

УДК 539.3, 621.762

В.А. Кошелюк

Луцький національний технічний університет

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ТРІЩИНОСТІЙКОСТІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА ОСНОВІ МОДИФІКОВАНОГО МСЕ

У роботі запропоновано використання спеціальних модифікованих скінченних елементів для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень. Запропонований метод базується на використанні методу скінченних елементів при розв'язуванні задач механіки руйнування з врахуванням температурних напружень. Отримано вирази для аналізу плоских задач термопружності анізотропних тіл із тріщинами. Наведено числовий приклад.

Ключові слова: термопружність, тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень, механіка руйнування, модифіковані скінченні елементи.

В.А. Кошелюк**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ ТЕРМОУПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА БАЗЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МКЭ**

В статье предложено использование специальных модифицированных конечных элементов для расчета коэффициентов интенсивности напряжений. Предложенный метод основан на использовании МКЭ при решении задач механики разрушения с учетом температурных напряжений. Получены выражения для анализа плоских задач термоупругости анизотропных тел с трещинами. Приведен численный пример.

Ключевые слова: термоупругость, трещина, коэффициент интенсивности напряжений, механика разрушения, модифицированные конечные элементы.

V.A. Kosheliuk**DETERMINATION OF FRACTURE PARAMETERS OF THERMOELASTIC ANISOTROPIC ELEMENTS BASED ON THE MODIFIED FEM**

The paper proposes to use special modified finite elements evaluation of stress intensity factors. The proposed method uses the FEM of fracture mechanics, which account for the thermoelasticity. The expressions for the construction analysis of plane problems of thermoelasticity of anisotropic solids containing cracks. The numerical examples have been given.

Key words: thermoelasticity, crack, stress intensity factors, fracture mechanics, modified finite elements.

Постановка проблеми та огляд публікацій

Фізико-механічні властивості структурно неоднорідних матеріалів визначаються взаємопов'язаним впливом характеристик утвореної композиційної структури та властивостями окремих матеріалів складових компонентів. Для отримання композиційного матеріалу із високими механічними характеристиками (границя міцності, пружності тощо) необхідно враховувати також і залишкові термонапруження. Поява останніх зумовлена відмінністю об'ємного розширення компонентів структурно неоднорідного матеріалу, що відбувається не лише за різницею коефіцієнтів температурного розширення, але й внаслідок фазових перетворень.

При отриманні багатьох матеріалів структурна неоднорідність є основною причиною виникнення залишкових термонапружень [1, 2, 3]. У деяких композитах вдається врахувати термонапруження на стадії їх проектування. Проте для більшості структурно-неоднорідних матеріалів необхідно вивчати вплив термонапружень на механічні властивості уже готового виробу. Термонапруження та механічні властивості матеріалу визначаються його структурою, властивостями компонентів та типом їхнього контакту.

Методи визначення довговічності тіл із тріщинами вимагають попереднього обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН), які зазвичай заздалегідь невідомі. Крім того, характер зміни напружень є заданим (коренева особливість), а тому важко без його урахування отримати теоретично обґрунтовані збіжні результати. Найбільш коректний підхід полягає у використанні спеціальних елементів, які моделюють сингулярність напружень та деформацій у вершині тріщини (сингулярні елементи). Ці елементи відображують особливості НДС в околі вершини тріщини.

Як відомо [4], числові методи дають можливість отримати кількісні результати для конкретного випадку температурного поля. Проте для якісного аналізу та зіставлення впливу різноманітних факторів при формуванні напруженого стану структурно-неоднорідного матеріалу бажано отримати наближені аналітичні вирази для компонент тензору напружень неоднорідного тіла. Такі залежності можуть бути отримані шляхом варіативної постановки для задач механіки руйнування з врахуванням термонапружень.

Основні співвідношення термопружності для неоднорідних тіл

Незв'язна задача термопружності поділяється на дві окремі: визначення температурного поля та розрахунок напружено-деформованого стану при відомому розподілі температур.

Задача визначення температурного поля полягає в знаходженні залежності значень температури у всіх точках розглядуваного тіла у кожен фіксований момент часу, тобто визначення функції $T = f(x, y, z, t)$, де x, y, z – просторові координати, а t – час.

При різній температурі в різних точках тіла, коли окремі його елементи намагаються збільшитись або зменшитись в розмірах на різну величину, в тілі виникають напруження стиску чи розтягу, тобто при тепловій взаємодії виникають поля теплових напружень, переміщень та деформацій.

