513.88:517.44
539.3

[1]Войтик Т.Г., [2]Полетаев Г.С., [3]Яценко С.А.
[1]Одесский национальный морской университет,
[2]Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
[3]Одесская национальная морская академия

МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОЛЮСАМИ ИЗ РАЗНЫХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ ПО УРАВНЕНИЮ С ПРАВИЛЬНО ФАКТОРИЗУЕМЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Поставлена и решена задача с правильно факторизуемым рациональным коэффициентом, родственная задаче типа Римана-Гильберта-Привалова из теории аналитических функций. Метод основан на теореме, вытекающей из результатов второго автора для соответствующих абстрактных уравнений в кольце со специальной факторизационной парой подколец. Используются проекторы на подкольца, факторизация коэффициентов, разложения в суммы простейших рациональных дробей. Процедура свободна от аппарата теории интеграла типа Коши, требования гёльдеровости функций, индекса.

Ключевые слова: *Задача Римана, уравнение, факторизация, кольцо, проектор, факторизационная пара.*

Т.Г. Войтік, Г.С. Полєтаєв, С.А. Яценко

МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ З ПОЛЮСАМИ ІЗ РІЗНИХ НАПІВПЛОЩИН ПО РІВНЯННЮ З ПРАВИЛЬНО ФАКТОРИЗУЄМИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

Поставлена та розв'язана задача з правильно факторизуємим коефіцієнтом, споріднена задачі Рімана-Гільберта-Привалова із теорії аналітичних функцій. Метод базується на теорії, що випливає із результатів другого автора для відповідних абстрактних рівнянь в кільці з спеціальною факторизаційною парою підкілець. Використовуються проектори на підкільця, факторизація коефіцієнтів, розклади раціоналиніх функцій в суми простих раціональних дробів. Процедура вільна від апарату інтеграла типу Коші, вимоги гьольдеровості функції, індекса.

Ключові слова: *Задача Рімана,рівняння, факторизація, кільце, проектор, факторизаційна пара.*

T.G. Voytik, G.S. Poletaev, S.A. Yatsenko

METHOD OF FINDING RATIONAL FUNCTIONS WITH THE POLES FROM DIFFERENT SEMI-PLANES ON THE EQUATION WITH CORRECT FACTORIZABLE COEFFICIENT

A problem was posted and solved with correctly factorable rational coefficient. It was posed from the theory of analytical function such as Riemann-Hilbert-Privolov problem. The method is based on the theory, which is derived from the second author's result for corresponding of abstract equations in ring, with special factorization pair of subrings. The projections are used on a subrings and factorization of coefficient, decomposition into a sum of simple rational fractions. Procedure is free from the theory of Cauchy integral, Holder requirements, and index.

Keywords: *the Riemann problem, equation, factorization, ring, projection, factorization pair.*

1. Постановка проблемы. Известна важная роль теории уравнений, в частности, из задачи Римана (Римана-Гильберта, Римана-Гильберта-Привалова) и связанных с нею уравнений для аналитических функций. Эта задача возникает или используется в теоретических и прикладных разделах математики, механики, их приложений. В том числе, в теории упругости, задачах о кручении. Возникает в теории некоторых видов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, интегральных уравнений типа свёртки, при изучении соответствующих дифференциальных уравнений математической физики [1-13].

Важная роль теории уравнений, в частности, из задачи Римана – Гильберта и родственных обосновывает необходимость поиска и исследования, новых задач и уравнений, которые могут использоваться для понимания свойств уже известных, а также при моделировании. Поиска общих упрощающих методов исследования, установления условий разрешимости, представления решений в замкнутой форме, при их существовании. В том числе, точных методов, минимально опирающихся на теорию функций комплексного переменного, свободных от аппарата теории интеграла типа Коши. Стало быть, построение элементов общего метода нахождения рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по линейному уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом является актуальным.

2. Анализ исследований и публикаций. Существующие, точные методы исследования задачи Римана – Гильберта восходят, в частности, к работам И.И. Привалова, Ф.Д. Гахова, Ю.И. Черского, М.Г. Крейна и другим. На связь теории интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов и этой задачей, впервые обратил внимание И.М.

