r),$$

$k_j = -i\omega / c_j$ ,  $K_i(\circ)$ ,  $i = 0, 1, 2$  - модифіковані функції Бесселя третього роду (або функції Макдональда),  $r$  - відстань.

Розглянемо випадок, коли на отвір у пластинці набігає плоска ударна хвиля, що аналогічно до [10] задається потенціалом у вигляді:

$$\phi(\mathbf{x}, \tau) = \begin{cases} \phi_0 f(\mathbf{x} / a - c_1 \tau / a), & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \quad \psi(\mathbf{x}, \tau) = 0.$$

Тут  $\phi_0$  - стала [10],  $a$  – деякий характерний розмір. Застосуємо до цього представлення перетворення (1). Отримаємо:

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}, \omega) = \tilde{\phi}_0 a \tilde{f}(\omega a / c_1) e^{-k_1 \mathbf{x}} / c_1 = \tilde{\phi}_0(\omega) e^{-k_1 \mathbf{x}} \quad \tilde{\psi}(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad (5)$$

$$\text{де } \tilde{\phi}_0(\omega) = \tilde{\phi}_0 \frac{a}{c_1} \tilde{f}\left(\frac{\omega a}{c_1}\right), \quad \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau.$$

У подальших дослідженнях модуляцію імпульсу за часом вибиратимемо у формі слабкої ударної хвилі [6,7]:

$$f(\tau) = p_* \tau^{n_*} e^{-\alpha_* \tau}, \quad \tau > 0, \quad n_* \geq 0,$$

$$\text{причому } \tilde{f}(\omega) = p_* (n_*!) (\alpha_* + i\omega)^{-n_*-1}.$$

Дослідження динамічного напруженого стану у пластинці проводитимемо на основі підходу, аналогічного до [8], що виявився ефективним для багатоз'язних областей з отворами різної форми. У [8] для розв'язання задачі у випадку усталених коливань використовувався метод граничних інтегральних рівнянь сумісно з апаратом теорії функції комплексної змінної.

Граничні умови задачі запишемо у вигляді [3]:

$$\sigma_n|_L = \sigma(\mathbf{x}, \tau), \quad \tau_{sn}|_L = 0, \quad (6)$$

де  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  - задані функції,  $L$  – границя області, яку займає пластинка. Застосуємо до (6) перетворення Фур'є (1):

$$\tilde{\sigma}_n|_L = \tilde{\sigma}(\mathbf{x}, \omega), \quad \tilde{\tau}_{sn}|_L = 0, \quad (7)$$

$$\text{де } \tilde{\sigma}_n(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_n(\mathbf{x}, \tau) e^{-i\omega \tau} d\tau, \quad \tilde{\tau}_{sn}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{sn}(\mathbf{x}, \tau) e^{-i\omega \tau} d\tau.$$

При визначенні розв'язку рівнянь (3) з врахуванням умов (7) для першої основної задачі потенціальне зображення загального розв'язку для переміщень виберемо у вигляді [10]:

$$u_i(\mathbf{x}, \tau) = \int_L p_j(\mathbf{x}^0, \tau) \cdot U_{ji}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0, \tau) ds, \quad (8)$$

причому  $p_1, p_2 \in$  комплексними невідомими потенціальними функціями,  $L$  – границя області пластинки. Інтегрування вздовж границі проводиться за змінними  $x_1^0, x_2^0$ , причому  $\mathbf{x}^0 = \{x_1^0, x_2^0\}$ .

Представлення для зображень функцій  $U_{ij}^*$  у вигляді [3] вибрано з врахуванням умов Зоммерфельда [10].

Застосуємо до представлення (8) перетворення Фур'є (1):

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}, \omega) = \int_L \tilde{p}_j(\mathbf{x}^0, \omega) \cdot \tilde{U}_{ji}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0, \omega) ds. \quad (9)$$

Для визначення невідомих на границі функцій  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$  розрахуємо напруження в пластинці у випадку плоского напруженого стану за формулами [10]:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_n &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2} \left( e^{-2i\alpha} \left( \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + i\sigma_{12} \right) + e^{2i\alpha} \left( \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - i\sigma_{12} \right) \right); \\ \tilde{\tau}_{sn} &= \frac{i}{2} \left( e^{2i\alpha} \left( \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - i\sigma_{12} \right) - e^{-2i\alpha} \left( \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + i\sigma_{12} \right) \right); \end{aligned} \quad (10)$$

тут  $\alpha$  – кут між нормаллю до площинки та віссю  $Ox_1$ .

