

УДК 624.072.32

¹Човнюк Ю.В., ²Герасимчук Г. А., ¹Гуменюк Ю.О.¹Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ²Луцький національний технічний університет, м. Луцьк**ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ ФОРМИ РОЗПУШУВАЛЬНОЇ ЛАПИ
КУЛЬТИВАТОРА**

Стаття присвячена визначенню оптимальної форми розпушувальних лап культиватора. Враховуючи жорсткісні та міцнісні характеристики лапи і використовуючи у якості функціоналу, що мінімізується значення вертикального переміщення носка лапи, нами визначено оптимальну форму лапи при різних типах її поперечного перерізу: прямокутного перерізу - постійної ширини і змінної висоти; трипрошаркової лапи - змінної товщини зовнішніх прошарків і постійної товщини середнього прошарку.

Ключові слова: лапа культиватора, оптимальна форма, жорсткість, міцність, прогин.

Човнюк Ю.В., Герасимчук Г. А., Гуменюк Ю.О.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ РЫХЛИТЕЛЬНОЙ ЛАПЫ
КУЛЬТИВАТОРА**

Статья посвящена определению оптимальной формы рыхлительных лап культиватора. Учитывая жесткостные и прочностные характеристики лапы и, используя в качестве минимизирующего функционала значение вертикального смещения носка лапы, нами определена оптимальная форма лапы при разных типах ее поперечного сечения: для прямоугольного сечения – постоянной ширины и изменяемой высоты; для трехслойной лапы – изменяемой толщины внешних слоев и постоянной толщины среднего слоя.

Ключевые слова: лапа культиватора, оптимальная форма, жесткость, прочность, прогиб.

Chovnyuk YU., Herasymchuk H., Humenyuk YU.

DETERMINATION OF OPTIMAL FORM OF BURSTER PAW OF CULTIVATOR

The article is devoted to determination of optimum form for cultivator's shank. Taking into account shank's characteristics of stiffness and strengths and using the value of vertical displacement of shank bottom as a minimizing functional, we have defined the optimum form of shank in different types of its cross-sectional: for the rectangular section – the permanent width and changeable height; and for the three-layered shank – the changeable thickness of external layers and permanent thickness of the middle layer.

Key words: shank of cultivator, optimum form, stiffness, strengths, deflection.

Постановка проблеми. У задачах оптимізації геометричної форми розпушувальної лапи культиватора у якості шуканих керуючих функцій, зазвичай, розглядають розподіл товщини при фіксованому положенні осьової лінії у випадку одновимірних елементів або серединної поверхні для двовимірних об'єктів. Поряд з вказаними постановками представляє також інтерес знаходження самої форми осьової лінії або серединної поверхні з умови екстремуму деяких жорсткісних або характеристик міцності. До типових задач цього класу можна віднести визначення оптимальної форми криволінійного пружного стрижня. До теперішнього часу дана задача не досліджена у припущенні, що стрижень до і після деформації є плоским, а величини деформацій малими.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Оптимізація пружних елементів конструкцій (балок, стрижнів, пластин тощо) розглянута у роботах [1, 2]. Чисельні розв'язки сформованих варіаційних задач із використанням методів мінімізації наведені у [3]. Проте відсутні публікації, у яких визначається оптимальна форма розпушувальної лапи культиватора.

Мета даної роботи полягає у визначенні оптимальних геометричних форм розпушувальної лапи культиватора шляхом пошуку керуючих функцій, у якості котрих виступають форма осьової лінії (недеформованого стану) лапи і/або розподіл товщини вздовж стрижня лапи. При цьому для ряду випадків розв'язки задач знайдені у явній формі, а також досліджені деякі особливості оптимальних рішень.

Виклад основного змісту дослідження. Розглянемо задачу визначення оптимальної форми пружного криволінійного стрижня (розпушувальної лапи культиватора), жорстко закріпленого одним кінцем в точці О (рис.1) і такого, що знаходиться під дією статичних навантажень. Розгляд обмежимо тим випадком, коли вісь стрижня представляє собою плоску фігуру, яка задається параметричним рівнянням $x = x(s)$, $y = y(s)$, де s – довжина дуги, яка відраховується від точки О. Вважаємо, що одна з головних осей інерції поперечного перерізу стрижня розміщена у площині

$(x; y)$ і що зовнішні сили діють у тій самій площині. Тому вісь стрижня після деформації залишається плоскою кривою. Деформація стрижня (лапи) вважається малою.

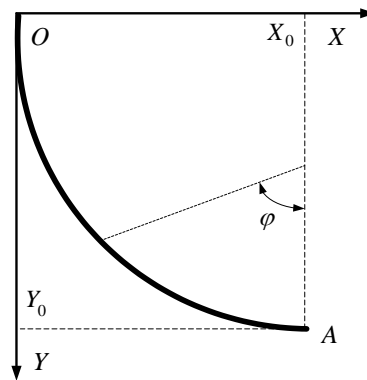


Рис.1. Геометрія задачі

Форма поперечного перерізу стрижня (лапи) визначається заданими величинами $h = h(s)$, яку умовно назвемо товщиною стрижня. У якості цього параметра можна, наприклад, прийняти висоту прямокутного поперечного перерізу або радіус для випадку стрижнів круглого поперечного перерізу. Від значення величини h залежать всі використані нижче жорсткісні та геометричні характеристики стрижня: статичний момент D , момент інерції I площа перерізу S .