Рапопорт (1948) [1]. Среди работ, связанных с теорией задачи Римана-Гильберта и теорией интегральных уравнений типа свёртки, но посвящённых абстрактным уравнениям в ассоциативных кольцах со специальной парой подколец, укажем [10-12, 14- 17]. В силу отмеченного в [1] (с. 114), со ссылкой на книгу Н.И. Мусхелишвили (1945), можно заключить, что, обычно, эту задачу решали, в основном, в предположении выполнения для соответствующих функций дополнительного условия Гёльдера на контуре. Часто применялся аппарат теории интеграла типа Коши, понятие индекса. В целом, основанные на применении теории функций комплексной переменной, аппарата теории интеграла типа Коши [1-4], подходы приводят к необходимости преодоления значительных аналитических трудностей. Не всегда оправданных. Новые идеи и результаты иных возможных методов исследования, в иных предположениях и без требования гёльдеровости функций, даны в [1]. Можно также пытаться применить соответствующие результаты из [10-12, 16, 17]. Публикации, в том числе [8], подтверждают сохранение интереса к использованию задачи Римана.

Наряду с другими, важен случай, когда в такого типа задаче Римана-Гильберта-Привалова коэффициенты являются рациональными функциями [1-5, 13]. В [5], например, этот случай возникает в связи с исследованием дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами на оси и его редукцией. В рассматриваемой ситуации, от задачи Римана-Гильберта-Привалова можно перейти к родственной задаче, поставленной далее в п. 4. При этом, считая искомые функции, принадлежащими соответствующим подмножествам рациональных. Однако, свободных от использования аппарата интегралов типа Коши, достаточно простых и исчерпывающих подробно и строго изложенных, методов исследования такого типа задач авторам не известно. Отсутствовала также, соответствующая предположениям, теорема существования с удобным представлением решений в замкнутой форме. Поэтому актуальны поиски путей упрощения элементов исследования рассматриваемой в статье ниже родственной задачи, поставленной в общем виде.

3. Цель статьи. Целью работы является обоснование проекторного метода, упрощающего теорию родственной типа Римана-Гильберта-Привалова задачи, постановка которой сформулирована далее. А, именно, задачи о нахождения двух рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по линейному уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом. Цель достигается посредством установления и обоснования соответствующей общей теоремы, справедливой в рассматриваемых ситуациях. В качестве контура здесь выступает сомкнутая вещественная ось [1-19]. Результаты развивают и дополняют [18, 19].

4. Основные результаты. Для строгой формулировки постановки рассматриваемой задачи и главного результата, введём следующие обозначения и определения.

4.1. Используя [10-14, 17, 19], через R обозначим произвольное, вообще, некоммутативное и, возможно, неассоциативное кольцо с единицей e. Пусть p^+, p^- – коммутирующие проекторы,

т.е. аддитивные и идемпотентные отображения $R \to R$. Положим: $p^0 := p^+ p^- (= p^- p^+)$, $p_\mp := p^\mp - p^0$. Для любого подмножества $B \subseteq R$ обозначим $B^{\mp,0} := p^{\mp,0} B$; $B_\mp := p_\mp B$; $B^* = B^+ + B^-$; $B_* = B_+ + B_-$. Для любого $x \in R$ полагаем $x^{\mp,0} := p^{\mp,0} x$; $x_\mp := p_\mp x$. Обратный в R для обратимого в R элемента $x \in R$ будем обозначать символом x', снабженным, при необходимости, дополнительными. Для произвольных подмножеств $A, B \subseteq R$ определим множество $inv(A,B) := \{x \in A : x'$ существует и принадлежит $B\}$. Положим $inv(A,A) := invA$. Элемент u^+ [– элемент v^0, элемент w^-] назовем правильным [10], если $u^+ \in invR^+$ [$v^0 \in invR^0, w^- \in invR^-$]. Пару подколец $\left(R^+, R^-\right)$ [$\equiv \left(R^-, R^+\right)$] кольца R с единицей e будем называть его факторизационной парой *(ФП),* если она порождена действующими в R коммутирующими проекторами p^+, p^-: $R^\mp = p^\mp(R)$, и выполняются следующие аксиомы (ср. [10]):

$e \in R^0 \left(= R^\mp \bigcap R^\pm\right)$;

$p^0 (= p^\mp p^\pm)$ – *кольцевой гомоморфизм* R^+ *и* R^- *в* R^0;

$R^+R^-, R^-R^+ \subseteq R^+ + R^- \quad \left(:= R^*\right)$

Всякое кольцо R с единицей e, рассматриваемое вместе с его фиксированной факторизационной парой подколец (R^+, R^-) $[\equiv (R^-, R^+)]$ будем называть «кольцом с факторизационной парой». Кратко, кольцом с *ФП*.