Підставивши представлення (9) з урахуванням виразів для функцій впливу (4) у формули (10), отримаємо залежності виду:

$$\tilde{\sigma}_n = \int_L f_1(z, t) q dt + \int_L f_2(z, t) \bar{q} d\bar{t}; \quad \tilde{\tau}_{sn} = \int_L g_1(z, t) q dt + \int_L g_2(z, t) \bar{q} d\bar{t}; \quad (11)$$

причому  $q = ip \frac{ds}{dt}$ ,  $t = x_1^0 + ix_2^0$ ,  $z = x_1 + ix_2$ ,  $p = p_1 + ip_2$ , функції  $f_i, g_i$ ,  $i = 1, 2$  є відомими та визначаються на основі представлення (4).

Підінтегральні функції  $f_i, g_i$ ,  $i = 1, 2$  при малих значеннях аргументу є нерегулярними. Для встановлення їх особливості використаємо асимптотичні вирази для функцій Бесселя третього

роду [11]. Виділивши нерегулярні складові та використавши формул Племеля-Сохоцького [10] при граничному переході у представленнях (11), отримаємо систему інтегральних рівнянь для знаходження невідомих на границі функцій  $q, \bar{q}$  виду:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{q}{2} - \operatorname{Im} \left( A_1 \int_L \frac{q dt}{z-t} + \frac{dz}{d\bar{z}} \left( A_2 \int_L \frac{\bar{q} d\bar{t}}{z-t} + A_3 \int_L \frac{(\bar{z}-\bar{t})q}{(z-t)^2} dt \right) \right) + \int_L f_1^R(z, t) q dt + \int_L f_2^R(z, t) \bar{q} d\bar{t} = \Phi_1; \\ \operatorname{Im} \frac{q}{2} - \operatorname{Re} \left( \frac{dz}{d\bar{z}} \left( A_2 \int_L \frac{\bar{q} d\bar{t}}{z-t} + A_3 \int_L \frac{\bar{z}-\bar{t}}{(z-t)^2} q dt \right) \right) + \int_L g_1^R(z, t) q dt + \int_L g_2^R(z, t) \bar{q} d\bar{t} = \Phi_2; \end{aligned} \quad (12)$$

тут для випадку плоского напруженого стану сталі  $A_i, i=1, 2, 3$  мають вигляд:  $A_1 = (1+\nu)/(4\pi\nu)$ ;  $A_2 = (3-\nu)/(4\pi)$ ;  $A_3 = (1+\nu)/(4\pi)$ ,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона, функції  $\Phi_1$  та  $\Phi_2$  є відомими та визначаються на основі (7), функції  $f_i^R, g_i^R, i=1, 2$  є регулярними функціями.

Для числового розв'язання системи рівнянь (12) використаємо метод механічних квадратур та колокації [12]. Використовуючи для інтегралів з особливістю типу Коші уточнені квадратурні формули [12], отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$\begin{aligned} \frac{q_s + \bar{q}_s}{4} + \sum_{n=1}^N f_1(z_s, t_n) q_n g'_n + \sum_{n=1}^N f_2(z_s, t_n) \bar{q}_n \bar{g}'_n = \Phi_{1s}; \\ \frac{q_s - \bar{q}_s}{4i} + \sum_{n=1}^N g_1(z_s, t_n) q_n g'_n + \sum_{n=1}^N g_2(z_s, t_n) \bar{q}_n \bar{g}'_n = \Phi_{2s}; \end{aligned} \quad (13)$$

причому  $t_n = g(\varphi_n), z_s = g(\varphi_s), \varphi_n = hn, \varphi_s = \varphi_n + \frac{h}{2}, h = \frac{2\pi}{N}, g(\varphi)$  – параметричне задання границі області  $L, N$  – кількість вузлових точок.