Позначимо через u, v, M, N, Q відповідні компоненти вектора переміщення вздовж осей x та y , згинальний момент, зусилля розтягу, перерізаючі зусилля. Враховуючи, що $u = v = 0$ у точці O , запишемо формули, які обчислюють переміщення вільного кінця стрижня (лапи) [4]:

$$\begin{cases} u(l) = -\frac{1}{E} \int_0^l \left[\left(N + \frac{M}{\rho} \right) \cos \varphi + \left(\frac{MS}{D\rho} + \frac{N}{\rho} \right) (y_0 - y) - mQ \sin \varphi \right] \frac{ds}{s} \\ v(l) = -\frac{1}{E} \int_0^l \left[\left(N + \frac{M}{\rho} \right) \sin \varphi - \left(\frac{MS}{D\rho} + \frac{N}{\rho} \right) (x_0 - x) + mQ \cos \varphi \right] \frac{ds}{s} \end{cases} \quad (1)$$

де ρ – радіус кривизни осьової лінії; m – коефіцієнт, який залежить від форми поперечного перерізу (зокрема $m = 3(1 + \mu)$) для стрижнів прямокутного перерізу; μ – коефіцієнт Пуассона); φ – кут між нормаллю до осі стрижня та лінією, яка паралельна осі y (див. рис 1).

Величини M, N, Q, ρ, φ , які входять до підінтегрального виразу вважаються заданими у залежності від $(x; y)$ та їх похідних за s . Для ρ та φ – це відомі геометричні співвідношення, а для величини M, N, Q – ці залежності неважко отримати для кожного конкретного випадку навантаження стрижня. Виходячи з силових умов рівноваги, так як розглядувана задача є статично визначеною, правило знаків для величин M, N, Q прийняте таке ж, як у [4].

Припустимо, що задана довжина стрижня l , його об'єм V і координата незакріпленого кінця стрижня у недеформованому стані. Ці умови запишемо у вигляді:

$$\int_0^l S(h) ds = V, \quad (0 \leq s \leq l); \quad (2)$$

$$x(0) = y(0) = 0; \quad x(l) = x_0; y(l) = y_0. \quad (3)$$

Функції $x(s), y(s)$ і параметри x_0, y_0, l повинні задовольняти геометричним співвідношенням:

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = 1; \quad (4)$$

$$l^2 \geq x_0^2 + y_0^2, \quad (5)$$

які випливають з самого визначення диференціалу дуги і умови, що задає довжину стрижня не менше найкоротшої відстані між точками $O(0;0)$ та $A(x_0; y_0)$.

У якості функціонала, який мінімізується, розглянемо деяку функцію переміщень вільного кінця стрижня, тобто величин $u(l)$ та $v(l)$:

$$\Phi = \Phi\{u(l), v(l)\} \rightarrow \min. \quad (6)$$

Таким чином, прийдемо до варіаційної задачі знаходження на інтервалі $0 < s < l$ функцій $x(s), y(s)$ та $h(s)$, які задовольняють умовам (2) - (5) і надають мінімум функціоналам (1), (6).

Слід зазначити, що при умові рівності у (5) осьова лінія стрижня буде прямою, яка з'єднає точки $(0; 0)$ та $(x_0; y_0)$, а оптимізаційна задача (1) - (6) зводиться до знаходження однієї функції $h(s)$.

Крім того, зауважимо, що ефективне чисельне рішення сформульованої варіаційної задачі може бути отримане з використанням методів мінімізації, наведених у [3]. При цьому у останній постановці варіаційної задачі можуть бути враховані деякі додаткові обмеження на керуючі функції, наприклад, обмеження виду $a_1 \leq h \leq a_2$, де a_1, a_2 – задані додатні константи $a_2 > a_1$.

Питанням вибору раціональних контурів пружних арок (у основному з додаткових вимог щодо напруженого стану, таких, наприклад, як безмоментність напруженого стану та інших) присвячена велика кількість робіт. Бібліографія за таким питанням наявна, зокрема у посиланні [5].

1. Модель тонких стрижнів.

Розглянемо сформовану вище варіаційну задачу у наближенні тонких стрижнів, коли:

$$\frac{h_0}{l} \ll 1, \quad \frac{h_0}{\rho_0} \ll 1 \quad (h_0 = \max_s h(s), \quad \rho_0 = \min_s \rho(s), \quad 0 \leq s \leq l). \quad (7)$$

У цьому випадку вирази для u та v допускають відомі спрощення. Крім того, додатково конкретизуємо постановку задачі. Зовнішнє навантаження, діюче на стрижень, задамо у вигляді зосередженої сили P , прикладеної до вільного кінця й спрямованої паралельно осі y . У якості мінімізованого функціоналу приймаємо абсолютне значення вертикального прогину v кінця стрижня, тобто величину переміщення у напрямку дії сили.

Зв'язок між величинами I та h буде різним у залежності від типу поперечного перерізу стрижня. Так, наприклад, для стрижнів прямокутного поперечного перерізу постійної ширини b й змінної висоти $h = h(s)$ ця залежність має вид: $I = \frac{bh^3(s)}{12}$. У випадку трипрошаркових стрижнів зі змінною товщиною зовнішніх армуючих прошарків $\frac{h(s)}{2}$ та постійною товщиною середнього прошарку ($H \gg \max h(s)$) маємо $I(s) = \frac{bH^2h(s)}{4}$. У цій формулі припускаємо, що згинна жорсткість середнього прошарку дуже мала (нею можна знехтувати). Нижче обмежимо розгляд залежностями виду

$$I(s) = k_\alpha h^\alpha(s),$$

де k_α – константа, яка залежить від типу поперечного перерізу стрижня ($\alpha = 0, k_0 = \frac{bh^3}{12}$) – для стрижнів постійного прямокутного перерізу; ($\alpha = 1, k_1 = \frac{bH^2}{4}$) – для трипрошаркових стрижнів; ($\alpha = 3, k_3 = \frac{b}{12}$) – для прямокутних стрижнів змінної висоти.