4.2. Будем говорить, что элемент $a \in R$ допускает в коммутативном кольце R факторизацию по факторизационной паре (R^+, R^-), если существуют элементы $r^+ \in R^+$, $s^0 \in R^0$, $t^- \in R^-$ такие, что:

$$a = r^+ s^0 t^- \tag{1}$$

Факторизация (1) называется: правильной факторизацией *(п.ф.),* если $r^+ \in R^+$, $s^0 \in R^0$, $t^- \in R^-$ – правильные элементы [10-15]; – нормированной факторизацией *(н.ф.),* если $t^0 = r^0 = e$; – нормированной правильной факторизацией *(н.п.ф.),* если она является *(п.ф.)* и $t^0 = r^0 = e$. Известно [10-12, 14, 15], что правильную факторизацию элемента из R по *ФП* (R^+, R^-) можно нормировать. Нормированная правильная факторизация единственна.

4.3. Обозначим через $\Re_r$ совокупность всех рациональных функций, вообще, комплексного переменного $z \in C$, все полюсы которых конечны и невещественны. Пределы функций из $\Re_r$ на бесконечности конечны. Пусть $\Re_r^{\,+}$ ($\Re^-{}_r$) - совокупности функций, из $\Re_r$, все полюсы которых расположены внутри нижней (верхней) полуплоскости $\Pi_-(\Pi_+)$, соответственно, (*Ср.* [1]; с.13,14). Проверяется, что $\Re_r$ - кольцо с мультипликативной единицей $e = f(z) := 1, z \in C$ относительно обычных операций сложения и умножения функций, а $\Re_r^{\,+}, \Re_r^{\,-}$ - его подкольца с единицей. Проекторы на подкольца: $\Re_r \to \Re_r^{\,\mp}$ обозначим $P^{\mp}$, соответственно, и введём по следующему правилу. Проектор P^+ (проектор P^-) каждой функции из $\Re_r$ ставит в соответствие часть её разложения в сумму простейших дробей первого и второго типов с полюсами в Π_- (в Π_+), соответственно. Эти проекторы коммутирующие. Полагаем:

$$P^0 = P^+P^-, P_+ = P^+ - P^0, P_- = P^- - P^0, \Re_r^{\mp,0} = P^{\mp,0}(\Re_r), \text{ где } \Re_r^0 = \Re_r^+ \cap \Re_r^- .$$

Можно показать, что $\Re_r$ является кольцом с факторизационной парой ($\Re_r^{\,+}, \Re_r^{\,-}$).

4.4. На основе введенных обозначений, приведём постановку рассматриваемой задачи в следующей форме.

Задача. « Для заданных рациональных функций – коэффициентов $A(x), B(x), -\infty < x < \infty$ найти пару рациональных функций $X^+(z) \in \Re_r^{\,+}, Y_-(z) \in (\Re_r)_-$, из $\Re_r$, все полюсы первой из которых, при существовании, расположены в нижней, а второй – в верхней полуплоскостях, соответственно, и удовлятворяющих на сомкнутой вещественной оси уравнению:

$$A(x)X^+(x) + Y_-(x) = B(x), \ -\infty < x < \infty . \tag{2}$$

4.5. Главный результат. При решении Задачи в $\Re_r$, когда коэффициенты порождаются функциями из $\Re_r$, будем исходить из очевидной возможности продолжения каждой из функций и, следовательно, всего соотношения (2) на всю комплексную плоскость, заменой вещественного переменного x комплексной переменной z, не выходя из соответствующего подкласса рациональных функций. Так вместо (2) возникает уравнение:

$$A(z)X^+(z) + Y_-(z) = B(z), \ z \in C; \tag{3}$$

где, по предположению, $A(z), B(z) \in \Re_r,\ z \in C$, - известные функции; $X^+(z) \in \Re_r^+, Y_-(z) \in (\Re_r)_-$, - искомые.

Учитывая возможность реализации в кольце R = $\Re_r$ с ФП $(\Re_r^+, \Re_r^-)$ результатов из [11, 12], или [16, 17], непосредственно, при соответствующих предположениях, можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема. Пусть функция $A(z) \in \Re_r$ не имеет вещественных нулей и $\lim\limits_{z\to\infty} A(z) \neq 0$.

Если, при этом, $A^{-1}(z)$ допускает нормированную правильную факторизацию по факторизационной паре $(\Re_r^+, \Re_r^-)$:

$A^{-1}(z) = \tilde{A}^+(z)S^0(z)T^-(z);\ z \in C$,

тогда уравнение (3), относительно $X^+(z) \in \Re_r^+, Y_-(z) \in (\Re_r)_-$, при любой правой части

$B(z) \in \Re_r$ имеет единственное решение. Его можно найти по формулам:

$$X^+(z) = \Gamma^+(z)S^0P^+[T^-(z)B^+(z)],$$

$$Y_-(z) = B_-(z) + T^{-'}(z)P_-[T^-(z)B^+(z)], \tag{4}$$

где

$T^{-'}(z) := (T^-(z))^{-1}$.