Для неоднорідного середовища справедливим є всі основні рівняння механіки деформованого твердого тіла. Відмінність полягає у тому, що у співвідношеннях для неоднорідних тіл фізико-механічні характеристики є функціями координат.

Постановка квазістатичної задачі термопружності для неоднорідного ізотропного тіла у випадку, якщо деформація зумовлена лише змінами в часі температурного поля, тобто механічні взаємодії відсутні, полягає в наступному.

Необхідно при заданих теплових діях визначити 16 функцій просторових координат x, y, z та часу t : шість компонент симетричного тензору напружень σ , шість компонент симетричного тензору деформацій ε , три компоненти вектора переміщень U та температуру T , що задовольняють такі співвідношення:

1. рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial z} \right) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

де: λ_i - коефіцієнт теплопровідності тіла;

c – питома теплоємність тіла;

ρ – густина тіла;

$C = c\rho$ – об'ємна теплоємність тіла;

2. рівняння рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

3. співвідношення між напруженнями та деформаціями, що називаються співвідношення Дюгамеля – Неймана, які виражають закон Гука для ізотропного лінійно пружного тіла:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0) \\ \sigma_{yy} &= 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0) \\ \sigma_{zz} &= 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0) \\ \sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz}, \quad \sigma_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz} \end{aligned} \quad (3)$$

α_T – коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу;

λ та μ - коефіцієнти Ламе;

T_0 – початкова температура тіла;

Коефіцієнти λ та μ пов'язані з технічними характеристиками матеріалу рівностями:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

де: E – модуль пружності (модуль Юнга), ν – коефіцієнт Пуансона.

4. співвідношення Коші між деформаціями та переміщеннями, при визначених початкових та граничних умовах

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Коефіцієнт теплопровідності, питома теплоємність, густина, коефіцієнт лінійного теплового розширення та коефіцієнти Ламе матеріалу вважаємо неперервними функціями просторових координат.

Формулювання задачі та алгоритм пошуку розв’язку

Виділимо з циліндру кінцевий елемент між двома радіусами з кроком h_r (рис. 1). Ведемо позначення u_i, u_{i+1} – переміщення вузлів $i, i+1$, q_i, q_{i+1} – контактний тиск між елементами (шарами розбиття).

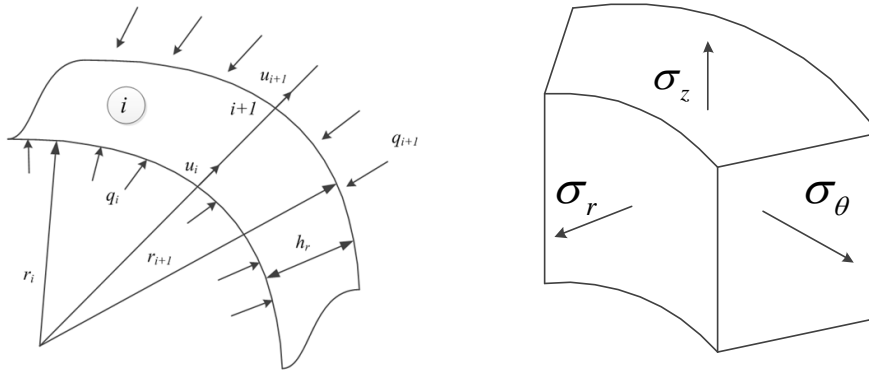


Рис. 1. Напружений стан циліндру

Напружений стан в циліндрі вважаємо трьохвісним. Згідно закону Гука [5] запишемо:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= D_{11}\varepsilon_r + D_{12}(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + D_{13}\varphi \\ \sigma_\theta &= D_{11}\varepsilon_\theta + D_{12}(\varepsilon_r + \varepsilon_z) + D_{13}\varphi \\ \sigma_z &= D_{11}\varepsilon_z + D_{12}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + D_{13}\varphi \end{aligned} \quad (6)$$

де вжито позначення:

$$D_{11} = \frac{E(T, P)(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}, \quad D_{12} = \frac{\mu E(T, P)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}, \quad D_{13} = -\frac{E(T, P)}{1 - 2\mu} \quad (7)$$

$$\varphi = \alpha_{cp}(T - T_0), \quad \alpha_{cp} = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T \alpha(\tau) d\tau$$

T_0 – температура ненапруженого стану ($T_0 = 0^0$ C).