Зазначимо, що при розгляді трипрошаркових стрижнів під заданим об'ємом V , який фігурує у ізопериметричній умові (2), розумітимемо об'єм матеріалу армуючих прошарків, а під величиною h_0 у (7) – суму $H + \max_s h(s)$.

Використовуючи сформульовані вище припущення і приймаючи у якості незалежної змінної координату x , запишемо основні співвідношення варіаційної задачі ($\alpha = 1, 3$)

$$\frac{P}{k_\alpha E} \int_0^{x_0} \frac{(x_0 - x)^2 \sqrt{1 + (y')^2}}{h^\alpha} dx \Rightarrow \min; \quad (8)$$

$$y(0) = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y' \equiv \frac{dy}{dx}; \quad (9)$$

$$\int_0^{x_0} \sqrt{1 + (y')^2} dx = l; \quad (10)$$

$$\int_0^{x_0} h(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{V}{b}. \quad (11)$$

У випадку $\alpha = 0$ умова (11) не розглядається. Розв'язок варіаційної задачі (8) – (11) будемо розшукувати у класі неперервно-диференційованих функцій $y(x)$ і неперервних функцій $h(x)$. Випишемо необхідну умову екстремуму у задачі (8) – (11) для функцій u та h . Рівняння Ейлера для функціонала (8) по уза ізопериметричних умов (10), (11) має вид:

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \left[\frac{(x_0 - x)^2}{h^\alpha} + \lambda_1 + \lambda_2 h \right] = B, \quad (\alpha = 1, 3), \quad (12)$$

де λ_1, λ_2, B – довільні константи. Умова екстремуму функціонала (8) по h при умові (11) призводить до формули:

$$h = [\lambda_3(x_0 - x)^2]^{1/(\alpha+1)}, (\alpha = 1, 3). \quad (13)$$

Виключимо h з рівняння (12) за допомогою формули (13).

У результаті отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} [(x_0 - x)^{2/(\alpha+1)} + C_0] = C_1, C_0 = \frac{\lambda_1 \lambda_3^{\alpha/(\alpha+1)}}{1+\lambda_2 \lambda_3}; \\ C_1 = \frac{B \lambda_3^{\alpha/(\alpha+1)}}{1+\lambda_2 \lambda_3}. \end{cases} \quad (14)$$

Рівняння (14) визначає оптимальну форму $y = y(x)$ осьової лінії стрижня при оптимальному виборі зміни товщини $h(x)$. Для обчислення констант C_0, C_1, λ_3 й довільної константи, яка виникає при інтегруванні рівняння (12), маємо дві граничні умови (9) та два ізопериметричних співвідношення/умови (10), (11).

Не інтегруючи рівняння (14), можна зробити деякі висновки про поведінку розв'язку. Для випадків, коли $y_0 \neq 0$ чи $y_0 = 0$, але $l > x_0$ похідна розв'язку y' буде відмінною від нуля на усьому інтервалі $0 \leq x \leq x_0$. З іншого припущення, що $y' = 0$ у деякій точці $\xi (0 \leq x \leq x_0)$ і обмеженості величини, записаної у квадратних дужках у рівнянні (14), випливає, що постійна $C_1 = 0$ і тому $y' = 0$ на усьому інтервалі $0 \leq x \leq x_0$. Функція $y = const$ при $y_0 = 0$ не задовольняє граничним умовам (9). Якщо $y_0 = 0$, а $l > x_0$, тоді вказаний розв'язок не задовольняє ізопериметричній умові (10). Відповідно, справедливим є твердження про те, що $y' \neq 0$ при $0 \leq x \leq x_0$. Із доведеного твердження випливає, що при $y_0 = 0$ та $l \neq x_0$ розглядувана задача не має неперервно-диференційованого рішення $y = y(x)$, оскільки у протилежному випадку похідна y' дорівнювала би нулю у деякій точці $0 \leq \xi \leq x_0$.

У випадку, коли $y_0 = 0$ й $x_0 = l$, рівняння осьової лінії має вид $y = 0 (0 \leq x \leq l)$, а оптимальний розподіл товщини стрижня дається відомою формулою (яка випливає зі співвідношень (11), (13)):

$$h = (\alpha + 3) V(l - x)^{2/(1+\alpha)} [(1 + \alpha)bl^{(\alpha+3)/(\alpha+1)}]^{-1}. \quad (15)$$

У подальшому без обмеження узагальнення будемо вважати $y_0 > 0$, звідки завдяки зазначеній властивості випливає, що оптимальне рішення $y(x)$ та похідна $y'(x)$ додатні ($y(x) > 0$ при $0 < x \leq x_0$, а $y' > 0$ при $0 \leq x \leq x_0$). Наслідком невід'ємності похідної y' буде умова:

$$l < x_0 + y_0, \quad (16)$$

виконання якої необхідне для існування розв'язку задачі.

Інтеграл рівняння (14) із врахуванням граничної умови $y(0) = 0$ може бути представлений у вигляді:

$$y = C_1 \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{[(x_0 - t)^{2/(\alpha+1)} + C_0]^2 - C_1^2}}, C_1 > 0. \quad (17)$$

Постійні C_0 та C_1 визначаються з рівняння, отриманих у результаті підстановки виразів для y та y' у другу граничну умову (9) й у ізопериметричну умову (10):

$$C_1 \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{[(x_0 - t)^{2/(\alpha+1)} + C_0]^2 - C_1^2}} = y_0; \quad (18)$$

$$\int_0^x \frac{[(x_0 - t)^{2/(\alpha+1)} + C_0] dt}{\sqrt{[(x_0 - t)^{2/(\alpha+1)} + C_0]^2 - C_1^2}} = l. \quad (19)$$

Для знаходження постійної λ_3 , яка входить у формулу (13), підставимо вирази для h та y' з (13), (14) в умову (11) й виразимо λ_3 з отриманої рівності. У результаті прийдемо до формули:

$$\lambda_3 = \left(\frac{V}{b}\right)^{\alpha+1} \left[\int_0^x \frac{(x_0 - t)^{2/(\alpha+1)} [(x_0 - t)^{2/(\alpha+1)} + C_0] dt}{\sqrt{[(x_0 - t)^{2/(\alpha+1)} + C_0]^2 - C_1^2}} \right]^{-(\alpha+1)}, \quad (20)$$

за якою можна обчислювати λ_3 , якщо знайдені C_0 та C_1 .