Доказательство. Очевидно, кольцо $\Re_r$ ассоциативное и коммутативное. Выше отмечено, что $\Re_r$ является кольцом с факторизационной парой $(\Re_r^+, \Re_r^-)$. Поэтому заключаем, что утверждения теоремы вытекают, например, из общей теоремы работ [16, 17] при

$R = \Re_r$ с *ФП* $(\Re_r^+, \Re_r^-)$.

Заметим, что всякая, являющаяся решением (3), пара рациональных функций $X^+(z) \in \Re_r^+, Y_-(z) \in (\Re_r)_-$, сужением на сомкнутую вещественную ось, порождает искомое решение уравнения (2):

$$X^+(x) = X^+(z)\downarrow_{z=x},\quad Y_-(x) = Y_-(z)\downarrow_{z=x};\ -\infty < x < \infty, \tag{5}$$

и, следовательно, доставляет решение поставленной *Задачи.*

5. Иллюстративный пример. Решим *Задачу,* поставленную по краевому условию на сомкнутой вещественной оси, заданному уравнением (2), при

$$A(x) = \frac{x^2+1}{x^2+9};$$

$$B(x) = \frac{x^2+1}{(x^2+4)(x+5i)}.$$

В этом случае:

$$A^{-1}(z) = \tilde{A}^+(z)S^0(z)T^-(z) = \frac{z+3i}{z+i} \bullet 1 \bullet \frac{z-3i}{z-i},$$

где

$$\tilde{A}^{+}(z)=\frac{z+3i}{z+i}; \qquad S^{0}(z)=1; \quad T^{-}(z)=\frac{z-3i}{z-i}.$$

Отсюда,

$$(T^{-}(z))^{-1}=\frac{z-i}{z-3i}.$$

Разложение для $B(z)$ получаем в виде:

$$B(z)=-\frac{1}{4\left(z+2i\right)}+\frac{3}{28\left(z-2i\right)}+\frac{8}{7\left(z+5i\right)}.$$

Используя проекторы, отсюда находим:

$$B^{+}(z)=-\frac{1}{4(z+2i)}+\frac{8}{7(z+5i)};$$

$$B^{+}(z)=\frac{1}{28}\cdot\frac{25z+29i}{\left(z+2i\right)\left(z+5i\right)};$$

$$B_{-}(z)=\frac{3}{28\left(z-2i\right)}.$$

Реализуя формулы (4), находим выражение для решения:

$$X^{+}(z)=\frac{z+3i}{z+i}\bullet\left[\frac{32}{21(z+5i)}-\frac{5}{12(z+2i)}\right], \tag{6}$$

$$Y_{-}(z)=-\frac{3(z-i)}{28(z-2i)(z-3i)}; z\in C.$$

Подстановкой, можно убедиться, что это действительно решение уравнения (3). Стало быть, при $z=x,$ где $x\in\{-\infty;\infty\}$, рациональные функции (6) удовлетворяют также уравнению (2). Следовательно, формулы (6) дают и решение рассмотренной ***Задачи.***

Выводы и перспективы. В рассматренной выше ситуации, от задачи Римана-Гильберта-Привалова можно перейти к родственной задаче, считая искомые функции, принадлежащими соответствующим подмножествам рациональных. Эта родственная задача с правильно факторизуемым рациональным коэффициентом поставлена и решена. Её решение, в соответствующих предположениях построено в явном виде. Построения проще, опирающихся на теорию интеграла типа Коши, понятие индекса, условие Гёльдера, восходящих к Ф.Д. Гахову и другим в упомянутой задаче Римана - Гильберта. Основано на результатах второго автора для соответствующих уравнений в кольце со специальной факторизационной парой подколец. Используются основные положения теории колец и функционального анализа; - проекторы, а также возможность непосредственно провести требуемую для применения, установленного в [11, 12, 16, 17] факторизацию.

Согласно установленной ***Теореме*** и, в силу изложенного, можно так обозначить метод решения конкретных реализаций уравнений вида (2), (3) и поставленной абстрактной ***Задачи,*** при сделанных предположениях.

1. От уравнения – условия на контуре нужно перейти к уравнению вида (3).

2. Провести факторизацию обратной $A^{-1}(z)$ для коэффициента рациональной функции по подкольцам Ф*П* **(**$\mathfrak{R}_r^{+},\mathfrak{R}_r^{-}$**).** Получить её возможную, по предположению, *нормированную правильную факторизацию.*

3. Через факторизационные множители и известную правую часть уравнения (3) , найти требуемые обратные и произведение рациональных функций, расположенное под знаками проекторов.