Знайшовши рішення (6) відносно деформацій $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ отримаємо

$$\varepsilon_r = \frac{D_{11}\sigma_r - D_{12}\sigma_\theta}{D_{11}^2 + D_{12}^2} + \varphi_r, \quad \varepsilon_\theta = \frac{D_{11}\sigma_\theta - D_{12}\sigma_r}{D_{11}^2 + D_{12}^2} + \varphi_\theta, \quad \varepsilon_z = \frac{D_{11}\sigma_z - D_{12}\sigma_\theta}{D_{11}^2 + D_{12}^2} + \varphi_r, \quad \varphi_r = \varphi_\theta = -\frac{\varphi D_{13} + D_{12}\varepsilon_z}{D_{12} + D_{11}} \quad (8)$$

Переміщення в границях елементу представимо лінійним сплайном $u = \alpha_1 + \alpha_2 r$

де використовується $\alpha_1 = u_1 - \frac{r_1}{h_1}(u_{i+1} - u_i)$, $\alpha_2 = \frac{1}{h_r}(u_{i+1} - u_i)$ $i = 1, 2, \dots, n$

Функціонал потенціальної енергії для випадку плоскої деформації елемента ($i, i+1$) представимо у вигляді

$$U_i = \pi l \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left\{ \sigma_r (\varepsilon_r - \varphi_r) + \sigma_\theta (\varepsilon_\theta - \varphi_\theta) + \sigma_z (\varepsilon_z - \varphi_z) \right\} r dr - 2\pi r_i q_i u_i + 2\pi r_{i+1} q_{i+1} u_{i+1} \quad (9)$$

Підставивши (7), (8) в (9) функціонал набуде вигляду

$$U_i = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left\{ D_{11} (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2) + 2D_{12} \varepsilon_r \varepsilon_\theta + 2(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) (D_{13} \varphi + D_{12} \varepsilon_z) \right\} r dr - 2r_i q_i u_i + 2r_{i+1} q_{i+1} u_{i+1} \quad (10)$$

Зв'язок деформацій та переміщень представимо формулами $\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$, $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$.

Враховуючи взаємозв'язок деформації ε_r , ε_θ представимо

$$\varepsilon_r = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_r}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_r + \frac{1}{r} \left[u_i - \frac{r_i}{h_r} (u_{i+1} - u_i) \right] \quad (11)$$

Будемо вважати теплофізичні та механічні характеристики в межах кожного елемента постійними – середніми по елементу. Підставивши (11) в (10) та виконавши інтегрування в заданих границях приведемо функціонал до виду

$$U_i = U_i(u_i, u_{i+1}, q_i, q_{i+1}, \dots) \quad (12)$$

Умовою стаціонарності функціоналу (12) будуть:

$$\frac{\partial U_i}{\partial u_i} = 0, \quad \frac{\partial U_i}{\partial u_{i+1}} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

Виконавши диференціювання та врахувавши (12) отримаємо алгебраїчну систему рівнянь відносно шуканих вузлових переміщень u_i :

$$K_{11}^{(i)} u_i + K_{12}^{(i)} u_{i+1} = K_1^{(i)}, \quad K_{21}^{(i)} u_i + K_{22}^{(i)} u_{i+1} = K_2^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

де вжито позначення:

$$\begin{aligned} K_{11}^{(i)} &= D_{11} \frac{r_{i+1}^2}{h_r^2} \ln \left(1 + \frac{h_r}{r_i} \right) - D_{11} - D_{12}, \quad K_{12}^{(i)} = K_{21}^{(i)} = D_{11} \frac{r_i r_{i+1}}{h_r^2} \ln \left(1 + \frac{h_r}{r_i} \right) \\ K_{22}^{(i)} &= D_{11} \frac{r_i^2}{h_r^2} \ln \left(1 + \frac{h_r}{r_i} \right) + D_{11} + D_{12}, \quad K_1^{(i)} = \varphi D_{13} r_i + D_{12} \varepsilon_z r_i + q_i r_i, \\ K_2^{(i)} &= -\varphi D_{13} r_{i+1} - D_{12} \varepsilon_z r_{i+1} - q_{i+1} r_{i+1}, \quad \varphi = \alpha_{cp} \frac{T_i + T_{i+1}}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

Оскільки для всього циліндру функціонал потенціальної енергії рівний сумі функціоналів по n елементах $U = \sum_{i=1}^n U_i$ то систему (14) можна представити

$$\{K\} \{u\} = \{R\} \quad (16)$$

де вжито позначення:

$\{K\}$ - глобальна матриця жорсткості;

$\{u\}$ - матриця шуканих вузлів переміщень;

$\{R\}$ - матриця правих частин рівняння.