Наведені вирази (17) – (19) залежать від значення параметру α , який характеризує тип перерізу стрижня, і не залежать від величини коефіцієнту k_α . Тому оптимальна форма осьової лінії буде однакою для стрижня різного типу, але такою, що має однаковий показник у залежності $I(s) = k_\alpha h^\alpha(s)$ моменту інерції від керуючої функції. Так, наприклад, будуть однаковими оптимальні форми осей для трипрошаркового стрижня прямокутного перерізу зі змінною товщиною $\frac{h}{2}$ несучих прошарків ($I = k_1 h$, $k_1 = \frac{bH^2}{4}$) й для суцільного стрижня прямокутного перерізу змінної ширини, ($h_* \equiv b$, $I = k_1 h_*$, $k_1 = \frac{h^3}{12}$).

Нижче для випадків $\alpha = 1, 3, 0$ визначимо оптимальні форми осьових ліній і дослідимо деякі їх властивості.

2. Трипрошарковий стрижень ($\alpha = 1$, $k_1 = \frac{bH^2}{4}$).

Розглянемо випадок $\alpha = 1$. Для зручності всі наступні дослідження і розрахунки проведемо у безрозмірних змінних:

$$x' = \frac{x}{x_0}; \quad y' = \frac{y}{x_0}; \quad L = \frac{l}{x_0}; \quad \kappa = \frac{y_0}{x_0}. \quad (21)$$

(Штрихи у безрозмірних змінних у подальшому не приведені).

Обчислимо у співвідношеннях (17) – (19) інтеграли й перейдемо до змінних (21). У результаті отримаємо рівняння, яке визначає оптимальну форму осьової лінії (лапи культиватора у наближенні тонкого стрижня):

$$y = \bar{C}_1 \ln \left[\frac{1 + \bar{C}_0 + \sqrt{(1 + \bar{C}_0)^2 - \bar{C}_1^2}}{1 + \bar{C}_0 - x + \sqrt{(1 + \bar{C}_0 - x)^2 - \bar{C}_1^2}} \right], \quad \bar{C}_0 = \frac{C_0}{x_0}, \quad \bar{C}_1 = \frac{C_1}{x_0}, \quad (22)$$

і співвідношення, яким повинні задовольняти постійні \bar{C}_0 й \bar{C}_1 :

$$\begin{cases} \bar{C}_1 \ln \left[\frac{1 + \bar{C}_0 + \sqrt{(1 + \bar{C}_0)^2 - \bar{C}_1^2}}{\bar{C}_0 + \sqrt{\bar{C}_0^2 - \bar{C}_1^2}} \right] = \kappa; \\ \sqrt{(1 + \bar{C}_0)^2 - \bar{C}_1^2} - \sqrt{\bar{C}_0^2 - \bar{C}_1^2} = L. \end{cases} \quad (23)$$

Умови існування розв'язку (5), (16) запишуться у змінних (21) у вигляді:

$$L - 1 < \kappa \leq \sqrt{L^2 - 1}. \quad (25)$$

Обчислення, необхідні для знаходження постійних \bar{C}_0 й \bar{C}_1 за заданими κ та L , можна спростити, перетворивши систему (23), (24) до одного трансцендентного рівняння. Для цього розв'яжемо рівняння (24) відносно постійної \bar{C}_1 і виконаємо елементарні перетворення. У результаті отримаємо:

$$\bar{C}_1 = \sqrt{L^2 - 1} \frac{\sqrt{(2\bar{C}_0 + 1 - L)(2\bar{C}_0 + 1 + L)}}{2L}. \quad (26)$$

Використовуючи знайдений вираз для \bar{C}_1 , неважко показати, що:

$$\begin{cases} (1 + \bar{C}_0)^2 - \bar{C}_1^2 \equiv \left(\frac{1}{4}L^2\right) (2\bar{C}_0 + 1 + L^2)^2 \geq 0; \\ \bar{C}_0^2 - \bar{C}_1^2 \equiv \left(\frac{1}{4}L^2\right) (2\bar{C}_0 + 1 - L^2)^2 \geq 0. \end{cases} \quad (27)$$

Підставляючи далі співвідношення (26), (27) у (23), отримаємо трансцендентне рівняння, яке слугує для знаходження константи \bar{C}_0 :

$$\frac{\sqrt{L^2 - 1}}{2L} \sqrt{(2\bar{C}_0 + 1 - L)(2\bar{C}_0 + 1 + L)} \ln \left[\frac{1 + \bar{C}_0 + \frac{1}{2}L |2\bar{C}_0 + 1 + L^2|}{\bar{C}_0 + \frac{1}{2}L |2\bar{C}_0 + 1 - L^2|} \right] = \kappa. \quad (28)$$

Якщо константа \bar{C}_0 знайдена з (28) (як розв'язок рівняння (28)), тоді постійна \bar{C}_1 може бути обчислена за формулою (26). З використанням наведених співвідношень знаходження констант \bar{C}_0 та \bar{C}_1 було проведене чисельним шляхом на ЕОМ. Потім за формулою (22) визначались шукані залежності $y = y(x)$. На рис. 2 показані у результаті розрахунків для $L = 2$ оптимальні форми осьових ліній. Індексом 1, 2, 3, 4 помічені криві, які відповідають наступним значенням параметру: $\kappa = 1,060; 1,308; 1,537; 1,681$.