4. Найти разложение произведения функций, расположенного под знаками проекторов, в сумму простейших рациональных дробей.

5. По формулам (4) построить решение уравнения (3) *, **Задачи,*** а также, меняя $z \in C$ на $x \in \{-\infty;\infty\}$, и уравнения (2).

Отметим в заключение, что перспективные возможности теоретических исследований и приложений для родственных задач, уравнений, открывающиеся приближением рациональными для коэффициентов из других классов функций ещё не исчерпаны. Важны, в частности, исследования случаев, когда факторизация не является правильной, а также связи решений, соответствующих произвольным и специальным правым частям.

П. 1-4 и выводы подготовлены вторым; остальное - при участии всех соавторов.

1. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. – 1958. – 13, вып. 5(83). – С. 3 – 120.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Гос. изд-во физ. - матем. лит.,1963. - 640 с.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 512 с.
4. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. - М.: Наука, 1978. -296с.
5. Попов Г.Я., Керекеша П.В., Круглов В.Е. Метод факторизации и его численная реализация.
Учебное пособие. Редактор: проф. Попов Г.Я.-Одесса: Одесский гос. университет, 1976. - 82 с.
6. Попов Г.Я. Контактные задачи для лин. - деформ. основания. Киев-Одесса: ВШ, 1982.-168 с.
7. Мхитарян С.М. О некотор. плоских контакт. задачах теор. упруг. с учётом сил сцепл. и связ. с ними интегр. и диффер. уравн. // Изв. АН Армянской ССР. Механика.-1968.-XXI, №5-6.-С. 3-20.
8. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Замк. реш. некот. смеш. задач для ортотр. плоскости с разрезом// Совр. пробл. мех. деформ. тв. тела, диффер. и нтегр. уравн. Тез. докл. МНК. Одесса, 2013.- С. 12.
9. Черский Ю.И., Керекеша П.В., Керекеша Д.П. Метод сопряжения аналитических функций с приложениями. Одесса: Астропринт, 2010. - 552 с.
10. McNabb A., Schumitzky A. Factorization of Operators I: Algebraic Theory and Examples // J. Funct. Anal. – 1972. – 9, № 3. – P. 262 – 295.
11. Полетаев Г.С. Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами. – Киев, 1988. – 20 с. – (Препринт / АН УССР. Институт математики:88.31).
12. Полетаев Г. С. Об однопроекторн. второго порядка уравн. с правильно факторизуемыми коэфф. в кольце с факторизационной парой // Вестн. Херсон. гос. техн. ун-та. – 2000. - № 2 (8). – С. 191–195.
13. Попов Г.Я., Кудим К.А. Задача о кручении упругого пространства, ослабленного полубесконечной конической трещиной // Прикладная механика. – 2007. – 43, №2. – С. 99-107.
14. Полетаев Г. С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой // Укр. матем. журн. – 1991, т. 43, № 9. – С. 1201 – 1213.
15. Полетаев Г. С. Некот. рез-ты о парн. ур. в кольцах с факторизационными парами//Вісн. Харк. націон. ун-ту.- 2002, № 582. – Сер. "Матем., прикл. мат. і мех. ". – Вып.52. – С. 143 – 149.
16. Полетаев Г.С. Подвид двупроекторных первого порядка уравнений с правильно факторизуемым коєффициентом в кольце с факторизационной парой // XYII International Conference DYNAMICAL SYSTEM MODELLING AND STABILITY INVESTIGATION. MODELLING & STABILITY. ABSTRACTS OF CONFERENCE REPORTS. Kiev, Ukraine. May 27-29, 2015. ВІСНИК Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. - С. 46.
17. Полетаев Г.С. Метод решения абстрактных уравнений с двумя неизвестными из подколец факторизационной пары // Математика в сучасному технічному університеті. Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції 24-25 грудня 2015 року. Київ. – 2016. – С. 85-88.

18. Полетаев Г. С., Войтик Т.Г., Яценко С.А. Нахождение двух рациональных функций с полюсами из полуплоскостей по линейному уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом // Глуш-

ковські читання. НТУУ «КПІ», Київ.- С. 74-77.

19. Полетаев Г. С., Войтик Т.Г., Яценко С.А. Проекторный поход к нахождению двух рациональных линейно связанных на оси функций с полюсами из разных полуплоскостей // Необратимые процессы в природе и технике. Труды восьмой Всероссийской конференции 27-29 января 2015г. Москва. Часть II. МГТУ им. Н.Э. Баумана.- С. 125-129.

Стаття надійшла до редакції 25.04.2016.