Після знаходження невідомих з системи (13) визначення кільцевих напружень на границі проводилося на основі формул [10] шляхом виділення нерегулярних складових та використання формул Племеля-Сохоцького при граничному переході за формулами:

$$\tilde{\sigma}_\theta = \nu \operatorname{Re} \frac{q}{2} - \operatorname{Im} \left( A_1 \int_L \frac{q dt}{z-t} - \frac{dz}{d\bar{z}} \left( A_2 \int_L \frac{\bar{q} d\bar{t}}{z-t} + A_3 \int_L \frac{(\bar{z}-\bar{t})q}{(z-t)^2} dt \right) \right) + \int_L y_1^R(z, t) q dt + \int_L y_1^R(z, t) \bar{q} d\bar{t}; \quad (14)$$

де функції  $y_1^R(z, t), y_2^R(z, t)$  не мають особливостей.

Для визначення оригіналів отриманих напружень використаємо представлення виду, отримане на основі (1):

$$\sigma_\theta(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\sigma}_\theta(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

що при числових розрахунках невідомих величин можна реалізувати на основі дискретного перетворення Фур'є, яке виявилось ефективним при розрахунках за антиплоскої деформації [6]. У даному випадку, оскільки значення зображень кільцевих напружень є комплексними, для розрахунку їх оригіналів використаємо модифіковане дискретне перетворення Фур'є:

$$\sigma_\theta(T_k) = \frac{1}{T} \left( \sum_{n=-K}^{K-1} \tilde{\sigma}_\theta(\omega_n) \exp\left(2\pi i \frac{n \cdot k}{K}\right) - \sum_{n=-K}^{K-1} \tilde{\sigma}_\theta(\omega_n) \right), T_k = \frac{kT}{K}, k = -K..K-1. \quad (15)$$

Тут  $K$  — кількість елементів дискретної вибірки,  $\omega_n = 2\pi n/T$  — частоти вибірки. Для оптимізації числових розрахунків представлення (15) зручно обчислювати за допомогою швидкого дискретного перетворення Фур'є [9], при якому  $K = 2^m, m$  — ціле додатне число.

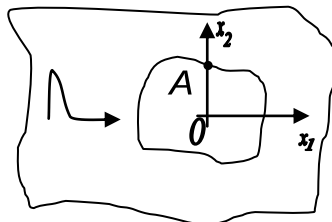


Рис. 1. Схема навантаження пластинки

Розглянемо нескінченну ізотропну пружну пластинку, що послаблена отвором довільної форми (рис. 1). Область, яку займає пластинка, позначимо через  $D$ . Прийmemo, що ця область обмежена граничним контуром  $L$ . Віднесемо пружну пластинку до декартової системи координат  $Ox_1x_2$ , яку розмістимо у центрі ваги пластинки. Дослідимо зміну розподілу напружень на границі отвору у пластинці за дії плоскої слабкої ударної хвилі (5).

Числові розрахунки проводилися на основі швидкого дискретного перетворення Фур'є на основі (15) для випадку  $m=9$ . При визначенні невідомих на границі функцій з системи (13) було вибрано  $N=140$  вузлових точок для випадку кругового отвору,  $N=200$  — для еліптичного отвору. Еліптичний отвір у пластинці розміщувався так, щоб його більша піввісь була вздовж осі  $Ox_1$ . Для опису границі отворів використано функції конформного відображення квадратної та прямокутної області на круг одиничного радіуса [13].

При розрахунках приймалося аналогічно до [6, 7]  $p_*=185$ ;  $n_*=2$ ;  $\alpha_*=10$ ;  $a=1$ . Дослідження проводилися для інтервалу безрозмірного часового параметра  $T \in [0, 8a/c_1]$ .

Оскільки отримані на основі представлення (14) значення зображень кільцевих напружень  $\sigma_\theta$  в загальному випадку є комплексними, тому на рис. 2 представлено залежності зміни з часом дійсної та уявної величин динамічних кільцевих напружень:  $\sigma_\theta^R = \text{Re}(\sigma_\theta)$ ,  $\sigma_\theta^I = \text{Im}(\sigma_\theta)$ , обчислених у точці  $A$  границі.