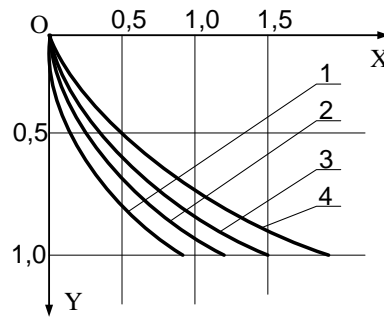


Рис.2. Оптимальні форми осевих ліній лапи культиватора (у наближенні моделі тонкого стрижня): $L = 2$; 1) $\kappa = 1,060$; 2) $\kappa = 1,308$; 3) $\kappa = 1,537$; 4) $\kappa = 1,681$

Розглянемо поведінку оптимальних форм у випадку, коли значення параметру κ мале у порівнянні з одиницею. Використаємо наступні представлення:

$$y = \varepsilon Y, \quad L = 1 + \varepsilon^2 L_*, \quad \kappa = \varepsilon \kappa_* \quad (29)$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр. Дослідження цього випадку можна провести на основі (22) – (28), однак більш просто використати рівняння:

$$(1 + \bar{c}_0 - x) \frac{dY}{dx} = \bar{c}_1 \quad (30)$$

і граничні умови:

$$Y(0) = 0, Y(1) = \kappa_* \quad (31)$$

а також ізопериметричні обмеження:

$$\int_0^1 (Y')^2 dx = 2L_* \quad (32)$$

до яких приводять співвідношення (9), (10), (14) при використанні представлення (29) і нехтуванні членами більш високого порядку малості. Інтегрування рівняння (30) і врахування граничних умов (31) дозволяють визначити оптимальний розв'язок:

$$Y = \frac{\kappa}{\ln(1+t)} \ln\left(\frac{1+t}{1+t-xt}\right), \quad t = \frac{1}{\bar{c}_0} \quad (33)$$

з точністю до однієї довільної сталої t . Для знаходження константи використаємо ізопериметричну умову (32), котра після підстановки у неї виразів для Y' , згідно (30) і інтегрування приводить до трансцендентного рівняння:

$$\psi' = (1+t)t^{-2} \ln^2(1+t) = \frac{\kappa_*^2}{2L_*} \quad (34)$$

Умова (25) у розглядуваному випадку прийме вигляд:

$$\frac{\kappa_*^2}{2L_*} \leq 1. \quad (35)$$

Дослідимо поведінку функції $\psi_1(t)$ для $t > 0$. При малих значеннях t функція $\psi_1(t)$ асимптотично може бути подана у вигляді $\psi_1(t) = 1 - \frac{t^2}{12}$, відповідно, у області малих t при прямуванні t до нуля функція $\psi_1(t)$ прямує до одиниці, не перевищуючи цього значення. Для великих значень t функція $\psi_1(t)$ веде себе як $\left(\frac{\ln^2 t}{t}\right)$ й тим самим прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$. Результати розрахунків і помічені асимптотичні властивості показують, що при зміні t від 0 до ∞ функція $\psi_1(t)$ монотонно спадає від одиниці до нуля (графік функції $\psi_1(t)$, отриманий у результаті розрахунків, показаний кривою 1 на рис.3).

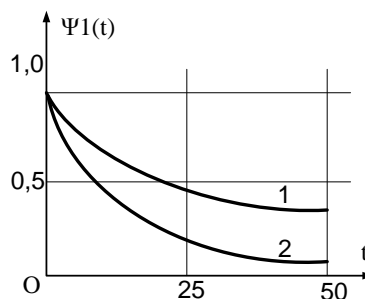


Рис.3. Графіки функції $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$

Розглянувши поведінку функції $\psi_1(t)$, приходимо до висновку, що для всіх значень параметрів задачі, які задовольняють умові (35), розв'язок варіаційної задачі існує і єдиний.

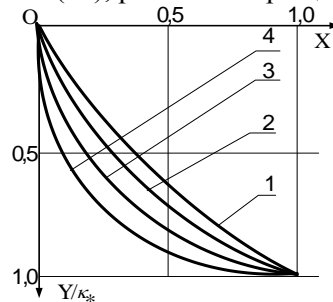


Рис 4. Оптимальні форми криволінійних стрижнів (лапи):

$$\begin{aligned} 1) t = 0,5; \quad \frac{\kappa_*^2}{2L_*} = 0,986; \quad 2) t = 2,5; \quad \frac{\kappa_*^2}{2L_*} = 0,879; \\ 3) t = 10; \quad \frac{\kappa_*^2}{2L_*} = 0,634; \quad 4) t = 50; \quad \frac{\kappa_*^2}{2L_*} = 0,315 \end{aligned}$$

На рис 4 показані отримані у результаті обчислень оптимальні форми криволінійних стрижнів (лап). Індексом 1,2,3,4 позначені криві, які відповідають наступним значенням параметру $t = 0,2; 2,5; 10; 50$. Значення параметру $\frac{\kappa_*^2}{2L_*}$ для вказаних t відповідно дорівнюють: 0,986; 0,879; 0,634; 0,315.

Для значень параметру $\frac{\kappa_*^2}{2L_*}$, близьких до одиниці, використовуючи асимптотичне представлення для ψ_1 за малих t , отримаємо з (34)

$$t = 2 \sqrt{2 \left(1 - \frac{\kappa_*^2}{2L_*} \right)}.$$

Рівняння (33) оптимальної осової лінії стрижня (лапи) у розглядуваному випадку приймає вигляд: $Y = \kappa_* \left(x + \frac{1}{2} tx(x-1) \right)$.