де (x_1, y_1) , (x_2, y_2) та (x_4, y_4) відповідні координати вузлів елементів – 1, 2 та 4;

Δu_k^j – вузлові значення розкриття тріщини в j -ому вузлі.

Як було наведено раніше [6, 7] при зміні координат (x_4, y_4) на четвертину довжини елемента у вершині тріщини, величина t буде рівною $(r/L)^{1/2}$, де L – відстань між вузлами (x_1, y_1) та (x_2, y_2) . Отже, член першого порядку Δu_k , що визначає t , характеризує кореневу особливість відстані $(r/L)^{1/2}$. Проте наступний член t^2 описує r/L . Отримана величина дає можливість більш точно визначити КІН. Таким чином функції форми для вузлів 2 та 4 $\bar{\varphi}_2(t)$, $\bar{\varphi}_4(t)$, що наведені в рівнянні (21), зберігають величину параметру $t = \sqrt{r}$ та здійснюють заміну $(r/L)^{1/2}$ на $(r/L)^{3/2}$.

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_2(t) &= t(2t-1) + 2t(1-t)(1-2t)/3 = \frac{1}{3}(4t^3 - t) \\ \bar{\varphi}_4(t) &= 4t(1-t) - 4t(1-t)(1-2t)/3 = -\frac{8}{3}(t^3 - t)\end{aligned}\quad (21)$$

Зроблена модифікація для вузлів 2 та 4 розкриває кореневу особливість $t^2 = r$ без втрати ступеня інтерполяції, тобто

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_2(0) &= 0, \quad \bar{\varphi}_2(1/2) = 0, \quad \bar{\varphi}_2(1) = 1 \\ \bar{\varphi}_4(0) &= 0, \quad \bar{\varphi}_4(1/2) = 1, \quad \bar{\varphi}_4(1) = 0\end{aligned}\quad (22)$$

Розрахунок КІН проведемо методом кореляції з використанням \sqrt{r} – сингулярних елементів (стандартних та модифікованих). Проте, варто відмітити, що оцінка якості \sqrt{r} – сингулярного елемента здійснюється за допомогою методу кореляції переміщень. Основна залежність для КІН сумісної дії кількох мод, тобто, K_I та K_{II} з використанням методу кореляції зміщення:

$$\begin{aligned}K_I &= \frac{G}{k+1} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \Delta u_2 \\ K_{II} &= \frac{G}{k+1} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \Delta u_1\end{aligned}\quad (23)$$

де $\Delta u_k(r)$ – розкриття тріщини в системі координат, що збігається з вершиною тріщини;

G, ν – модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона відповідно;

$k = 3 - 4\nu$ для плоскої деформації, $k = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ для плоского напруженого стану.

Використовуючи модифікований \sqrt{r} – сингулярний елемент до рівняння (19) отримаємо

$$\Delta u_k = \Delta u_k^2 \bar{\varphi}_2(t) + \Delta u_k^4 \bar{\varphi}_4(t) = \frac{4}{3}(\Delta u_k^2 - 2\Delta u_k^4)t^3 + \frac{1}{3}(8\Delta u_k^4 - \Delta u_k^2)\quad (24)$$

Використання (24) та (23) з врахуванням умови $t = \sqrt{r/L}$

$$\begin{aligned}K_I &= \frac{G}{3(k+1)} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} (8\Delta u_2^4 - \Delta u_2^2) \\ K_{II} &= \frac{G}{3(k+1)} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (8\Delta u_1^4 - \Delta u_1^2)\end{aligned}\quad (25)$$

Числовий приклад

Анізотропна квадратна пластинка з двома тріщинами. Розглянемо анізотропну пластинку зі скловолокна, що містить дві тріщини (рис. 3). На берегах тріщин підтримується нульова температура, а межа пластинки нагріта до температури θ_0 . Береги пластинки та тріщин вільні від механічного навантаження. Отримані значенні КІН у правій вершині нижньої тріщини залежно від довжин тріщин та відстаней між ними подано в табл. 2. Усі КІН нормовані до $K_0 = E_{22} \alpha_{22} \theta_0 \sqrt{\pi a}$. Результати розрахунку КІН у вершинах P та Q тріщини, порівняно із

даними роботи [8] подано в табл. 1. Коефіцієнт нормування $K_0 = E_{22}\alpha_{22}\theta_0\sqrt{\pi a}$. При розбитті методом скінченних елементів використано адаптивну сітку із 480 вузлами.