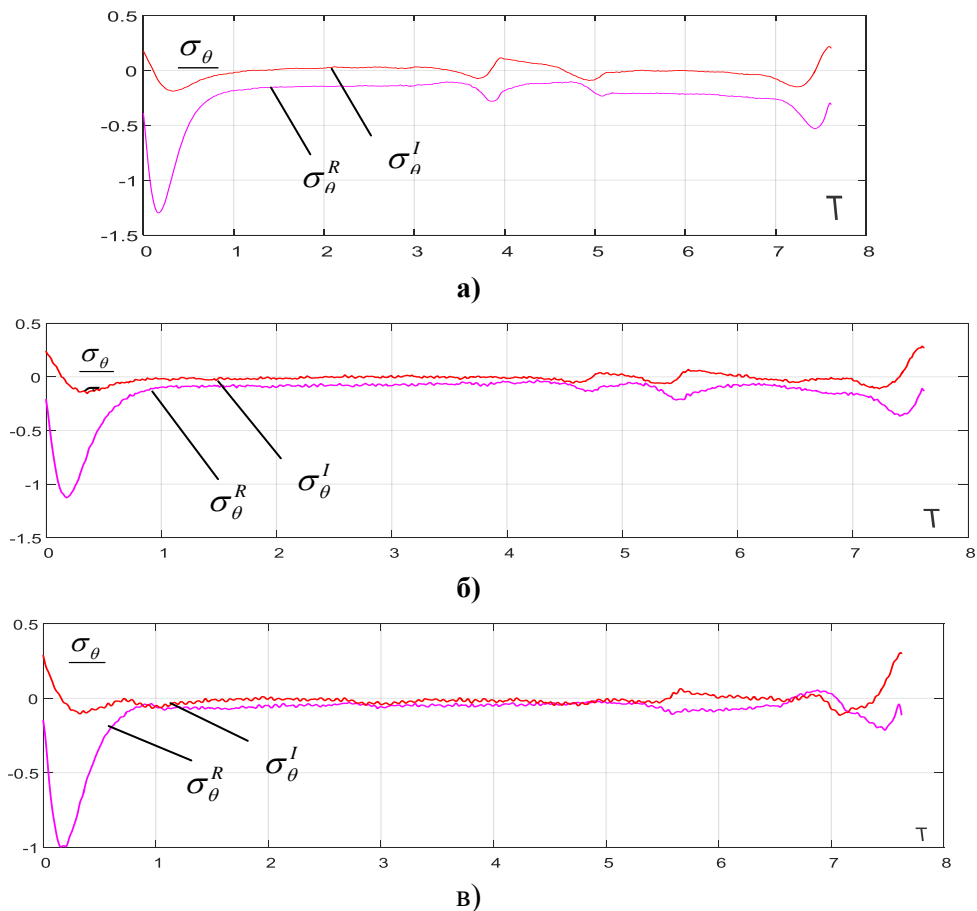


Рис. 2. Динамічна концентрація напружень на границі пластинки, послабленої: а – круговим отвором; б – еліптичним отвором з відношенням півосей 2, в – еліптичним отвором з відношенням півосей 5

З рис. 2. можна проаналізувати поширення імпульсів у пластинці, що приходять до границі отвору з часом. Збільшення величин складових напружень  $\sigma_\theta^R$  та  $\sigma_\theta^I$ , що починається при  $T=0$ , відповідає «приходу» на «кінець» отвору збурювального імпульсу  $\phi(\mathbf{x}, \tau)$ . Подальші зростання напружень у пластинці пов'язані з поширенням відбитих та перевідбитих імпульсів від країв отвору.

Якісну картину перебігу нестационарного процесу у пластинці з часом можна побачити, дослідивши розподіл динамічних напружень вздовж границі отвору. На рис. 3 наведено відповідні

числові результати для випадку кругового отвору. Розрахунки були виконані для вказаних вище значень відповідних величин. Тут крива 1 відповідає значенню часового параметра  $T = 0$ ; крива 2 —  $T = 0,2a/c_1$ , крива 3 —  $T = 0,42a/c_1$ , крива 4 —  $T = 1,92a/c_1$ , крива 5 —  $T = 4,06a/c_1$ .