3. Розглянемо випадок $\alpha = 3$ (стрижні прямокутного перерізу змінної висоти). При цьому обмежимося вказуванням відповідної формули для u та рівнянь, які слугують для визначення довільних сталих. До цих рівнянь (співвідношень) можна прийти, обчислюючи при $\alpha = 3$ інтеграли, які входять у вирази (17) – (19), й переходячи до безрозмірних змінних (21).

$$\begin{aligned} y = 2\bar{c}_0\bar{c}_1 \ln \left(\frac{\bar{c}_0 + \sqrt{1-x} + \sqrt{\sqrt{1-x} + \bar{c}_0^2 - \bar{c}_1^2}}{1 + \bar{c}_0 + \sqrt{(1 + \bar{c}_0)^2 - \bar{c}_1^2}} \right) \\ + 2\bar{c}_1 \left(\sqrt{(1 + \bar{c}_0)^2 - \bar{c}_1^2} - \sqrt{\sqrt{1-x} + \bar{c}_0^2 - \bar{c}_1^2} \right), \\ \bar{c}_0 = \frac{c_0}{\sqrt{x_0}}, \bar{c}_1 = \frac{c_1}{\sqrt{x_0}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Постійні \bar{c}_0 та \bar{c}_1 задовольняють системі трансцендентних рівнянь:

$$\left\{ \bar{c}_0\bar{c}_1 \ln \left[\frac{\bar{c}_0 + \sqrt{\bar{c}_0^2 - \bar{c}_1^2}}{1 + \bar{c}_0 + \sqrt{(1 + \bar{c}_0)^2 - \bar{c}_1^2}} \right] + \bar{c}_1 \sqrt{(1 + \bar{c}_0)^2 - \bar{c}_1^2} - \sqrt{\bar{c}_0^2 - \bar{c}_1^2} = \frac{\kappa}{2}; \right. \quad (37)$$

$$\left. \bar{c}_1^2 \ln \left[\frac{1 + \bar{c}_0 + \sqrt{(1 + \bar{c}_0)^2 - \bar{c}_1^2}}{\bar{c}_0 + \sqrt{\bar{c}_0^2 - \bar{c}_1^2}} \right] + \bar{c}_0 \sqrt{\bar{c}_0^2 - \bar{c}_1^2} + (1 + \bar{c}_0) \sqrt{(1 + \bar{c}_0)^2 - \bar{c}_1^2} = L. \right. \quad (38)$$

Умови існування оптимального розв'язку (36) – (38) даються рівностями (25).

Не аналізуючи співвідношень (25), (36) – (38), зазначимо, що дослідження властивостей оптимального розв'язку на основі даних співвідношень може бути проведене аналогічно тому, як це робилось у п. 3 для випадку $\alpha = 1$.

4. Оптимальні форми при $\alpha = 0$ (стрижні постійного поперечного перерізу).

Аналогічний розгляд обмежимо випадком $\kappa = y_0/x_0 \ll 1$, тобто випадком пологих стрижнів (лапи).

Використовуючи безрозмірні змінні (21) і розклад (29) запишемо рівняння Ейлера варіаційної задачі (8) – (10) з $\alpha = 0$:

$$[(1-x)^2 + \lambda] \frac{dY}{dx} = B, \quad (39)$$

а граничні умови (9) і обмеження (10), (16) – у вигляді (31), (32), (35). Інтегруючи рівняння (39), отримаємо:

$$Y = -\frac{B}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{1-x}{\sqrt{\lambda}} + B_1 \text{ при } \lambda > 0; \quad (40)$$

$$Y = -\frac{B}{2\sqrt{\lambda}} \lg \left(\frac{1-\sqrt{-\lambda}-x}{1+\sqrt{-\lambda}-x} \right) + B_1 \text{ при } \lambda < 0; \quad (41)$$

$$Y = \frac{B}{1-x} + B_1, \lambda = 0. \quad (42)$$

Розглянемо спочатку розв'язок виду (42). Для того, щоб цей розв'язок задовольняв другій граничній умові (31), слід задати $B = 0$, $C = \kappa_*$. У результаті отримаємо функцію $Y(x) = \kappa_*$, ($\kappa_* \neq 0$), яка не задовольняє першій граничній умові (31). Відповідно, розв'язок виду (42) неприйнятний.

У розглядуваній задачі не існує також рішень виду (41), оскільки для $\sqrt{-\lambda} \geq 1$ чисельник виразу записаного у (41) під знаком логарифму, є від'ємним, а для $0 < \sqrt{-\lambda} < 1$ казаний чисельник від'ємний на частині інтервалу $1 - \sqrt{-\lambda} < x \leq 1$. Знаменник цього виразу (41) додатний у обох випадках. Тому логарифм, а, відповідно, й (41), не визначені на інтервалі $0 \leq x \leq 1$.

Перейдемо до розгляду розв'язку виду (40). Для визначення постійних B , і B_1 , які фігурують у (40), використаємо умови (31), (32). За допомогою граничних умов (31) обчислимо константи B , і B_1 .