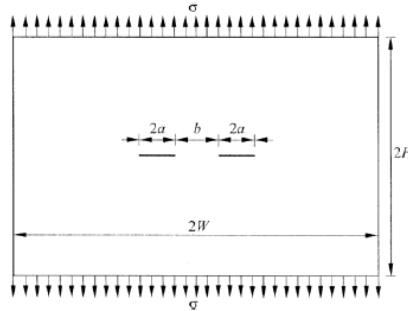


Рис. 3. Анізотропна пластинка з двома тріщинами

Таблиця 1.

КІН в анізотропній пластинці з двома тріщинами

b/a	Ліва тріщина (права вершина)			
	Стандартний сингулярний СЕ [8]	Модифікований сингулярний СЕ [8]	J – інтеграл	Запропонований підхід
1	63.2997	62.313	62.3135	62.4865
2	59.7123	58.5156	58.7679	59.0120
3	59.2105	57.5571	57.7415	57.6349
4	58.1127	56.7613	56.9215	56.9142
Права тріщина (ліва вершина)				
1	63.3511	61.6911	61.9512	61.8463
2	57.7415	58.4539	58.6621	58.6534
3	58.6097	57.3541	57.5131	57.6015
4	57.7441	56.9981	57.1129	57.0871

Домінуючим при температурних крайових умовах є КІН K_I . Проте, на відміну від пластинки з одною тріщиною [9], у випадку двох дефектів ненульовим є також КІН K_{II} . Це зумовлено взаємодією тріщин. Проте КІН K_{II} на порядок менший за K_I , тому при розрахунку міцності таких пластинок ним можна знехтувати.

Висновки

Запропонована методика розрахунку коефіцієнту інтенсивності напружень може бути прийнята за основу для розробки алгоритмів наближеного розв’язування крайових задач механіки руйнування з використанням варіаційних методів та визначення термопружності. Отримані співвідношення з використанням модифікованих скінченних елементів є вихідними для побудови математичних моделей термомеханіки варіаційного формулювання. Узгодженість результатів досліджень запропонованої схеми розрахунку структурно неоднорідних анізотропних тіл з тріщинами є досить високою у порівнянні з відомими результатами (8). Отже запропоновані розв’язки крайових задач механіки руйнування мають перспективу впровадження у програмні пакети прикладного характеру інженерних розрахунків для вивчення структурно неоднорідних тіл.

1. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – К.: Наук. думка, 1983. – 280 с.
2. Кит Г.С. Стационарное температурное поле у півбезмежному тілі з теплоактивним або теплоізоляованим дисковим включенням / Г.С. Кит, О.П. Сушко // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2011. – Вип. 13. – С. 67–80.
3. Кит Г.С. Вплив джерела тепла на напружений стан тіла з теплоізоляованою круговою тріщиною / Г.С. Кит, О.П. Сушко // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2011. – Вип. 9. – С. 11–121.
4. Беляев Н.М. Методы теории теплопроводности / Н.М. Беляев, А.А. Рядно. М.: Высшая школа. 1982. 304 с.
5. Термопрочность деталей машин / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, И.В. Дульнев и др. М.: Машиностроение. 1975. 456 с.
6. Williams M L, *ASME J Appl Mech*, 24 (1957) 109-114.
7. Henshell R D & Shaw K G, *Int J Numer Methods Eng*, 9 (1975) 495-507.
8. Sayantan Paul & B.N. Rao, *Indian Journal of Engineering & Materials Sciences*, vol. 14, February 2007, pp 31 – 38
9. Кошелюк В.А. Застосування МСЕ до розв’язування задач термопружності структурно неоднорідних тіл / В.А. Кошелюк // Наукові нотатки – Луцьк, 2015. - Випуск 51.- с. 138 - 145

Стаття надійшла до редакції 25.04.2016.