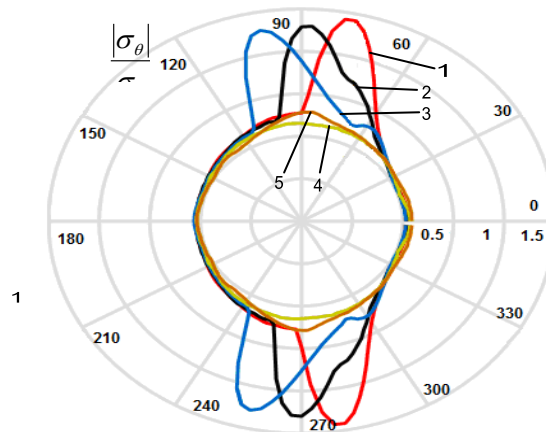


Рис. 3. Розподіл динамічних напружень на границі кругового отвору з часом

З рис. 3 видно, що за дії слабкої ударної хвилі у момент часу  $t=0$  максимальні динамічні напруження на границі кругового отвору виникають не у точці  $A$  як для випадку усталених коливань [1], а в її околі. Подальший розподіл напружень у пластинці істотно залежить від дефрагованих від її отвору хвиль.

**Висновки.** В статті розроблено алгоритм числового розрахунку динамічної концентрації напружень у пластинках, послаблених отворами довільної форми за дії імпульсного навантаження у вигляді слабкої ударної хвилі. Перевагою запропонованого підходу полягає у заданні падаючої хвилі для області зображень у вигляді (5), що дає можливість розрахувати за формулою (15) значення кільцевих напружень для моментів часу  $T_k \in [0, T]$ , а не лише половини з них, як це відбувається при розрахунках на основі дискретного перетворення Фур'є [9].

Записавши дискретні часові подання для переміщень, що аналогічні до формули (15), можна проаналізувати повну картину перебігу нестационарного хвильового процесу у пластинках.

#### Список використаних джерел:

1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 308 с.
2. Banerjee P.K. Boundary element method in engineering science, McGraw Hill, New York, London, 1994. – pp. 65-82.
3. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. Пер. с англ. / Под. ред. Григолюка Э.И. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
4. Mykhas'kiv V.V., Khay O.M. Interaction between rigid-disc inclusion and penny-shaped crack under elastic time-harmonic wave incidence // International Journal of Solids and Structures. – 2009. – Vol. 46, No. 3-4. – P. 602-616.
5. Саврук М. П. Новый метод розв'язування динамічних задач теорії пружності та механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – № 4. – С. 7–11.
6. Я. Пастернак, Г. Сулим, Р. Пастернак. Концентрація динамічних напружень біля тонких пружних включень за умови антиплоскої деформації. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2013. — вип. 18. — С. 157-164.
7. Кунець Я. І., Матус В. В., Пороховський В. В. Динамічна концентрація напружень в околі заглибленого тонкого прямолінійного включення низької жорсткості в умовах антиплоскої деформації // Мат.-методи. та фіз.-мех. поля. — 2007. — Т. 50, № 1. — С. 136-139.
8. Мікуліч О.А. Дифракція пружних хвиль у нескінченних двозв'язних пластинках. — Вісник Донецького університету: Науковий журнал. Серія А «Природничі науки» — Донецьк: ДонНТУ, 2008. — № 2/2008. — С. 114-120.
9. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. — Москва: Мир, 1974. — 464 с.
10. Божидарнік В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності. — Л.: Світ, 1994. — 560 с.
11. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 486 с.
12. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. — К.: Наук. думка, 1981. — 324 с.
13. Савин Н.Г. Распределение напряжений около отверстий. — К.: Наукова думка, 1968. — 888 с.

#### Рецензенти:

Пастернак Ярослав Михайлович, д. ф.-м. н., доцент  
Сулим Георгій Теодорович, д. ф.-м. н., професор

Стаття надійшла до редакції 25.03.2016.