У результаті (40) набуває вигляду:

$$Y = \kappa_* \left(1 - \frac{\operatorname{arctg}[t(1-x)]}{\operatorname{arctg} t} \right), \quad t \equiv \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (43)$$

Знаходження значення константи t на основі співвідношень (32), (43) призведе до трансцендентного рівняння:

$$\psi_2(t) = \frac{\kappa_*^2}{2L_*}, \quad \psi_2(t) \equiv \frac{2(1+t^2)(\operatorname{arctg} t)^2}{t[t+(1+t^2)\operatorname{arctg} t]}. \quad (44)$$

Зазначимо деякі властивості функції $\psi_2(t)$. Для малих t функція $\psi_2(t)$ асимптотично представляється у вигляді $\psi_2(t) \equiv 1 - \frac{4t^4}{45}$, звідки випливає, що $\psi_2(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow 0$, причому $\psi_2(t) < 1$ для $t \neq 0$. При $t \rightarrow \infty$ функція $\psi_2(t)$ має наступну асимптотичну залежність: $\psi_2(t) = \pi/t$ ($\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_2(t) = 0$). Результати розрахунків й зазначені вище асимптотичні властивості показують, що при зміні t від 0 до ∞ функція $\psi_2(t)$ монотонно спадає від 1 до 0 (див. графік функції $\psi_2(t)$, який показаний кривою 2 на рис 3.) звідси випливає, що для значень $\frac{\kappa_*^2}{2L_*} \leq 1$ розв'язок варіаційної задачі існує і він єдиний.

На рис 5 кривими з номерами 1, 2, 3, 4 показані отримані у результаті розрахунків оптимальні форми осьових ліній для котрих $t = 1; 2,5; 5; 10$.

Даним величинам параметру t відповідають значення $\kappa_*^2/2L_* = 0,960; 0,738; 0,482; 0,276$. Для значень параметру $\kappa_*^2/2L_*$, близьких до одиниці ($\kappa_*^2/2L_* < 1$), наближений розв'язок рівняння (44) визначається формулою:

$$t = \left[\frac{45}{4} \left(1 - \frac{\kappa_*^2}{2L_*} \right) \right]^{1/4}.$$

Відповідна форма осьової лінії (лапи) дається виразом:

$$Y = \kappa_* \left[1 - (1-x) \left(1 + \frac{1}{3} x t^2 / 2x \right) \right].$$

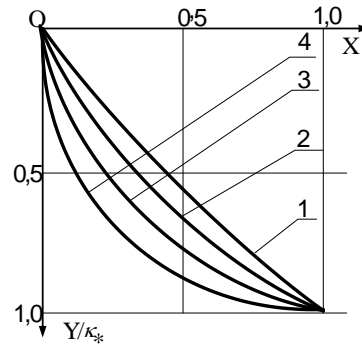


Рис 5. Оптимальні форми осевих ліній (стрижня) для випадку $\alpha = 0$ (постійний поперечний переріз):

$$1) t = 1; \frac{\kappa_*^2}{2L_*} = 0,960; 2) t = 2,5; \frac{\kappa_*^2}{2L_*} = 0,738;$$

$$3) t = 5; \frac{\kappa_*^2}{2L_*} = 0,482; 4) t = 10; \frac{\kappa_*^2}{2L_*} = 0,276$$

Якщо значення параметру $\frac{\kappa_*^2}{2L_*}$ малі, тоді рівняння (44) допускає наближений розв'язок $t = \frac{2\pi L_*}{\kappa_*^2}$, а рівняння осевої лінії записується у вигляді:

$$Y = \kappa_* \left[1 - \arctg \left(\frac{2\pi L_* (1-x)}{\kappa_*^2} \right) \left(\arctg \left(\frac{2\pi L_*}{\kappa_*^2} \right) \right)^{-1} \right].$$

6. Вивчимо тепер задачу (1) – (6), припускаючи заданими положення осевої лінії стрижня (лапи), тобто $x(s)$, $y(s)$ – задані. Єдиною шуканою функцією буде розподіл товщини $h = h(s)$ стрижня прямокутного перерізу по його довжині, або товщини несучих прошарків у випадку трипрошаркового стрижня ($I = k_\alpha h^\alpha$, $s = bh$). Розглянемо спочатку випадок тонких стрижнів, коли вирази для переміщень $u(l)$ та $v(l)$ задаються формулами:

$$u(l) = -\frac{1}{k_\alpha E} \int_0^l \frac{(y_0 - y) M ds}{h^\alpha}, \quad v(l) = \frac{1}{k_\alpha E} \int_0^l \frac{(x_0 - x) M ds}{h^\alpha}. \quad (46)$$

Рівняння Ейлера для неадитивного (у загальному випадку) функціоналу (6), (46) за наявності ізопериметричної умови (2) може бути записане у вигляді [3]:

$$M h^{-(\alpha+1)} [(y_0 - y) \Phi_u (x_0 - x) \Phi_v] = \lambda, \quad (47)$$

де λ – множник Лагранжа, який відповідає умові (2). Похідні $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \Phi_u(u, v)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \Phi_v(u, v)$ обчислюються при значеннях функціоналів u та v , які відповідають екстремалі $h(s)$ варіаційної задачі (2) – (6), (46). Для знаходження розв'язку цього рівняння (47) можна скористатись наступним прийомом.

Позначимо величини Φ_u та Φ_v , що відповідають екстремалі розглядуваної задачі через γ_1 та γ_2 , а рівняння (47) запишемо у вигляді:

$$h = \{M \alpha^{-1} [(y_0 - y) \gamma_1 - (x_0 - x) \gamma_2]\}^{1/\alpha+1}. \quad (48)$$

Константи γ_1 й γ_2 можуть бути знайдені з розв'язку системи рівнянь:

$$\Phi_u \equiv f_1(\gamma_1, \gamma_2, \lambda) = \gamma_1 \Phi_v \equiv f_2(\gamma_1, \gamma_2, \lambda) = \gamma_2, \quad (49)$$

до якої прийдемо у результаті підстановки подання (48) у формули (46) й наступного обчислення величин Φ_u та Φ_v . Після обчислення констант γ_1 та γ_2 множник λ визначається за формулою:

$$\lambda = \left(\frac{b}{v} \right)^{\alpha+1} \left\{ \int_0^l (M [(y_0 - y) \gamma_1 - (x_0 - x) \gamma_2])^{1/\alpha+1} ds \right\}^{\alpha+1}. \quad (50)$$

У окремому випадку, коли $\Phi = \beta_1 u(l) + \beta_2 v(l)$, а β_1, β_2 – задані константи, на основі формул (48) – (50) отримаємо:

$$h = \frac{b}{v} (M [(y_0 - y) \beta_1 - (x_0 - x) \beta_2])^{1/\alpha+1} \left\{ \int_0^l (M [(y_0 - y) \beta_1 - (x_0 - x) \beta_2])^{1/\alpha+1} ds \right\}^{\alpha+1}. \quad (51)$$

На прикладі трипрошаркового стрижня можна оцінити вигреш у жорсткості оптимального стрижня у порівнянні зі стрижнем, який має постійну товщину несучих прошарків. У розглядуваному прикладі осьова лінія стрижня має форму дуги кола:

$$y = r \sin \varphi, \quad x = r(1 - \cos \varphi), \quad x_0 = r, \quad y_0 = r, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

де r - радіус, а зовнішнє навантаження дається у вигляді зосередженої сили, яка прикладається у $(x_0; y_0)$ і діє у від'ємному напрямку осі y .

У якості мінімізованого функціоналу приймаємо величину вертикального переміщення u вільного кінця стрижня ($\beta_1 = 0, \beta_2 = 1$ у формулі (51)). Величина прогину u для трипрошаркового стрижня постійного перерізу, як це впливає з формул (2), (46), буде дорівнювати $u = \frac{\pi^2 r^4 P b}{8 k_1 E V}$.

У випадку стрижня, який має той самий об'єм V (армованих прошарків) і оптимальний розподіл товщини $h = \frac{V}{r b} \cos \varphi$, величина вертикального переміщення дорівнює $u = \frac{r^4 P b}{k_1 E V}$.

З порівняння величин прогинів отримаємо, що відносний вигреш у жорсткості оптимального стрижня у порівнянні зі стрижнем постійної товщини приблизно дорівнює 18%.

Перейдемо до загального випадку, відмовившись від припущення про тонкість стрижня. Розглядаючи суцільні стрижні (лапи) прямокутного перерізу ($I = \frac{b h^3(s)}{12}; s = bh$), запишемо співвідношення (1) наступним чином:

$$u(l) = \int_0^l \left(\frac{A_1}{h} + \frac{B_1}{h^3} \right) ds, \quad v(l) = \int_0^l \left(\frac{A_2}{h} + \frac{B_2}{h^3} \right) ds, \quad (52)$$

де величини A_1, A_2, B_1, B_2 не залежить від h і дорівнюють:

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{1}{Eb} \left[\left(N + \frac{M}{\rho} \right) \cos \varphi + \frac{N}{\rho} (y_0 - y) - mQ \sin \varphi \right]; \\ A_2 = -\frac{1}{Eb} \left[\left(N + \frac{M}{\rho} \right) \sin \varphi - \frac{N}{\rho} (x_0 - x) + mQ \cos \varphi \right]; \\ B_1 = -\frac{12M(y_0 - y)}{Eb}; \quad B_2 = -\frac{12M(x_0 - x)}{Eb}. \end{cases} \quad (53)$$

У розглядуваному випадку необхідна умова мінімуму функціоналу (6), (52), (53) при обмеженні (2) прийме вигляд:

$$h^{-2} (A_1 \Phi_u + A_2 \Phi_v) + 3h^{-4} (B_1 \Phi_u + B_2 \Phi_v) = \lambda. \quad (54)$$

Величини Φ_u, Φ_v мають той самий зміст, що і у рівнянні (47). При розв'язанні рівняння (54) можна скористатись тим самим прийомом, що і для рівняння (47). Якщо мінімізований функціонал Φ заданий у вигляді $\Phi = \beta_1 u(l) + \beta_2 v(l)$, тоді $\Phi_u = \beta_1, \Phi_v = \beta_2$, а рівняння Ейлера (54) зводиться до біквдратного алгебраїчного рівняння відносно h . У цьому випадку розв'язок розглядуваної задачі зводиться до обчислення постійної λ , для визначення якої слугує рівняння, що отримують після підстановки у (2) виразу для h з (54).

Висновки

1. Визначені оптимальні форми розпушувальних лап культиватора у наближенні тонких стрижнів для різних типів поперечного перерізу стрижня: прямокутного перерізу постійної ширини і змінної висоти; трипрошаркового стрижня змінної товщини зовнішніх прошарків і постійної товщини середнього прошарку. У якості функціоналу, що мінімізується (критерій оптимальності), обране значення вертикального прогину u кінця стрижня, тобто величина переміщення у напрямку дії сили на лапу культиватора.

2. Отримані у роботі результати можуть бути у подальшому використані для вдосконалення та уточнення існуючих інженерних методів розрахунку розпушувальних лап культиваторів, як на стадіях їх проектування і конструювання, так і у режимах (зокрема вібраційних) реальної експлуатації.

Література

1. Niordson F.I. A review of optimal structural design. / Niordson F.I., P. Pedersen // Proc. 13th Internat. Congr. Theoret. and Appl. Mech. Moscow University, 1972/ - Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1973.
2. Prager W. Optimization of structural design. / Prager W. // Optimizat. Theory and Appl. – 1970. – Vol.6. №1.
3. Черноусько Ф.Л. Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. / Ф.Л. Черноусько, Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1973. – 240 с.
4. Тимошенко С.П. Рассчет упругих арок./ Тимошенко С.П. – М.: Госстройиздат, 1933.
5. Киселев В.А. Рациональные формы арок и подвесных систем./ Киселев В.А. - М.: Госстройиздат, 1953.